East Asian Math. J.
Vol. 31 (2015), No. 4, pp. 483-503
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2015.036

학교수학에서 정다각형의 재구조화에 대한 귀납적 연구

Inductive study on the re-organization of regular polygons in school mathematics

홍동화 · 서보억[1] · 박은익 · 유성훈 · 최은서

ABSTRACT. While some studies have examined the concave and convex regular polygons respectively, very little work has been done to integrate and restructure polygon shapes. Therefore, this study aims to systematically reclassify the regular polygons on the through a comprehensive analysis of previous studies on the convex and concave regular polygons. For this study, the polygon's consistency with respect to the number of sides and angles was examined. Second, the consistency on the number of diagonals was also examined. Third, the size of the interior and exterior angels of regular polygons was investigated in order to discover the consistent properties. Fourth, the consistency concerning the area in regular polygons was inspected. Last, the consistency of the central figure number in the "k-th" regular polygons was examined. Given these examinations, this study suggests a way to create a concave regular polygon from a convex regular polygon.

I. 서론

수학이 처음 세상에 나타난 학문적인 모습은 점, 선, 면 등을 기본 도형으로 하는 기하였다. 세계 최초의 수학자로 알려져 있는 Thales가 증명한 것으로 알려진 다섯 가지 결과 즉, '원은 임의의 직경에 의하여 이등분된다, 이등변삼각형의 두 밑각은 같다, 맞꼭지각은 서로 같다, 두 삼각형에서 한 변과 양 끝 각이 같으면 서로 같다, 반원에 내접하는 각은 직각이다.'도 모두 기하에 대한 명제들이었다(Eves, 1962). 이러한 초기 그리스 시대 수학적 전통은 Euclid에게도 그대로 전달되어 원론(The Elements)의 가장 기본적인 수학 탐구 방법도 기하적인 것임을 쉽게 확인할 수 있다.

우리나라 수학과 교육과정의 도형 영역에서 가장 먼저 제시되는 학습요소는

1) 교신저자

Received August 12, 2015; Accepted August 25, 2015.
2010 Mathematics Subject Classification: 97A02
Key Words: 학교수학, 정다각형, 오목정다각형, 오목정다각형, 정다각형의 재구조화

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

등학교 1∼2학년군의 '일상생활에서 쉽게 접할 수 있는 입체도형과 평면도형의 모양'이다. 이에 대해 2009개정 수학과 교육과정에서는 '입체도형의 모양이나 평면도형의 모양을 다룰 때 모양의 특징을 직관적으로 파악함으로써 모양을 분류할 수 있게 한다.'(교육과학기술부, 2011)라고 제안하고 있다. 이는 눈에 보이는 도형의 특성에 따라 이름을 붙이는 정도의 수준에서 평면도형을 다루도록 제안한 것이다. 실제로 도형을 체계적으로 학습하는 것은 초등학교 3∼4학년군으로 삼각형(정삼각형), 사각형(정사각형), 다각형(정다각형) 등의 평면도형을 가장 먼저 학습한다. 중학교 1∼3학년군의 기하에서도 점, 선, 면, 각에 대한 기본 도형을 학습한 다음, 가장 먼저 학습하는 것은 다각형(정다각형)의 성질이다. 이처럼 기하의 학습에서 다각형과 정다각형은 가장 기본적인 내용으로 인식되어 학습의 초기에 중요하게 다루고 있다.

평면도형 중에서 다각형 및 정다각형의 중요성은 Euclid의 원론에서도 쉽게 확인할 수 있다. Heath(1952, 2008a)에 따르면 원론은 총 13권으로 공준 5개, 공통개념 5개, 정의 131개, 명제 465개로 구성되는데, 가장 앞부분인 제1권∼제4권에서 평면도형을 다룬다. 특히 제1권 첫 번째 명제가 정삼각형에 대한 작도 가능성에 대한 명제를 소개하고 있는 것으로 볼 때, 정다각형의 존재성과 성질을 매우 중요하게 다루었음을 짐작할 수 있다.

이처럼 고대 그리스 시대부터 매우 중요한 학습요소로 생각한 정다각형에 대한 국내 선행 연구를 정리하면, 크게 세 방향으로 정리할 수 있다. 첫째, 정다각형의 작도와 관련된 연구가 진행되었다(김석룡, 1989; 한인기, 2008). 둘째, 정다각형에서 대각선의 길이 간의 관계에 대한 연구가 진행되었다(조인주, 2006). 셋째, 오목한 다각형 중에서 별모양 정다각형과 관련된 연구가 진행되었다(김민석, 2004; 서보억, 2012). 이를 종합하면, 볼록한 정다각형의 작도 및 대각선의 성질 규명, 별모양 정다각형의 규명 등에 대한 연구가 수행되었음을 알 수 있다. 그런데 한 가지 특이한 점은 오목한 정다각형에 대한 연구와 볼록한 정다각형에 대한 연구가 병행하여 진행되었음에도 불구하고, 이 두 도형의 통합을 통한 재구조화를 위한 체계적 연구 및 학교수학 차원에서 정다각형의 재분류에 대한 연구는 진행되지 않았다는 점이다.

이러한 필요성에 의해 본 연구에서는 볼록한 정다각형과 오목한 정다각형에 대한 기존의 연구를 분석 종합하여 평면도형으로서 정다각형을 체계적으로 재분류하여, 수학 교육적 관점에서 재구조화하는 것을 연구 목적으로 한다. 이러한 연구목적을 달성하기 위해 오목한 정다각형에 대한 이론적 배경의 탐색, 정다각형의 재구조화를 위한 탐구 방향의 설정, 정다각형의 체계적인 재구조화라는 연구 방향을 설정하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

다각형의 특수한 형태가 정다각형이다. 정다각형이란 각 변의 길이와 각의 크기가 모두 같은 도형을 의미한다. 정다각형은 변의 개수가 같은 정다각형과 항상 닮음이며 정다각형의 꼭짓점은 모두 한 원 위에 있다. 즉, 원에 내접하는 다각형이다. 이러한 정다각형의 종류 중 볼록하지 않은 오목한 정다각형도 존재한다. 이 오목한 다각형은 오목한 정다각형, 별모양 정다각형 등으로 불리고 있다(Coxeter, 1973). 하지만 초등학교부터 고등학교까지 학교수학에서 다루어지는 모든 정다각형은 볼록한 정다각형이다. 실제로 많은 이들이 오목한 정다각형에 대해 알지 못하고 있고, 게다가 오목한 정다각형과 볼록한 정다각형을 통합하여 하나의 관점에서 조망하는 방법에 대한 탐색은 없는 것으로 나타났다.

1. 볼록한 정다각형

볼록한 정다각형에 대한 문헌은 고대 그리스의 Euclid의 원론과 현재 우리나라 초등학교 및 중학교 교과서에서 찾을 수 있다. 먼저 Euclid 원론에 제시된 내용을 살펴보자. 제1권에는 23개의 정의가 제시되어져 있는데, 정의 20번과 정의 21번이 정삼각형과 정사각형에 대한 것이다. 또한 제1권의 첫 번째 명제가 정삼각형을 작도하는 명제이고, 명제 45가 주어진 선분 위에 정사각형을 작도하는 명제이다. 하지만 정다각형을 가장 많이 다루는 것은 제4권이다. 제4권은 총 7개의 정의와 16개의 명제가 있는데, 모든 명제가 원과 관련시켜 정다각형을 다루고 있다. 예를 들어, 명제 2는 정삼각형을 원에 내접시키는 방법, 명제 6은 정사각형을 원에 내접시키는 방법, 명제 11은 정오각형을 원에 내접시키는 방법, 명제 15는 정육각형을 원에 내접시키는 방법, 명제 16은 정십오각형을 원에 내접시키는 방법을 다루고 있다(Euclid, 2003). 결과적으로 원론에서 정다각형은 원에 내접하는 도형이라는 의미가 강조되고 있음을 발견할 수 있다.

