East Asian Math. J.
Vol. 31 (2015), No. 4, pp. 459-481
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2015.035

피타고라스 정리의 유클리드 증명에 관한 일반화

A study on the generalization for Euclidean proof of the Pythagorean theorem

정영우, 김부윤*, 김동영, 류동민, 박주형, 장민제

ABSTRACT. In this study, we investigated whether the theorem is established even if we replace a 'square' element in the Euclidean proof of the Pythagorean theorem with different figures. At this time, we used different figures as equilateral, isosceles triangle, (mutant) a right triangle, a rectangle, a parallelogram, and any similar figures.

Pythagorean theorem implies a relationship between the three sides of a right triangle. However, the procedure of Euclidean proof is discussed in relation between the areas of the square, which each edge is the length of each side of a right triangle. In this study, according to the attached figures, we found that the Pythagorean theorem appears in the following three cases, that is, the relationship between the sides, the relationship between the areas, and one case that do not appear in the previous two cases directly. In addition, we recognized the efficiency of Euclidean proof attached the square.

This proving activity requires a mathematical process, and a generalization of this process is a good material that can experience the diversity and rigor at the same time.

Ⅰ. 서 론

피타고라스 정리는 직각삼각형에서 빗변의 길이의 제곱은 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합과 같다는 것이다. 즉, 이 정리는 직각을 낀 두 변 각각을 한 변으로 하는 두 개의 정사각형의 넓이의 합이 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같다는 것이다. 실제로 고대 이집트나 중국에서는 길이의 측량과 관련하여 피타고라스 정리를 사용하고 있으며, 유클리드의 <원론>에 나오는 피타고라스 정리의

* 교신저자
Received July 15, 2015; Accepted August 24, 2015.
2010 Mathematics Subject Classification: 97C30, 97D50
Key Words: 피타고라스 정리, 피타고라스 정리 증명의 일반화, 유클리드적 증명

©2015 The Youngnam Mathematical Society
(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

증명에서는 넓이 개념을 사용하고 있다.

피타고라스 정리는 학교수학에서 중요한 수학적 개념의 하나로, 삼각형의 변의 길이와 각의 크기와의 관계, 평면에서의 거리, 공간에서의 거리, 정삼각형의 넓이, 정사면체의 부피, 정사각뿔의 부피, 원뿔의 부피, 무리수의 발견 등 많은 학교수학의 내용들과 관계가 있다. 더불어 피타고라스 정리의 증명도 다양하게 이루어지고 있는데, 피타고라스 정리를 증명하는 방법은 닮은 직각삼각형의 변의 길이 사이의 비례관계를 이용하는 대수적인 증명법, 넓이의 비교를 통한 기하학적인 증명법, 벡터를 이용한 증명법, 힘의 개념을 이용하는 동역학적인 증명법 등(우정호, 2010) 370여 가지를 넘어서고 있다(E. S. Loomis, 1968). 따라서 피타고라스 정리와 증명에 대한 다양한 관점에서의 접근은 피타고라스 정리의 깊이 있는 이해와 통찰에 도움을 줄 수 있으며, 나아가 관련된 학교수학을 학습하는데 도움이 될 것이다.

그런데 피타고라스 정리를 증명하기 위한 다양한 증명법과 함께 유클리드의 증명에서와 같이 정사각형을 붙이지 않더라도 - 즉, 닮음인 다른 도형을 붙이더라도 - 피타고라스 정리가 성립한다는 것이 알려져 있다(우정호, 2010; Brown & Walter, 2005). 그러나 결과론적으로 일반적인 닮음 도형에 대한 증명만이 소개되고 이외에 다른 닮음인 도형들 각각에 대한 증명은 소개되어 있지 않다. 물론 수학적으로 일반적인 것에서 성립하면 그 범주의 구체적인 것에서 성립하는 것은 당연하지만, 교육적인 관점에서는 붙이는 도형의 모양에 따른 증명들을 경험함으로써 다양한 증명법 또는 일반화 과정에서의 경험, 그리고 대표적인 증명법에 대한 탐구와 이해를 경험할 수 있어 문제해결능력, 추론능력, 의사소통능력의 신장에 도움이 된다. 특히 2009 개정 수학과 교육과정(2011)에서는 이러한 능력들을 '수학적 과정'이라 하여 강조하고 있다.

따라서 본 연구에서는 피타고라스 정리의 증명에 대한 관점의 다양성이 아니라 유클리드의 증명법을 기초로 하여 붙이는 도형의 다양성을 추구하고, 이들 대상에 대한 다양한 증명활동을 통해 유클리드 증명법에서 정사각형을 사용하는 수학적 의미에 대해 생각해 본다. 그러므로 연구과제는 다음과 같이 설정하였다.

1. 직각삼각형의 각 변 위에 닮음인 다각형과 반원을 붙였을 때 피타고라스 정리가 성립하는지 알아본다.
2. 직각삼각형의 각 변 위에 임의의 닮음인 도형을 붙였을 때 피타고라스 정리가 성립하는지 알아본다.
3. 이 증명 활동이 가지는 의의를 생각해 본다.

여기에서 <연구과제 1>은 구체적 사례에 대한 것이며, <연구과제 2>는 일반화이며, <연구과제 3>은 유클리드 증명법의 의의와 가치에 대한 것이다. 실제로 이 활

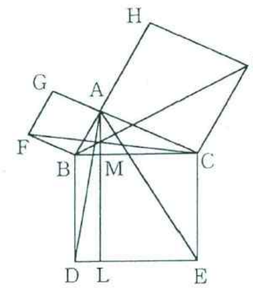
동에서 중요한 사실은 '닮음'이라는 조건이 반드시 필요하며, '빗변 위에 붙인 도형의 넓이는 다른 두 닮음인 도형의 넓이의 합이 됨을 보여야 한다.'는 것이 도달점이라는 것이다. 또한 접근방법이 일반화된 사실로부터 구체적인 사실을 확인하는 것이 아니라, 구체적인 예들을 증명하는 과정에서 닮음이라는 조건의 필요성을 인식하고, 일반화된 도형으로 정리가 성립하는지 증명을 확장해 가는 것이다.

Ⅱ. 피타고라스 정리의 증명에 관한 이론적 배경

1) 피타고라스 정리에 대한 유클리드의 증명

피타고라스 정리의 증명에 관한 최초의 기록은 유클리드의 <원론> 제1권 명제 47에 나온다. 그 내용은 다음과 같다(이무현, 1997a)[2].

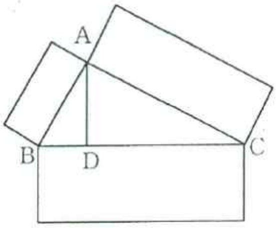
법칙 47
직각삼각형에서 직각과 마주 보는 변을 가지고 정사각형을 만들면, 그 정사각형은 다른 변들을 가지고 만든 정사각형들을 더한 것과 넓이가 같다.



명제47의 증명은 작은 정사각형 두 개로 직사각형 두 개를 만들고 이들이 다시 커다란 정사각형을 이루도록 하는 순서로 이어지는 퍽 일반적이고도 기하학적인 것이다(이상원, 2002). 즉, 유클리드는 등적변환을 반복 사용하여 이를 보이고 있다. 이 때 얻어진 정사각형의 넓이 관계는 그대로 주어진 직각삼각형의 변의 길이 관계로 해석되어진다. 하지만 유의해야 할 점은 이 증명에서의 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$는 넓이 관계이며, 단지 직각삼각형의 길이 관계로 해석될 수 있다는 것이다. 한편, <원론> 제6권에는 삼각형을 직각삼각형으로 하고 변 위에 정사각형 대신에 다른 도형으로 바꾸었을 때에 대한 내용이 실려 있다. 그 내용은 다음과 같다(이무현, 1997b).

2) 일반적으로 '명제'라는 용어를 많이 쓰나 참고한 문헌에서는 '법칙'이라는 용어를 사용하고 있다. 여기서는 내용을 인용하는 상황이므로 그대로 사용한다.

법칙 31
직각삼각형의 세 변에다 닮은꼴인 도형들을 그려 놓았다고 하자. 그러면 직각과 마주보는 변에 놓인 도형은 직각을 끼고 있는 두 변에 놓인 도형들을 더한 것과 넓이가 같다.