다음으로 초등학교 및 중학교 교과서에 제시된 정다각형의 내용에 대해 살펴보자. 초등학교의 경우, 정다각형은 3~4학년군 도형 영역에서 도형의 기초를 학습한 다음, 여러 가지 삼각형, 여러 가지 사각형, 다각형 단원에서 학습하고 있다. 이때, 정다각형은 '변의 길이가 모두 같고, 각의 크기가 모두 같은 다각형'으로 규정하고 있다(교육인적자원부, 2011). 중학교의 경우, 1~3학년군 기하 영역에서 기본 도형 및 작도와 합동을 학습한 다음, 평면도형의 성질 단원에서 정n각형에서 한 내각의 크기와 한 외각의 크기를 학습하고 있다. 초등학교와 중학교에서 다루고 있는 정다각형은 '다각형을 이루는 모든 변의 길이는 같다는 것과 각 꼭짓점에서 만들어지는 내각의 크기는 모두 같다'는 의미를 담고 있다(김원경 외, 2015a). 이상의 분석을 통해 볼 때, 볼록한 정다각형은 다음 세 가지 조건을

만족하는 도형이라는 결론에 도달할 수 있다.

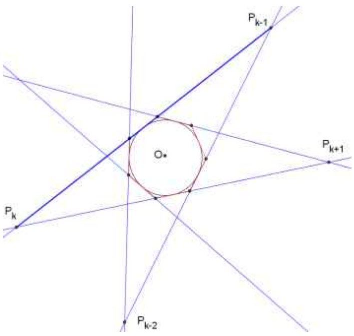
조건1: 변의 길이는 같다. 조건2: 내각의 크기는 같다. 조건3: 원에 내접한다.

2. 오목한 정다각형

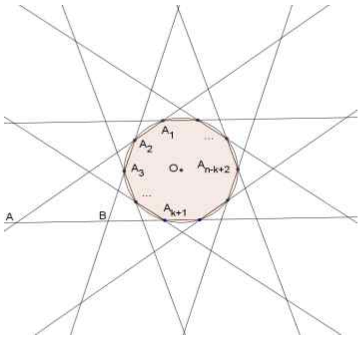
오목한 정다각형에 대해 박한식(1991), 서보억(2012), Coxeter(1973), Grünbaum(2003)등은 구체적으로 언급하고 있고, 오목한 정다각형의 존재의 명확성과 더불어 그 교육적 가치를 높이 평가하고 있다. 이들 연구에서 별모양 정다각형을 오목한 정다각형이라고 하였고, 그 이름을 정n/k각형이라고 명명하고 있다. 이러한 이름 붙이기의 근거는 매우 간단하다. 정n각형에서 한 내각의 크기를 d_n이라고 하면, $d_n = 180(n-2)/n$인데, d_n의 값이 결정되었을 때 n의 값을 계산하면 n/k의 형태가 되기 때문이다(서보억, 2012). 이제 구체적으로 오목한 정다각형의 생성 방법, 볼록한 정다각형과 대비되는 오목한 정다각형의 기본적인 성질에 대해 살펴보자.

가. 오목한 정다각형의 생성 방법

서보억(2012)에 따르면, 볼록한 정n각형을 출발점으로 하여 오목한 정n각형을 다음 절차를 통해 생성할 수 있다. 첫째, 볼록한 정n각형을 그리고, 내접원의 중심을 잡는다. 둘째, 볼록한 정n각형의 모든 변의 연장선을 긋는다([그림 Ⅱ-1]). 셋째, n개의 직선이 만드는 교점들 중에서 원의 중심 O에서 동일한 거리에 있는 점들을 P_k라고 한다. 그리고 P_k 점들과 P_{k-1}점들을 일대일로 연결한다([그림 Ⅱ-2]). 넷째, 앞 단계의 절차를 수행 가능한 단계까지 수행한다.



[그림 Ⅱ-1]

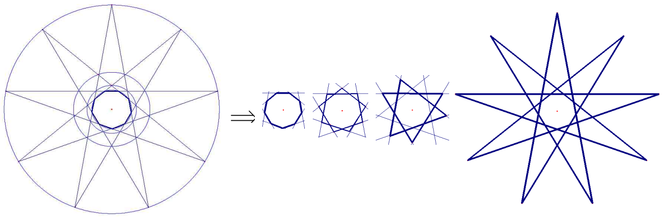


[그림 Ⅱ-2]

나. 오목한 정다각형의 성질

오목한 정n각형은 볼록한 정n각형처럼 유일하게 결정되지 않는다. 예를 들어 위와 같은 방법으로 오목한 정n각형을 생성하면 아래 [그림 Ⅱ-3]과 같이 한 종

류의 볼록한 정9각형과 서로 다른 세 종류의 오목한 정9각형을 얻을 수 있다. 이들의 이름을 명확하게 하기 위해 '볼록한'과 '오목한'이라는 수식어를 없애고, 정9각형, 정9/2각형, 정9/3각형, 정9/4각형이라 명명할 수 있다.



[그림 Ⅱ-3] 오목한 정9각형의 생성(서보억, 2012)

이로부터 오목한 정다각형의 성질을 다섯 가지로 유도할 수 있다. 첫째, 정n/k각형에서 n은 원에 내접하는 꼭짓점의 개수 혹은 정다각형의 변(각)의 개수이다. 또한, k는 정다각형을 만드는 변 사이에 있는 변의 개수에 1을 더한 값 혹은 점 O를 중심으로 만들어지는 동심원의 순서에 따른 매긴 값이다. 둘째, 정n/k각형에서 n이 짝수일 때 내각의 합은 360°가 가장 작고, 홀수일 때는 180°가 가장 작다. k의 값이 1커질수록 내각의 총합은 360°씩 감소한다. 따라서 정n/k각형의 내각의 총합이 0°보다 커야하므로, 정다각형이 존재하기 위한 k의 범위는 $n/2>k$이다. 즉 정n/k각형이 존재하기 위한 k의 범위는 $n/2>k$이다. 셋째, 정n/k각형의 내각의 크기의 총합을 ${}_nS_k$라고 하면, ${}_nS_k=\pi(n-2k)$이다. 넷째, 정n/k각형에서 k의 값에 따른 내각의 크기는 등차수열을 이룬다. 실제로 정n/k각형의 한 내각의 크기를 ${}_ka_n$(rad)라고 하면, ${}_ka_n=\pi(n-2k)/n$이다. 다섯째, 정n/k각형에서 n/k의 기약분수를 p/q라고 할 때, $p/q=N$가 자연수이면 정N각형 k개로 구성되어지고, p/q가 유리수이면 정p/q각형 k/q개로 구성된다.

Ⅲ. 정다각형 재구조화를 위한 방향 설정

정n/k이라고 명명함으로 인해 볼록한 혹은 오목한 정다각형이라는 말을 정다각형이라는 말로 통합하여 일관성 있게 부를 수 있음을 확인하였다. 지금까지의 연구결과를 통해 볼 때, 정n/k각형에 영향을 미치는 중요한 변수는 k임을 알 수 있다. 만약 $k=1$일 때는 우리가 아는 일반적인 볼록한 정다각형임이 명확하다. 본 연구의 효율성을 위해 중요한 변수인 k의 값에 따라 다음과 같이 수정된 결론을 도출하였다. 첫째, 오목한 정다각형(별모양 정다각형)의 이름은 제k계 정n각형이라고 부르기로 한다(단, k는 자연수이다). 둘째, 제k계 정n각형에서 한 내각의 크기 ${}_ka_n$는 $\pi(n-2k)/n$이고, 전체 내각의 총합은 ${}_kS_n$는 $\pi(n-2k)$가 된다.