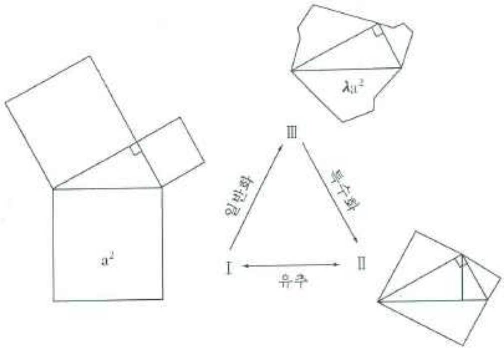
이 증명에는 피타고라스 정리가 사용되지 않는다. 그러므로 이 증명을 먼저 다룬다면 피타고라스 정리는 이 내용의 특수한 경우가 된다.

2) 피타고라스 정리 증명의 일반화에 대한 폴리아의 증명

<원론> 제6권에 소개된 피타고라스 정리의 증명에서와 같이, 직각삼각형의 각 변에 정사각형이 아닌 도형을 그리더라도 정리가 성립함을 알 수 있다. 폴리아는 피타고라스 정리에 대한 유추를 통한 다음과 같은 우아한 증명과정을 제시하고 있다(우정호, 2010).

빗변의 길이가 a이고 다른 두 변의 길이가 b, c인 그림의 Ⅰ과 같은 직각삼각형에서 $a^2=b^2+c^2$임을 증명하고자 한다.

증명의 요지는 먼저 그림에서 Ⅰ과 Ⅱ 사이의 유추적 관계에 주목하고 이를 일반화하여 Ⅲ에 이르러 보다 더 일반적인 정리 곧, “직각삼각형의 각 변 위에 닮은 다각형을 그리면 빗변 위에 그린 다각형의 넓이는 다른 두 다각형의 넓이의 합과 같다”는 정리를 증명하는 것이다.



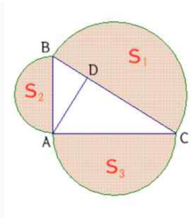
그림의 Ⅰ에서 빗변 위에 그린 정사각형의 넓이는 a^2이므로 그림 Ⅲ에서 빗변 위에 그린 다각형의 넓이는 λa^2이라고 놓을 수 있다. 그런데 그림의 Ⅰ과 Ⅲ에서 세 정사각형과 세 다각형은 각각 닮았으며 닮음비는 같으므로, 세 다각형의 넓이는 각각 λa^2, λb^2, λc^2이다. 그런데

$$a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow \lambda a^2=\lambda b^2+\lambda c^2$$

이다. 여기서 피타고라스 정리를 일반화한 정리, 곧 “직각삼각형의 각 변 위에 닮은 다각형을 그리면 빗변 위에 그린 다각형의 넓이는 다른 두 다각형의 넓이의 합과 같다”는 그 특수한 경우인 피타고라스 정리와 동치이며, 나아가 다른 어떤 특수한 경우와도 동치임을 알 수 있다. 따라서 어떤 특수한 경우가 성립하면 일반적인 정리도 성립한다. 그런데 그림의 Ⅱ에서 빗변 위에 그린 삼각형의 넓이는 나머지 변 위에 그린 두 삼각형의 넓이의 합과 같으므로, 결국 피타고라스 정리를 일반화한 정리, 따라서 피타고라스 정리는 증명되었다.

하지만 과연 이것으로 증명이 된 것일까? 실제로 이 문장들은 비약적이다. 어느 하나의 구체적인 경우가 증명되어야만 나머지 경우로 일반화 될 수 있어, 결국은 어떤 특수한 경우의 피타고라스 정리의 증명이 전제조건으로 필요해진다. 즉, 각 도형들의 경우를 출발점으로 직접적으로 피타고라스 정리를 증명하는 것이 아닌, 기존의 증명 결과를 이용하여 일반화하고 있다. 더구나 여기서는 ‘다각형’이 아닌 임의의 도형에 대한 언급도 없다. 그리고 유추에 의한 것은 발견적 수단으로써는 의미가 있지만 그 자체가 수학적 명제의 근거가 될 수는 없다. 따라서 구체적인 증명 활동을 통한 확인 과정이 필요하다. 폴리아의 증명으로 알려진 내용을 살펴보자[3].