수정된 결과를 바탕으로 본 연구에서는 초·중등학교 학교수학에서 활용가능한 정다각형의 체계적인 분류와 정다각형의 재구조화를 위한 방향으로 k의 값에 따른 도형들이 가지는 특성의 탐색으로 결정하였다. 볼록한 정다각형과 오목한 정다각형을 통합하여 체계적으로 재구조화하는 방법은 볼록 혹은 오목에 관계없이 일관된 기준으로 동일한 성질을 유도해 낼 수 있는 일관성이 유지되는지 학교수학의 내용 체제 내에서 수학적으로 규명하는 것이다. 따라서 k의 값에 따른 정다각형의 특성이 일관성을 유지하는지 탐색하기 위한 학교수학의 내용요소를 추출할 필요가 있다. 이를 위해, 본 연구에서는 두 가지 접근을 통해 학교수학의 내용요소를 추출하였다. 하나는 초등학교 및 중학교에서 다루어지는 정다각형의 학습 내용을 기반으로 추출하는 것이고, 다른 하나는 수학사의 고찰을 통해 얻은 정다각형의 성질을 기반으로 추출하는 것이다.

먼저, 초등학교에서 학습하는 정다각형의 성질은 변의 개수와 각의 개수에 국한되어져 있다(교육부, 2015a; 2015b; 2015c; 2015d). 중학교에서는 대각선의 개수, 내각의 크기, 외각의 크기를 다루고 있었다(김원경 외, 2015a; 2015b; 2015c). 따라서 초등학교 및 중학교에서 다루어지는 학습 내용으로 변의 개수와 각의 개수, 대각선의 개수, 내각의 크기, 외각의 크기를 추출할 수 있다. 두 번째로 수학사 문헌에 대한 고찰을 통해 정다각형의 넓이, 중심도형수, 볼록과 오목의 관계를 추출하였다(김진호·김용대·서보억, 2011; 김용운, 2010; 이종우, 2002; 한인기, 2003; Boyer & Merzbach, 1991; Dresden, 1963; Heath, 2008b; Klein, 1968; Kline, 1972; Lambert, 1906; Lucas et al, 1988; Smith, 1958).

이러한 결과로부터, 본 연구에서는 정다각형의 변의 개수와 각의 개수에 대한 일관성 탐구, 정다각형의 대각선의 개수에 대한 일관성 탐구, 정다각형의 내각의 크기에 대한 일관성 탐구, 정다각형의 외각의 크기에 대한 일관성 탐구, 정다각형의 넓이에 대한 일관성 탐구, 제k계 정n각형에서 중심도형수에 대한 일관성 탐구, 볼록한 정다각형을 통한 오목한 정다각형 도출에 대한 일관성 탐구를 통해 정다각형을 체계적으로 재구조화하였다.

Ⅳ. 연구결과

지금까지 전통적인 방법으로 정다각형을 분류하는 방법은 <표 Ⅳ-1>과 같다. 볼록한 정다각형이 있고, 그와 다른 오목한 정다각형을 생각할 수 있다. 전통적인 방법에 따르면 정다각형을 구분하는 기준은 절대적으로 변의 개수임을 알 수 있다. 반면, 본 연구에서 관심을 가지는 정다각형의 분류는 <표 Ⅳ-2>와 같다. 이 분류는 k값을 기준으로 도형을 재분류하여 체계화할 수 있는 방법을 제시해 주고 있다. 이러한 분류는 초등학교와 중학교에서 다루는 볼록한 정다각형을 제1

계 정다각형이라는 이름으로 묶고, k의 값에 따라 그 범주를 확장해 가는 분류방법이다.

<표 Ⅳ-1> 변의 개수에 따른 정다각형의 분류

변의 개수	볼록한 정다각형	오목한 정다각형
3	정3각형	-
4	정4각형	-
5	정5각형	정5/2각형
6	정6각형	정6/2각형
7	정7각형	정7/2각형, 정7/3각형
…	…	…
n	정n각형	정$n/2$각형, 정$n/3$각형, …, 정n/k각형 (단, $n>2k$)

<표 Ⅳ-2> k의 값에 따른 정다각형의 분류

k의 값	분류 영역	정다각형의 종류
1	제1계 정다각형	정3각형, 정4각형, 정5각형, …, 정n각형
2	제2계 정다각형	정5/2각형, 정6/2각형, 정7/2각형, …, 정$n/2$각형
3	제3계 정다각형	정7/3각형, 정8/3각형, 정9/3각형, …, 정$n/3$각형
4	제4계 정다각형	정9/4각형, 정10/4각형, 정11/4각형, …, 정$n/4$각형
…	…	…
k	제k계 정다각형	정a_1/k각형, 정a_2/k각형, 정a_3/k각형, …, 정n/k각형

이러한 새로운 분류표를 통해 재구조화할 수 있는지 구체적으로 살펴볼 필요가 있다. 이를 위해 기존의 제1계 정다각형에서의 성질이 제k계 정다각형으로 일관성 있게 확장돼 가는지에 대해 학교수학 학습 내용 체제 내에서 수학적 탐색은 필수적이다. 이에 재구조화를 위한 방향 설정에서 밝힌 내용을 중심으로 일관성을 유지되는지 구체적으로 살펴보자.

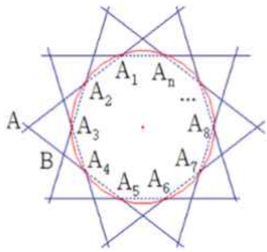
1. 변의 개수와 각의 개수에 대한 일관성 탐구

제1계 정다각형인 정n각형의 변의 개수와 각의 개수는 모두 n으로 일정하다. 제k계 정다각형인 정n/k각형에서 k는 계열을 결정하고, n의 값은 변의 개수와 각의 개수를 결정한다. 따라서 제1계 정다각형과 제k계 정다각형에서 변의 개수와 각의 개수는 일관성을 지니고 있다.

2. 정다각형의 대각선의 개수에 대한 일관성 탐구

제1계 정다각형에서 정n각형의 대각선의 개수는 $n(n-3)/2$ 이다. 이제 제k계 정다각형인 정n/k각형에서 대각선의 개수에 대해 살펴보자. [그림 Ⅳ-1]과 같이 정n/k각형이 주어져 있고, 한 꼭짓점을 A라고 하자. 그러면, A에서 그을 수 있는

대각선의 개수는 꼭짓점 A와 직접 연결돼 있는 두 점을 제외한 나머지 꼭짓점과 연결한 선분의 개수와 같다. 비록 이 선분이 도형의 외부에 만들어지지만 대각선의 정의에 부합한다. 따라서 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 수는 $n-3$개이고, 이러한 꼭짓점이 n개 있으므로 전체 대각선의 개수는 $n(n-3)/2$이다. 즉, 제k계 정다각형의 대각선의 수는 제1계 정다각형과 동일한 $n(n-3)/2$이므로, 제1계 정다각형과 제k계 정다각형에서 대각선의 개수는 일관성을 지니고 있다.



[그림 Ⅳ-1] 정n/k각형

3. 정다각형의 내각의 크기에 대한 일관성 탐구

서보억(2012)의 연구는 정n/k각형에서의 내각의 크기에 초점을 맞추고 있다. 선행연구를 기반으로 볼 때, 원에 내접하는 제1계 정n각형에서 한 내각의 크기를 ${}_1a_n$, 전체 내각의 크기의 총합을 ${}_1S_n$라 하면, ${}_1a_n=\pi-2\pi/n=\pi(n-2)/n$이 되고, 이로부터 ${}_1S_n=\pi(n-2)$를 얻을 수 있다. 이는 중학교 기하영역에서 다루는 정n각형의 한 내각의 크기와 그 내각의 총합과 일치한다. 이제 제k계 정n각형에 대해 살펴보자. 한 내각의 크기를 ${}_ka_n$, 전체 내각의 크기의 총합을 ${}_kS_n$라 하면, ${}_ka_n=\pi(n-2k+2)/n-2\pi/n=\pi(n-2k)/n$이 되므로, ${}_kS_n=\pi(n-2k)$를 얻을 수 있다. 그런데, ${}_ka_n=\pi(n-2k)/n$에서 $k=1$을 대입하면 정n각형의 한 내각의 크기인 $\pi(n-2)/n$과 같고, ${}_kS_n=\pi(n-2k)$에서 $k=1$을 대입하면 정n각형의 내각의 총합인 $\pi(n-2)$와 같아진다. 이를 통해 볼 때, 제1계 정다각형과 제k계 정다각형에서 한 내각의 크기와 전체 내각의 총합은 일관성을 지니고 있다.