$\angle A$가 직각인 $\triangle ABC$를 그리고, 각 변 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위에 서로 닮음인 도형을 그리자. 점 A에서 변 $\overline{BC}$에 수선 $\overline{AD}$를 그리면, $\triangle ABC$, $\triangle DBA$, $\triangle DAC$는 서로 닮음이다. 그리고 $\triangle ABC$와 $\triangle DBA$가 닮음이므로 $\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BD}$이다.



$$\therefore \ \overline{BD} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}}$$

그런데 $\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{BC} : \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}} = \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$

$= \lambda \overline{BC}^2 : \lambda \overline{AB}^2 = S_1 : S_2$이다.

($\because$ 빗변 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 $\overline{BC}^2$이므로 빗변 $\overline{BC}$ 위에 그린 도형의 넓이는 $S_1 = \lambda \overline{BC}^2$라고 놓을 수 있다.)

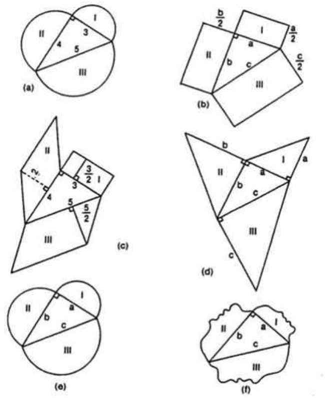
따라서 $\overline{BC} : \overline{BD} = S_1 : S_2$이다. 마찬가지로 $\triangle ABC$와 $\triangle DAC$는 닮음이므로 $\overline{BC} : \overline{DC} = S_1 : S_3$이다. 그런데 $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$이므로 $S_1 = S_2 + S_3$이다.

3) http://blog.naver.com/PostView.nhn?blogId=hksteven&logNo=70158207535

이 증명에서는 $S_1 : S_2 = \overline{BC} : \overline{BD}$, $S_1 : S_3 = \overline{BC} : \overline{DC}$와 같이 넓이의 비가 길이의 비로 바뀌므로 변의 길이 관계인 $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$를 이용하여 넓이 관계 즉, $S_1 = S_2 + S_3$를 유도하고 있다. 그리고 이 증명에서는 각 넓이 계산을 구체적으로 해야만 피타고라스 정리가 확인된다.

유클리드나 폴리아의 증명에서와 같이 피타고라스 정리 증명의 일반화는 길이 관계가 아닌 넓이 관계이며, 그 결과를 재해석하는 과정을 거쳐 피타고라스 정리와 관련 지어진다.

3) 브라운과 월터의 문제제기



브라운과 월터(Brown & Walter)는 저서 <The Art of Problem Posing>에서 문제제기 전략을 설명하면서 그 예로 피타고라스 정리의 증명을 다루고 있다. 그들은 '정사각형'이란 속성을 부정하는 예로 반원, 평행사변형, 직사각형, 직각삼각형, 임의의 닮음인 도형의 경우를 생각할 수 있다고 하였다. 하지만 원 문제로 피타고라스 정리의 증명을 학습한 후, 다양한 속성 중 '정사각형'이란 속성을 부정만 했을 뿐, 이를 반영한 문제 만들기 예시는 제시하고 있지 않아 문제 풀이(증명) 활동은 이루어지지 않고 있다. 그러나 원문제가 피타고라스 정리의 증명이었으므로 이에 준하여

"주어진 직각삼각형에 (닮음인) ○○도형을 붙였을 때 피타고라스 정리가 성립함을 증명하시오."

를 문제로 설정할 수 있다. 그러나

"주어진 직각삼각형에 (닮음인) ○○도형을 붙였을 때 작은 두 도형의 넓이의 합이 큰 도형의 넓이와 같음을 증명하시오."

의 경우는 조금 다른 문제가 된다. 즉, 이 문제를 피타고라스 정리를 활용하는 문제로 다룬다면 아주 간단히 증명할 수 있지만, 피타고라스 정리를 증명하라는 앞의 문제로 해석한다면 피타고라스 정리를 사용할 수 없으며, 임의의 닮음인 도형의 경우까지 생각한다면 피타고라스 정리 증명의 일반화가 된다. 따라서 피타고라스 정리의 증명을 위한 다른 예가 된다.

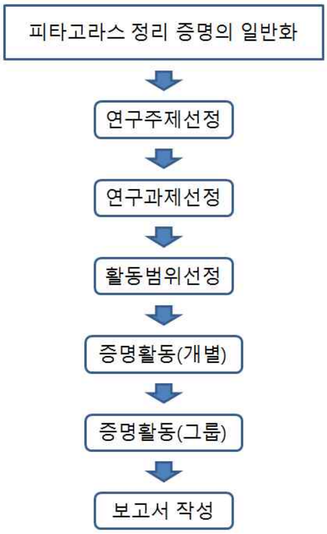
Ⅲ. 연구방법 및 절차

본 연구는 2014년 해운대고등학교 1학년 R&E(Research and Education)에서 ‘피타고라스 정리 증명의 일반화’란 주제로 연구한 것을 참여 했던 학생들이 심화 、보충한 것이다.

연구과정은 먼저, 지도교수가 제시한 브라운과 월터의 <The Art of Problem Posing>에 나오는 피타고라스 정리에 관한 예시를 통해 각 경우에 대한 증명이 필요함을 인식하고, 토론을 통하여 연구 주제를 다음과 같이 설정하였다.

> <주제> 주어진 직각삼각형에 (닮음인) ○○도형을 붙였을 때 작은 두 도형의 넓이의 합이 가장 큰 도형의 넓이와 같음을 증명하시오(단, 피타고라스 정리는 아직 발견되지 않은 것으로 한다).

따라서 이 문제의 해결 과정은 붙인 도형 각각에 대한 피타고라스 정리의 증명 활동이 된다. 더불어 이 문제해결 활동의 또 다른 의의는 유클리드 <원론>에서와 같이 정사각형을 붙이는 것이 왜 유용한가에 대해 생각하는 것이다. 즉, 증명 수단 및 소재의 적절성과 의의를 생각해 보는 것이다. 그리고 앞에서 밝힌 세 가지 연구 과제를 설정하였다. 다음으로 피타고라스 정리 증명의 일반화를 위해 정사각형 대신 붙일 수 있는 도형을 의논하고, 그 대상으로 <삼각형류>로는 정삼각형, 이등변삼각형, (이변)직각삼각형을 선정하였으며, 이등변삼각형과 (이변)직각삼각형의 경우는 각 높이를 각 밑변 길이의 실수배로 하였다. <사각형류>로는 직사각형, 평행사변형을 선정하였다. 이때 높이는 직각삼각형의 각 변 길이의 실수배로 하였다. 또한 반원과 임의의 도형을 선정하였다. 임의의 도형은 증명의 일반화에 대한 시도 과정에서 나온 것이며, 여기서 실수배를 한 것은 직각삼각형의 각 변에 붙이는 도형이 ‘닮음’이기 때문이다.



[그림 1] 연구과정

처음 피타고라스 정리의 증명에 대한 자주적이고 창의적인 증명활동을 위하여 유클리드의 증명은 소개하였으나, <원론> 제6권의 내용과 폴리아의 증명은 소개하지 않았다. 연구과제와 대상을 선정한 후 개별적으로 증명활동을 하였으며, 이후 토론을 통하여 각자의 증명을 공동으로 수정、보완하였다. 연구기간은 2014년 5월

부터 11월까지로 월 1회 정도의 그룹 활동과 과제해결 및 보고서 작성을 위한 개별 활동이 이루어졌다.

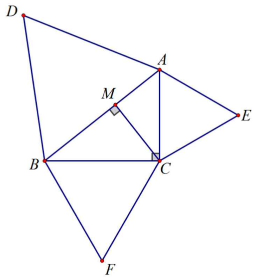
한편 R&E활동의 종료 후에도 보다 다양한 증명의 탐구와 보고서의 증명들에 대한 정교화 작업이 자발적으로 이루어졌다.

Ⅳ. 연구결과

1) 삼각형류의 증명

$\boxed{1}$ 정삼각형을 이용한 증명

<증명 가-$\boxed{1}$-1> $\angle C$를 90°로 하는 $\triangle ABC$에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 정삼각형 ABD, ACE, BCF를 그리고, $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$라 한다. 이제, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$임을 보이자.