(제k 정n각형 내각) 제k계 정n각형에서 한 내각의 크기 ${}_ka_n$는 $\pi(n-2k)/n$이고, 전체 내각의 총합은 ${}_kS_n$는 $\pi(n-2k)$가 된다.■

4. 정다각형의 외각의 크기에 대한 일관성 탐구

제1계 정다각형의 볼록한 정다각형의 외각의 크기의 합은 2π이다. 그런데 $k=2$일 때 정$n/2$각형(단, $n\geq 5$)의 외각의 크기의 합은 4π이다. k이 증가함에 따라 외각의 크기의 합도 증가함을 알 수 있다.

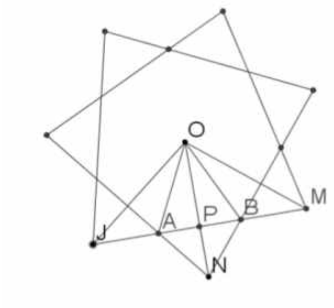
일반적으로 볼록한 정다각형의 외각의 크기의 합은 2π이다. 여기에서는 앞에서 살펴본 본 정n/k각형에서의 외각의 크기에 대해 고찰해 보자. 제k계 정n각형에서 한 내각의 크기 ${}_k a_n$는 $\dfrac{\pi(n-2k)}{n}$이므로, 한 외각의 크기는 $\pi-\pi(n-2k)/n$이 된다. 따라서 전체 외각의 크기는 $n\pi-\pi(n-2k)=2k\pi$이다. 한 외각의 크기인 $\pi-\pi(n-2k)/n$와 전체 외각의 크기의 합인 $2k\pi$ 각각에 $k=1$을 대입하면, 정n각형의 한 외각의 크기인 $2\pi/n$와 전체 외각의 총합인 2π와 같아진다. 이를 통해 볼 때, 제1계 정다각형과 제k계 정다각형에서 한 외각의 크기와 전체 외각의 총합은 일관성을 지니고 있다.

(제k 정n각형 외각) 제k계 정n각형에서 외각의 크기의 합은 $2k\pi$가 된다.■

5. 정다각형의 넓이에 대한 일관성 탐구

한 변의 길이와 외접원의 반지름에 따른 정다각형의 넓이를 제k계 정다각형에서 일반화하여 그 일관성이 성립하는지 살펴보자. 먼저, 정$n/2$각형의 넓이를 고찰하기 위해, [그림 Ⅳ-2]의 정$7/2$을 통해 정$n/2$각형의 넓이를 구해 보자. 정다각형의 한 변의 길이를 a라고 하고, 외접원의 반지름을 r이라고 하면, 외접원의 중심과 각 꼭짓점들이 이루는 각은 2π를 k등분하므로 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\angle \mathrm{AOP}=\angle \mathrm{JOA}=\angle \mathrm{BOP}=\angle \mathrm{BOM}=\pi/n$$



[그림 Ⅳ-2] 정$7/2$각형

그런데 $\triangle\mathrm{OMP}$에서 $\sin\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{\frac{a}{2}}{r}$, $\overline{\mathrm{OP}}=r\cos\dfrac{2\pi}{n}$, $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{OP}}\tan\dfrac{\pi}{n}=r\cos\dfrac{2\pi}{n}tan\dfrac{\pi}{n}$이고, 정$n/2$각형은 $\triangle\mathrm{BON}$과 같은 넓이의 삼각형이 $2n$개 있으므로, 다음이 성립한다.

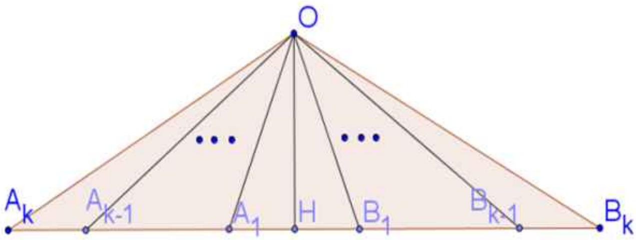
$$\triangle\mathrm{BON}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BP}}\,\overline{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}r\cdot\ \ r\cdot\ \ \cos\frac{2\pi}{n}\cdot\ \ \tan\frac{\pi}{n}$$

따라서 정$n/2$각형의 넓이 ${}_2S_n = nr^2\cos\frac{2\pi}{n}\tan\frac{\pi}{n}$이다. 이 때, $\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{\frac{a}{r}}{2}$에서 $r = \frac{a}{2}\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{n}$이므로 이 식을 위의 식에 대입하면 ${}_2S_n = \frac{na^2}{4}\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{n}\cot\frac{2\pi}{n}\tan\frac{\pi}{n}$를 얻을 수 있다.■

(제2계 정n각형의 넓이) ${}_2S_n = \frac{na^2}{4}\csc\frac{2\pi}{n}\cot\frac{2\pi}{n}\tan\frac{\pi}{n}$ **이다.■**

이제 정n/k각형 넓이로 확장하여 일관성을 유지하는지 살펴보자. [그림 Ⅳ-3]은 정n/k각형의 일부이다. [그림 Ⅳ−3]에서 $\angle \mathrm{A}_k\mathrm{OA}_{k-1} = \frac{2\pi}{2n}\times k = \frac{k\pi}{n}$, $\overline{\mathrm{OA}_k} = r$ (외접원의 반지름), $\overline{A_kB_k} = a$(한 변의 길이)이다. $\triangle\mathrm{OHA}_k$에서 $\frac{a}{2} = r\sin\frac{k\pi}{n}$이고, $\overline{\mathrm{OH}} = r\cos\frac{k\pi}{n}$이다. 또한, 다음이 식이 성립한다.

$$\overline{\mathrm{HA}_{k-1}} = \overline{\mathrm{OH}}\,tan\frac{(k-1)\pi}{n} = r\cos\frac{k\pi}{n}\tan\frac{(k-1)\pi}{n}$$



[그림 Ⅳ-3] 제k계 정n각형의 일부

따라서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\triangle\mathrm{OA}_k\mathrm{A}_{k-1} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k-1}}\,\overline{\mathrm{OH}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - \overline{\mathrm{HA}_{k-1}}\right)\left(r\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$= \frac{r^2}{2}\cos\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{n}\tan\frac{(k-1)\pi}{n}\right)$$

또한 정n/k각형은 $\triangle\mathrm{OA}_k\mathrm{A}_{k-1}$와 합동인 삼각형이 $2n$개 있다. 따라서 정n/k각형의 넓이는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$${}_nS_k = nr^2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{n}\tan\frac{(k-1)\pi}{n}\right)$$
$$= \frac{na^2}{4}cosec\frac{k\pi}{n}cot\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{n}\tan\frac{(k-1)\pi}{n}\right)$$

(제k계 정n/k각형의 넓이1) 외접원의 반지름이 r인 정n/k각형의 넓이는
$_kS_n = nr^2\cos\frac{k\pi}{n}(\sin\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{n}\tan\frac{(k-1)\pi}{n})$ **이다.■**

(제k계 정n/k각형의 넓이2) 한 변의 길이가 a인 정n/k각형의 넓이
$_kS_n = \frac{na^2}{4}cosec\frac{k\pi}{n}cot\frac{k\pi}{n}(\sin\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{n}\tan\frac{(k-1)\pi}{n})$ **이다.■**

이를 통해 볼 때, 제1계 정다각형과 제k계 정다각형에서 정다각형의 넓이는 일관성을 지니고 있다.

6. 제k계 정n각형에서 도형수에 대한 귀납적 탐구

피타고라스학파는 도형수를 통해 수와 기하를 연결하려고 시도하였다. 삼각수, 사각수, 오각수 등 n각수는 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형 등 기하학적인 모양을 보여주는 수의 나열이다. 이러한 수의 나열에 대해 박교식(2004)는 중심도형수라는 새로운 개념을 도입하여 규칙성을 고찰하고 있다. 본 연구에서는 중심도형수의 관점에서 제k계 정다각형의 일관성에 대해 고찰한다.

제k계 도형수에 대한 탐색을 위해 두 용어에 대한 정의가 필요하다. 하나는 '중심도형수'이고, 다른 하나는 '뿔 수'이다. 중심도형수란 제k계 정다각형 맨 가운데 위치한 정다각형 내부에 찍힌 도형수를 의미하고, 뿔 수는 오목한 정다각형은 정다각형과 그 정다각형에 붙어 있는 삼각형으로 구성이 되는데 그 삼각형에 찍히는 도형수를 '뿔 수'라고 한다. 또한, 연구의 효율성을 도모하기 위해 제k계 정n각형 r번째 도형수를 $_kM_{(n,r)}$이라고 하자.

가. 제1계 정n각형에서의 중심도형수

박교식(2004)에 따르면 정삼각형 중심도형수는 $_1M_{(3,r)} = \frac{1}{2}(3r^2 - 3r + 2)$이고, 정사각형 중심도형수는 $_1M_{(4,r)} = \frac{1}{2}(4r^2 - 4r + 2)$이며, 정오각형 중심도형수는 $_1M_{(5,r)} = \frac{1}{2}(5r^2 - 5r + 2)$ 이다.


[그림 Ⅳ-4] 정삼각형 수

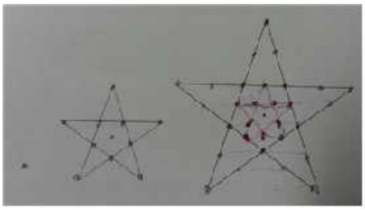

[그림 Ⅳ-5] 정사각형 수


[그림 Ⅳ-6] 정오각형 수

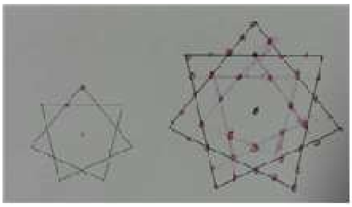
이를 일반화하여 제1계 정n각형의 중심도형수는 ${}_1M_{(n,r)} = (nr^2-nr+2)/2$이 된다. 왜냐하면, n각형의 중심도형수는 n개의 $r-1$차 삼각수와 중심 1개로 이루어져 있기 때문이다. 여기서 r차 삼각수의 일반식은 $r(r+1)/2$이므로, $r-1$차 삼각수의 일반식은 $r(r-1)/2$이 된다. 이 삼각수가 총 n개 있으므로 $nr(r-1)/2$이다. 중심 1개를 더한 총합은 $nr(r-1)/2\ +\ 1$이 유도된다.

나. 제2계 정n각형에서의 중심도형수

먼저 제2계 정5각형의 중심도형수에 대해 살펴보자. [그림 Ⅳ-7]의 정5/2각형에서 $r=2$일 때 뿔 수에 1개씩 5개가 있고, 중심도형수에 1개씩 5개 및 중심에 1개가 있어 총 11개이다. $r=3$일 때는 뿔 수에 3개씩 5개가 있고, 중심도형수에 3개씩 5개 및 중심에 1개가 있어 총 31개이다. 여기서 $r=2$에서 찍힌 1개와 $r=2$에서 찍힌 3개의 점은 $r-1$차 삼각수라고 생각할 수 있다. 따라서 제2계 정5각형의 도형수는 ${}_2M_{(5,r)} = 5r^2-5r+1$로 유도가 된다. 다음은 제2계 정7각형의 도형수에 대해 살펴보자. [그림 Ⅳ-8]의 정7/2각형에서도 정5/2각형과 같은 방법으로 생각하면 $r=2$일 때 뿔 수에 1개씩 7개가 있고, 중심도형수에 1개씩 7개가 있으며, 중심에 1개가 있으므로 총 15개이다. $r=3$일 때 뿔 수에 3개씩 7개가 있고, 중심도형수에 3개씩 7개가 있으며, 중심에 1개가 있으므로 총 43개이다. 이를 통해, 제2계 정7각형의 도형수 ${}_2M_{(7,r)} = 7r^2-7r+1$를 유도할 수 있다.



[그림 Ⅳ-7] 정5/2각형의 도형수

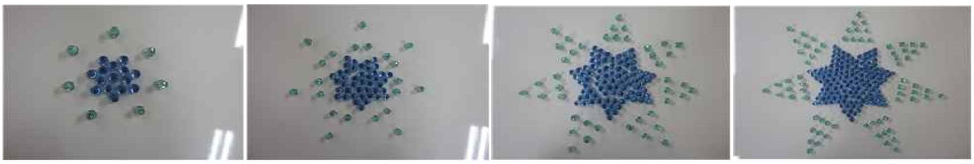


[그림 Ⅳ-8] 정7/2각형 도형수

이제 제2계 정n각형의 도형수가 어떻게 되는지 일반화하여 보자. 중심도형수는 우리가 알고 있는 볼록한 도형의 다각형수와 동일하다. 여기서 구하는 중심도형수의 차수를 r이라 하면 이 중심도형수에 찍은 점들은 중심 1개를 제외한 나머지 점을 $r-1$차의 삼각수로 묶을 수 있다. 이러한 $r-1$차의 삼각수가 총 n개 존재하기 때문에 이러한 삼각수들의 총합은 $nr(r-1)/2$개다. 여기에 중심 1개를 더하면 중심도형수의 일반식인 $nr(r-1)/2+1$이 유도된다. 위 과정을 통해 우리는 ${}_2M_{(n,r)} = nr^2-nr+1$을 얻을 수 있다.

다. 제3계 정n각형의 중심도형수

정n/3각형의 중심도형수에서 r을 몇 번째 중심도형수인지를 나타내는 함수로 두었다. $r=1$일 경우에는 어떠한 경우에도 1개의 점만 찍히기 때문에 제외하였다. [그림 IV-9]는 n이 7일 경우의 도형수를 나타낸 것이다. 여기서 1차 뿔 수와 중심다각수는 파란색 자석으로 나타내었고, 2차 뿔 수만 초록색 자석으로 구분해 놓았다.

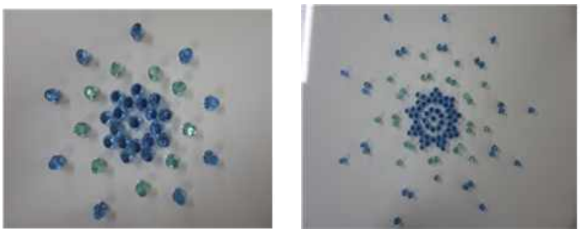


[그림 Ⅳ-9] 정n/3각형의 r이 1, 2, 3, 4일 때의 모양

[그림 IV-9]에서도 알 수 있듯이 제1차와 제2차 즉 서로 같은 뿔 수는 $r-1$차의 삼각수의 n배임을 알 수 있고, 위에서 증명하였던 중심도형수 또한 $r-1$차의 삼각수의 n배에 1을 더한 값과 같으므로 이들의 총합은 $3nr(r-1)/2+1$ 이라는 일반식을 유도할 수 있다. 따라서 위와 같은 과정을 통해 우리는 ${}_3M_{(n,r)}=\frac{3}{2}(nr^2-nr)+1$ 이라는 일반화된 식을 얻을 수 있다.

라. 제4계 정n각형의 도형수

[그림 IV-10]은 제4계 정9각형에서 $r=2$, $r=3$일 때를 나타낸 도형수이다. 제3계 정n각형에서와 마찬가지로 1차 뿔 수는 중심도형수와 함께 파란색 자석으로 나타내었고, 그 이후의 뿔 수는 초록색과 파란색을 번갈아가며 찍었다. 그림에서 알 수 있듯이 같은 차수의 뿔 수는 모두 $r-1$차 삼각수의 n배라는 것을 알 수 있고, 중심다각수의 일반식은 위에서 $nr(r-1)/2+1$ 이라고 유도하였으므로 이들의 총합은 $2nr(r-1)+1$이라는 일반식이 유도된다. 이를 통해 볼 때, 제4계 정n각형의 r번째 도형수는 ${}_4M_{(n,r)}=2(nr^2-nr)+1$이라는 식을 유도할 수 있다.