점 C에서 변 AB에 수선을 내리고 만나는 점을 M, $\overline{BM}=x$, $\overline{AM}=y$라 한다. 그러면

$$\triangle ACB \sim \triangle AMC$$

이다. ($\because$ $\angle A$는 공통, $\angle ACB=\angle AMC=90^\circ$)

따라서 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AM}$이다. 즉, $c:b=b:y$이고,

$$b^2=cy \quad \cdots\cdots \quad ①$$

이다. 그리고

$$\triangle ACB \sim \triangle CMB$$

이다($\because$ $\angle B$는 공통, $\angle ACB=\angle CMB=90^\circ$). 따라서 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{BM}$이다. 즉, $c:a=a:x$이고,

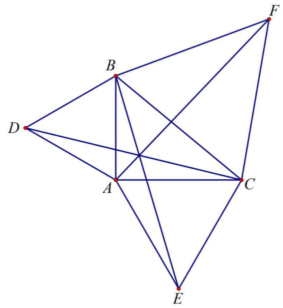
$$a^2=cx \quad \cdots\cdots \quad ②$$

이다. 그리고

$$x+y=c \quad \cdots\cdots \quad ③$$

이므로 ①, ②, ③에 의해 $a^2+b^2=cx+cy=c(x+y)=c^2$이다. 그러므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$ 이다. 따라서 작은 두 정삼각형의 넓이의 합은 가장 큰 정삼각형의 넓이와 같다.

<증명 가-1-2> $\angle A$를 90°로 하는 $\triangle ABC$에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 정삼각형 ABD, ACE, BCF를 그리고, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하자. 이제, $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$임을 보이자.



$$\triangle DBC \equiv \triangle ABF$$

$(\because \overline{BC}=\overline{BF},\ \overline{BD}=\overline{AB},\ \angle ABF=\angle DBC)$

$$\triangle AFC \equiv \triangle EBC$$

$(\overline{AC}=\overline{CE},\ \overline{CF}=\overline{BC},\ \angle ACF=\angle ECB)$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\triangle ABF &= \triangle DBC \\ &= \triangle ABD + \triangle ABC - \triangle DAC \quad \cdots\cdots \text{①} \\ \triangle AFC &= \triangle EBC \\ &= \triangle ACE + \triangle ABC - \triangle ABE \quad \cdots\cdots \text{②}\end{aligned}$$

이다. 또한

$$\triangle ABE \equiv \triangle DAC\,(\overline{AB}=\overline{AD},\ \overline{AE}=\overline{AC},\ \angle BAE=\angle DAC)$$

이다. $\triangle ABF+\triangle AFC=\triangle BCF+\triangle ABC$이므로 ①, ②에 의하여

$$\triangle BCF+\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACE+2\triangle ABC-2\triangle ABE$$

이다. 즉,

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{1}{2}bc=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+bc-2\times\frac{1}{2}bc\sin 150^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

이다. 따라서 $a^2=b^2+c^2$이다.

<증명 가-1-3> $\overline{AB}$가 빗변인 직각삼각형 ABC에 각 변을 밑변으로 정삼각형 ABD, ACE, CBF을 그린다. 그리고 $\overline{AC}$에 평행하고 점 E를 지나는 직선을 l, $\overline{BC}$에 평행하고 점 F를 지나는 직선을 m이라 하자. 그러면 두 직선은 직교한다. 직선 l과 m의 교점을 G라 하고, 점 G와 점 C를 잇자. 그러면 $\triangle ACE$의 넓이는 $\triangle ACG$의 넓이와 같고, $\triangle BCF$의 넓이는 $\triangle BCG$의 넓이와 같다. 이제 점 C에서 직선 l, m 에 내린 수선의 발을 각각 L, M이라 하고, 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 N이라 하자. 그리고 $\overline{BC}=a$,

$\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$라 하면, $\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{GM} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$, $\overline{DN} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$이다.

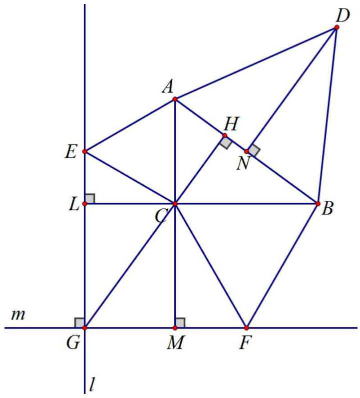
여기서

$$\overline{CM} : \overline{GM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a : \frac{\sqrt{3}}{2}b = a : b = \overline{BC} : \overline{AC} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

이고,

$$\angle\, GMC = 90^\circ = \angle\, ACB \quad \cdots\cdots \quad ②$$

이다. ①과 ②에 의하여 $\triangle GCM \backsim \triangle ABC$이다. 따라서 $\overline{GC} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$이다.