[그림 Ⅳ-10] 정n/4각형의 r이 2, 3일 때의 모양

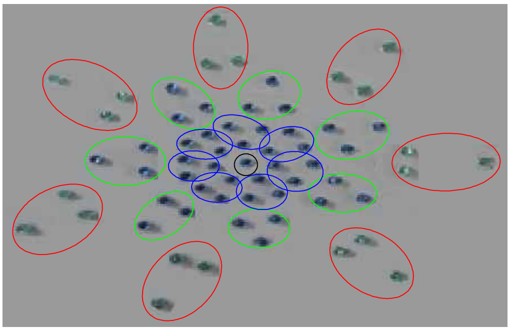
마. 제k계 정n각형의 도형수

지금까지의 논의를 표로 나타내면 <표 Ⅳ-3>과 같이 나타낼 수 있다. 정n/k각형에서 k가 증가하면, 뿔 수의 개수는 증가하게 된다. $k=2$일 때 처음으로 뿔 수가 나타나는데 이를 제1뿔 수, $k=3$일 때 나타나는 뿔 수를 제2뿔 수, 나머지는 이와 같은 방법으로 명명한다. 그렇다면 이 개념을 도입하여 중심도형수를 일반화하면, 오목한 정다각형에서 나타나는 뿔 수 중 같은 차수를 가진 뿔 수에서 n개의 삼각수를 찾을 수 있고, 다각형 수에서 또한 중심 1개를 제외한 나머지를 삼각수로 묶을 수 있다. 이렇게 묶은 삼각수의 차수는 $(r-1)$차 삼각수가 되며, 그 삼각수 개수의 총합은 nk개가 된다. 따라서 오목한 정다각형에 도형수는 $(r-1)$차 삼각수가 총 nk개 있고, 중심 1개를 더한 값이므로 이를 하나의 수식으로 나타내면 $nkr(r-1)/2+1$이라는 중심도형수의 일반화식이 유도된다.

<표 Ⅳ-3> 정n/k각형의 도형수

구분		$k=1$	2	3	4	5
	$r=1$	1	1	1	1	1
	2	4	7	10	13	16
	3	10	19	28	37	46
$n=3$	4	19	37	55	73	91
	5	31	61	91	121	151
	…	…	…	…	…	…
	r	$3r(r-1)/2+1$	$3r(r-1)+1$	$9r(r-1)/2+1$	$6r(r-1)+1$	$15r(r-1)/2+1$
	$r=1$	1	1	1	1	1
	2	5	9	13	17	21
	3	13	25	37	49	61
$n=4$	4	25	49	73	97	121
	5	41	81	121	161	201
	…	…	…	…	…	…
	r	$2r(r-1)+1$	$4r(r-1)+1$	$6r(r-1)+1$	$8r(r-1)+1$	$10r(r-1)+1$
	$r=1$	1	1	1	1	1
	2	6	11	16	21	26
	3	16	31	46	61	76
$n=5$	4	31	61	91	121	151
	5	51	101	151	201	251
	…	…	…	…	…	…
	r	$5r(r-1)/2+1$	$5r(r-1)+1$	$15r(r-1)/2+$	$10r(r-1)+1$	$25r(r-1)/2+1$
	$r=1$	1	1	1	1	1
	2	7	13	19	25	31
	3	19	37	55	73	91
$n=6$	4	37	73	109	145	181
	5	61	121	181	241	301
	…	…	…	…	…	…
	r	$3r(r-1)+1$	$6r(r-1)+1$	$9r(r-1)+1$	$12r(r-1)+1$	$15r(r-1)+1$
…	…	…	…	…	…	…

(제k계 정n/k각형 도형수) 제k계 정n각형의 도형수는 ${}_kM_{(n,r)}=\frac{nkr(r-1)}{2}+1$ 이다.■



[그림 Ⅳ-11] 일반화(정7/3각형 3번째 도형수)

7. 볼록한 정다각형을 통한 오목한 정다각형 도출

중심도형수를 구하던 과정에서 서로 같은 도형수가 나오는 경우가 종종 발견된다. 왜 이러한 결과가 도출되었고, 이는 도형수가 나오는 도형끼리는 깊은 연관이 있을 것으로 생각하여 그에 관하여 탐구하게 되었다. 정다각형의 중점을 연결한 선에 대하여 대칭하여 나타나는 도형은 중심도형수가 바뀌지 않는다는 점에서 착안하여 처음 정다각형의 중점을 연결한 선을 기준으로 정다각형을 대칭시키게 되었고, 그 때 나타나는 도형이 마치 오목한 정다각형과 같았다. 따라서 그를 직접 기하프로그램을 이용하여 작도하여 내부에 나타나는 도형이 오목한 정다각형이라는 사실을 귀납적으로 유추하였고, 각을 이용하여 내부에 나타나는 도형이 오목한 정다각형이라는 것을 확인하였다. 그 확인과정은 다음과 같다.

첫째, 오목한 정n/k각형에서 특정 n값에서 만들어질 수 있는 오목한 정다각형의 개수를 정의하려 한다. 오목한 다각형이 만들어지는 조건은 $n>2k$를 만족해야 한다. 따라서 n값을 5부터 늘려가며 생성될 수 있는 오목한 다각형의 개수를 조사하였고, 그 결과는 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4> n에 따른 생성 가능한 오목한 정다각형의 개수

n	가능한 오목한 정다각형 개수	n	가능한 오목한 정다각형 개수
5	1	11	4
6	1	12	4
7	2	13	5
8	2	14	5
9	3	15	6
10	3	16	6

제시된 <표 Ⅳ-4>와 같이 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5와 같은 형식으로 나열되는 수열이 형성됨을 알 수 있다. 따라서 우리는 특정 n값에 대한 $n>2k$를 만족해야 하는 생성 가능한 오목한 정다각형 개수를 σ_n으로 정의하였다(단, k는 자연수, n은 5이상의 자연수). 이로부터 정n/k각형에서의 σ_n의 값을 구해 보면, σ_n이라는 수열은 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ⋯ 으로 나열된다. 따라서 n의 값을 홀수일 때와 짝수일 때로 구분하여 고찰할 수 있다. 먼저, n이 홀수일 때이다. k의 범위는 $2 \le k \le [\frac{n}{2}]$가 된다. 따라서 이를 만족하는 k의 개수는 $[\frac{n}{2}]-1$이 된다. n도 자연수이므로 $[\frac{n}{2}]-1$은 $(n-3)/2$으로 정의된다. n이 홀수이므로 n대신 $2m-1$을 대입하면 $m-2$라는 식이 도출된다(단, m은 3이상의 정수). 다음은 n이 짝수일 때이다. k의 범위는 $2 \le k < n/2$가 된다. 따라서 이를 만족하는 k의 개수는 $(n-4)/2$으로 정의된다. n이 짝수이므로 n대신 $2m$을 넣으면 $m-2$라는 식이 도출된다(단, m은 3이상의 정수). 따라서 n이 홀수일 때 σ_n과 σ_{n+1}이 같다는 걸 알 수 있고 n이 5이상의 정수일 때 σ_n과 σ_{n+2}는 1차이가 난다는 것을 알 수 있다. 따라서 $\sigma_5=1$이므로 σ_n이라는 수열은 1, 1, 2, 2, 3, 3, ⋯의 형태가 된다($n \ge 5$인 정수).

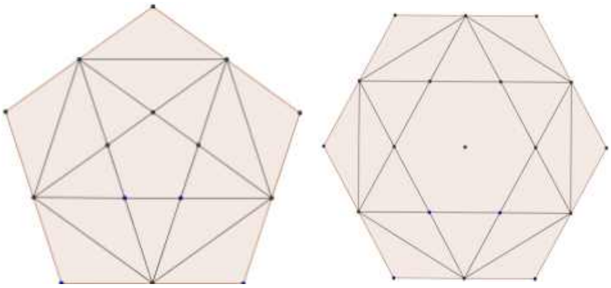
이제 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ⋯ 는 위에 제시한 2개의 수열의 합이라고 생각할 수 있다. 따라서 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ⋯ 를 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3 ⋯의 형태로 진행되는 공차가 1/2인 수열과 1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, ⋯ 형태로 진행되는 수열의 합으로 생각할 수 있다. 이때 각각의 수열을 p_n, q_n이라고 정의한다면 $p_n=1/2+(n-1)/2$, $q_n=\{1-(-1)^n\}/4$ 로 나타낼 수 있다. 따라서 σ_n은 p_n+q_n이므로 $\{2n+1-(-1)^n\}/4$이 된다.

(정n/k각형에서의 오목한 정다각형의 수) 정n/k각형에서의 σ_n의 값은 $\frac{2n+1-(-1)^n}{4}$이다.■

이번에는 종이접기를 통해 볼록한 정다각형과 오목한 정다각형 사이의 관련성을 탐색하였다. 이를 통해 두 도형의 일관성을 확인할 수 있다.

먼저 $n=5$일 때를 살펴보자. 제1계 정n각형의 한 내각의 크기는 ${}_1a_n=\frac{\pi(n-2)}{n}$이다. 그러면 [그림 Ⅳ-12]에서 접어서 생긴 두 도형은 합동이 되므로, 만나고 있는 큰 정다각형의 한 변과 작은 정다각형의 한 변이 이루고 있는 예각은 $\frac{\pi-{}_1a_5}{2}$이다. 따라서 위 그림에서 오목한 정다각형이라 추측되는 도형의 한 각의

크기는 ${}_1\alpha_5-(\pi-{}_1\alpha_5)=2{}_1\alpha_5-\pi$이다. 이 결과에 ${}_1a_5=\frac{3\pi}{5}$를 대입하면 일반식 $\frac{6\pi}{5}-\pi=\frac{1}{5}\pi$가 유도된다. 이는 정5/2각형의 한 내각의 크기와 동일하다.



[그림 Ⅳ-12] 접은 정5각형 [그림 Ⅳ-13] 접은 정6각형 [그림 Ⅳ-14] 접은 정8각형

두 번째, $n=6$일 때를 살펴보자. $n=5$일 때와 같은 방법으로 진행하게 되면 [그림 Ⅳ-13]에서 큰 정다각형의 한 변과 작은 정다각형의 한 변이 이루고 있는 예각은 $(\pi-{}_1a_6)/2$가 된다. 따라서 그림에서 오목한 정다각형이라 추측되는 도형의 한 각의 크기는 ${}_1a_6-(\pi-{}_1a_6)=2{}_1a_6-\pi$가 된다. 여기에 ${}_1a_6$의 값을 대입하면 $4\pi/3-\pi=\pi/3$가 유도된다. 이는 정6/3각형의 한 내각의 크기와 동일하다.

세 번째, $n=7$일 때를 살펴보자. $n=7$ 이후에 나오는 정다각형들은 모두 2번 이상 접을 수 있는 도형들이다. 따라서 $n=7$ 이후에 나오는 모든 정다각형들은 접은 횟수별로 나타나는 도형의 내각의 크기를 모두 구할 것이다. 우선 1번 접었을 경우에는 $n=6$일 때와 같은 방법을 사용하여 구하게 되면 $10\pi/7-\pi=3\pi/7$이라는 각의 일반식을 얻을 수 있다. 이와 같이 정n각형을 1번 접어서 나타난 오목한 정다각형이라 추측되는 도형의 한 내각을 $\beta_{1,n}$이라 하자. 그러면 $\beta_{1,7}$을 구하는 것과 같은 방법으로 $\beta_{2,7}$를 구하면 $\beta_{2,7}$의 값은 $\beta_{1,7}$을 구하는 과정에서 $(\pi-{}_1a_7)/2$대신 $\beta_{1,7}$을 대입한 것과 같으므로 ${}_1a_7-\pi+\beta_{1,7}$이라는 일반식이 얻어진다. 여기에 구한 값들을 모두 대입하면 $5\pi/7-\pi+3\pi/7=\pi/7$ 이다. 여기서 구한 $3\pi/7$과 $\pi/7$은 각각 정7/2각형의 한 내각과 정7/3각형의 한 내각의 크기와 같다는 것을 알 수 있다.

네 번째, $n=8$일 때를 살펴보자. [그림 Ⅳ-14]에서 $n=7$일 때와 같은 방법으로 증명을 하면 $\beta_{1,8}$은 $3\pi/2-\pi=\pi/2$가 되고, $\beta_{2,8}$은 $3\pi/4-\pi+\pi/2=\pi/4$가 된다. 여기서 구한 결과 값 $\pi/2$와 $\pi/4$는 정8/2각형과 정8/3각형의 한 내각의 크기와 동일하다는 것을 알 수 있다.

지금까지의 결과를 토대로 일반적으로 성립하는지 살펴보자. 위와 같은 탐구

과정으로 $\beta_{m,n}$의 일반식은 $(m+1)_n a_1 - m\pi$라고 추측할 수 있다. 만약 n이 1씩 더해진다면 $\beta_{m,n}$의 일반식에서 ${}_1a_n$대신 ${}_1a_{n+1}$을 대입하면 된다. 만약 m이 1씩 더해진다고 할 경우, 수학적 귀납법으로 이를 증명할 수 있다(단, $n > 2m$이다).

첫째, $m=1$일 때 볼록한 정다각형이므로 성립한다.

둘째, $m=l$일 때 성립함을 가정하면, $\beta_{l,n}=(l+1)_1a_n - l\pi$이다.

셋째, $m=l+1$일 때 성립하는지 확인해 보자.

$\beta_{l+1,n} = \alpha_n - (\pi - \beta_{l,n}) = \beta_{n,l} + \alpha_n - \pi = (l+1)\alpha_n - l\pi + {}_1a_n - \pi = (l+2)_1a_n - (l+1)\pi$

이다. 따라서 $m=l+1$일 때 성립하므로, m이 5이상의 정수 일 때, $\beta_{m,n}=(m+1)\alpha_n - m\pi$성립한다. 따라서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

(볼록 및 오목한 정다각형의 관계) 정n각형을 k번 접었을 때 나타나는 도형은 정$n/(k+1)$각형이다.■

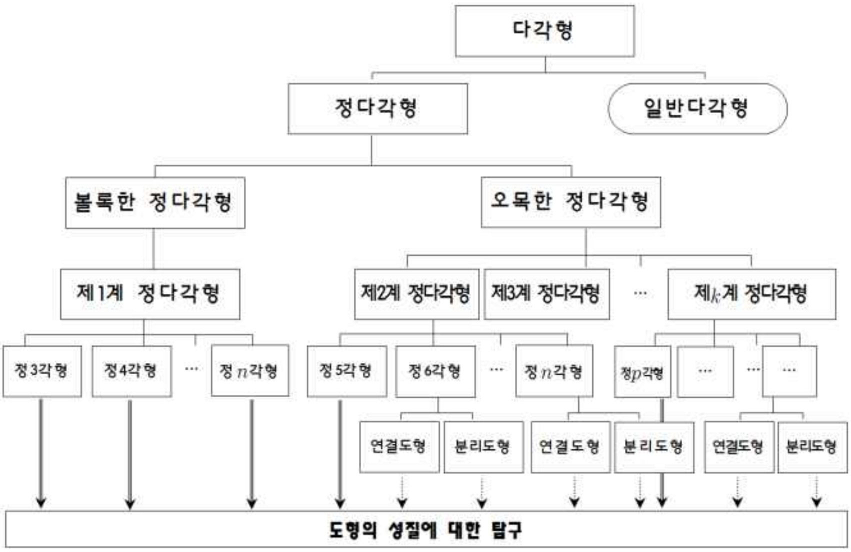
V. 결론

본 연구 활동은 오목한 정다각형의 존재에서부터 출발하였다. 오목한 정다각형은 볼록한 정다각형과는 달리 유리수 정다각형의 형태, 즉 정n/k각형이라는 모양을 지닌다. 볼록한 정다각형과 오목한 정다각형은 우리에게는 매우 익숙하지 않은 용어이었고, 지금까지 학교수학의 평면도형의 분류 체계에도 존재하지 않는 도형이었다. 현재 우리나라 학교수학에서 평면도형은 볼록한 도형만이 존재하고, 볼록한 평면도형은 삼각형, 사각형, 오각형, n각형, 원이라는 분류 체계만을 지니고 있지만 본 연구에서는 이러한 체계와 다른 새로운 분류체계를 재구조화할 수 있었다.

이러한 분류체계의 구조화를 위해서 정다각형과 관련된 다음과 같은 연구를 귀납적으로 수행하였다. 첫째, 내각의 크기의 합에 대한 연구를 진행하였다. 그 결과 제k계 정n각형의 전체 내각의 크기의 총합은 $\pi(n-2k)$이고, 한 내각의 크기는 ${}_ka_n = \pi(n-2k)/n$임을 확인하였다. 둘째, 외각의 크기의 합에 대한 연구를 진행하였다. 그 결과 제k계 정n각형의 전체 외각의 크기의 총합은 $2k\pi$이고, 한 외각의 크기는 $2k\pi/n$임을 확인하였다. 셋째, 제k계 정n각형이 존재하기 위한 조건으로 임의의 자연수 n,k에 대하여 $n/2 > k$임을 확인하였다. 넷째, 한 변의 길이가 고정될 때, 제k계 정n각형의 넓이(${}_kS_n$)에 대한 일반화 공식을 확인하였다. 즉, ${}_nS_k = nr^2\cos\frac{k\pi}{n}(\sin\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{n}\tan\frac{(k-1)\pi}{n})$이다(단, r은 외접원의 반지름). 다섯째, 제k계 정n각형을 기하 적으로 표현한 중심도형수(${}_kM_{(n,r)}$)에 대한 일반화된

공식을 확인하였다. 즉, ${}_kM_{(n,r)} = nkr(r-1)/2 + 1$ 이다. 여섯째, 제1계 정n각형을 기저로 하여 제k계 정n각형을 생성하는 생성원리를 확인하였고, 또한 대칭성을 이용하여 이들 사이의 관련성을 귀납적으로 확인하였다.

이러한 연구수행을 통해 정다각형의 기존 체계를 기반으로 [그림 Ⅴ-1]과 같이 체계적으로 재구조화할 수 있었다. 지금까지 다각형의 분류는 볼록과 오목으로 이원화되었고, 볼록은 삼각형, 사각형, 오각형, …, n각형 등 다각형의 변의 개수 관점에서 분류가 이루어졌다. 하지만 이번의 연구를 통해 다각형을 정다각형과 일반다각형(정다각형이 아닌 경우)으로 구분할 수 있는데, 이러한 방법은 유리수를 정수와 정수가 아닌 유리수로 이원화하는 것과 동일한 사고패턴이다. 또한, 정다각형은 볼록한 정다각형과 볼록하지 아닌 오목한 정다각형으로 이원화할 수 있다. 이러한 기초적인 분류를 기반으로 각각의 정다각형들은 제1계 정다각형, 제2계 정다각형, …, 제k계 정다각형으로 세분화하였고, 이러한 세분화는 또한 한붓그리기가 가능한 연결도형과 한붓그리기가 불가능한 연결되지 않은 분리도형으로 분류할 수 있다(서보억, 2012). 이러한 체계적인 재분류를 바탕으로, 학교수학에서 정다각형에 대한 탐구는 이에 속하는 구체적인 도형들의 성질을 탐구하는 것으로 결론을 내릴 수 있다.



[그림 Ⅴ-1] 학교수학에서 정다각형의 재구조화

참 고 문 헌

[1] 교육과학기술부(2011). 2009개정 수학과 교육과정, 교육과학기술부.

[2] 교육부(2015a). 초등학교 수학3-1, 교육부.
[3] 교육부(2015b). 초등학교 수학3-2, 교육부.
[4] 교육부(2015c). 초등학교 수학4-1, 교육부.
[5] 교육부(2015d). 초등학교 수학4-2, 교육부.
[6] 김민석(2004). 종이 띠에 의한 정다각형, 정별다각형 접기. 제주대학교교육과학연구소 백록논총, 6(2), pp.125-143.
[7] 김석룡(1989). 종이접기에 의한 정다각형의 작도. 경상대학교 교육대학원 석사학위논문.
[8] 김용운(2010). 수학사대전, 경문사.
[9] 김원경, 조민식, 방금성, 김수미, 배수경, 오혜정, 지은정, 최형권, 황정하(2015a). 중학교 1학년 수학, ㈜비상교육.
[10] 김원경, 조민식, 방금성, 김수미, 배수경, 오혜정, 지은정, 최형권, 황정하(2015b). 중학교 2학년 수학, ㈜비상교육.
[11] 김원경, 조민식, 방금성, 김수미, 배수경, 오혜정, 지은정, 최형권, 황정하(2015c). 중학교 3학년 수학, ㈜비상교육.
[12] 김진호, 김용대, 서보억(2011). 3대 작도 문제 해결을 위한 곡선과 기구, 교우사.
[13] 박교식(2004). 도형에 대응시킨 수, 경문사.
[14] 박한식(1991). 교직수학. 대한교과서주식회사.
[15] 서보억(2012). 기하프로그램을 활용한 정다각형 외연의 확장에 대한 연구, 한국학교수학학회 논문집, 15(1), 183-197.
[16] 이종우(2002). 기하학의 역사적 배경과 발달, 경문사.
[17] 조인주(2006). 정다각형에서 대각선 길이간의 관계 탐구. 전남대학교 교육대학원 석사학위논문.
[18] 한인기(2008). 자와 컴퍼스의 방법에 제시된 정다각형의 작도 방법 연구. 한국수학사학회지, 제21권2호, 119-134.
[19] 한인기(2003). 교사를 위한 수학사, 교우사.
[20] Boyer, C. B. & Merzbach, U. C.(1991). A History of Mathematics, John Wiley & Sons, Inc.
[21] Coxeter, H. S. M. (1973). Regular polytopes. NY: Dover Publication, Inc.
[22] Dresden, A. (trans.Van der Waerden. B. L.)(1963). Science Awakening, Science Editions.
[23] Euclid(2003). Euclid's Elements: All thirteen books complete in one volume, Green Lion Press.
[24] Eves, H.(1962). An Introduction to the History of Mathematics, Harcourt Brac.
[25] Grünbaum, B.(2003). Are your polyhedra the same as my polyhedra?. In B. Aronov , S. Basu, J. Pach, & M. Sharir (Eds), Discrete and Computational Geometry (pp. 461-488). NY: Springer.
[26] Heath, T. L.(1952). The thirteen books of Euclid's elements. London, Cambridge University Press.
[27] Heath, T. L.(2008a). A history of Greek mathematics (Vol. 1), Adamant Media Corporation.
[28] Heath, T. L.(2008b). A history of Greek mathematics (Vol. 2), Adamant Media Corporation.

[29] Klein, J.(1968). Greek mathematical thought and the origin of algebra, Dover Publications, Inc.
[30] Kline, M.(1972). Mathematical thought from ancient to modern times: Volume1, Oxford University Press.
[31] Lambert, L. J.(1906). The educational significance of sixteenth century arithmetic, Columbia University.
[32] Lucas, N. H., Phillip, S. J. & Jack, D. B.(1988). The Historical Roots of Elementary Mathematics, Dover Press.
[33] Smith, D. E.(1958). History of Mathematics, Dover Press.

Hong, Dong Hwa
Changwon Science High School
Changwon, 641-500, Republic of Korea
e-mail: ace4one@naver.com

Suh, Bo Euk[2)]
Chungnam National University
Dajeon, 305-764, Republic of Korea
e-mail: eukeuk@cnu.ac.kr

Park, Eun Ik
Changwon Science High School
Changwon, 641-500, Republic of Korea
e-mail: parkeunik@naver.com

Yoo, Seong Hoon
Changwon Science High School
Changwon, 641-500, Republic of Korea
e-mail: shyoo902@naver.com

Choi, Eun Seo
Changwon Science High School
Changwon, 641-500, Republic of Korea
e-mail: cys32@naver.com

---

2) Corresponding Author