이제, $\overline{BC}$를 연장한 직선을 x축, $\overline{AC}$를 연장한 직선을 y축이라 하자. 그러면 점 B는 $(a, 0)$, 점 A는 $(0, b)$이고, 점 M은 $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}a)$, 점 L은 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}b, 0)$이다. 따라서 $\overline{AB}$를 포함하는 직선은 $y = -\frac{b}{a}x + b$이다. 또한 $\overline{CG}$를 포함하는 직선은 $y = \frac{a}{b}x$이다. 이 두 직선은 직교하므로 $\overline{AB}$와 $\overline{CG}$의 연장선은 직교한다. 이때 직교하는 점을 H라 하고, $\overline{CH}$의 길이를 h라 하자. 그러면

$$\triangle ABG = \triangle ACG + \triangle BCG + \triangle ACB$$

이므로

$$\frac{1}{2}c \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c + h\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{1}{2}ch$$

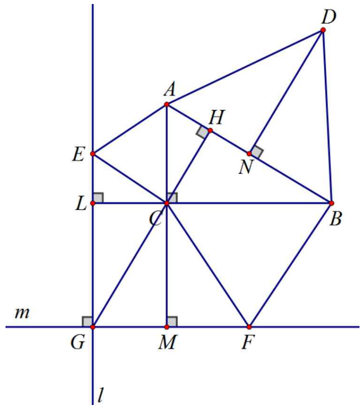
가 성립한다. 식을 정리하면 $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$이고, $c^2 = a^2 + b^2$이다.

2 이등변삼각형을 이용한 증명

<증명 가-2-1> $\overline{AB}$가 빗변인 직각삼각형 ABC에서 각 변을 밑변으로 하는 밑변과 높이의 비가 $1 : k$인 이등변삼각형을 그리고, 각 꼭짓점을 그림과 같이 D, E, F라 두자. 그리고 $\overline{AC}$에 평행하고 점 E를 지나는 직선을 l, $\overline{BC}$에 평행하고 점 F를 지나는 직선을 m이라 하자. 그러면 두 직선 l, m은 직교한다. 한편, 직선 l과 m의 교점을 G라고 하고, 점 G와 점 C를 잇자. 그러면

$\triangle ACE$의 넓이는 $\triangle ACG$의 넓이와 같고, $\triangle BCF$의 넓이는 $\triangle BCG$의 넓이와 같다. 이제, 점 C에서 직선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 L, M이라 하고, 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 N이라 하자. 그리고 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면 $\overline{CM}=ak$, $\overline{GM}=bk$, $\overline{DN}=ck$이다. 따라서

$$\overline{CM}:\overline{GM}=ak:bk=a:b=\overline{BC}:\overline{AC} \quad \cdots\cdots ①$$



이고

$$\angle GMC=90^\circ=\angle ACB \quad \cdots\cdots ②$$

이다. ①과 ②에 의하여 $\triangle GCM \sim \triangle ABC$이다. 따라서 $\overline{GC}=ck$ 이다.

이제, $\overline{BC}$를 연장한 직선을 x축, $\overline{AC}$를 연장한 직선을 y축이라 하자. 그러면 점 B는 $(a,\ 0)$, 점 A는 $(0,\ b)$이고, 점 M은 $(0,-ak)$, 점 L은 $(-bk,\ 0)$이다. 따라서 $\overline{AB}$를 포함하는 직선은 $y=-\frac{b}{a}x+b$이다. 또한 $\overline{CG}$를 포함하는 직선은 $y=\frac{a}{b}x$이다. 두 직선은 직교하므로 $\overline{AB}$와 $\overline{CG}$의 연장선은 직교한다. 이때, 직교하는 점을 H라 하고, $\overline{CH}$의 길이를 h라 하자.

$$\begin{aligned}\triangle ABG &= \triangle ACG+\triangle BCG+\triangle ACB\\ &= \triangle ACE+\triangle BCF+\triangle ACB\end{aligned}$$

이므로 $\frac{1}{2}c(ck+h)=\frac{1}{2}b^2k+\frac{1}{2}a^2k+\frac{1}{2}ch$이다. 식을 정리하면 $\frac{1}{2}c^2k=\frac{1}{2}a^2k+\frac{1}{2}b^2k$이다. 따라서 $c^2=a^2+b^2$이다.

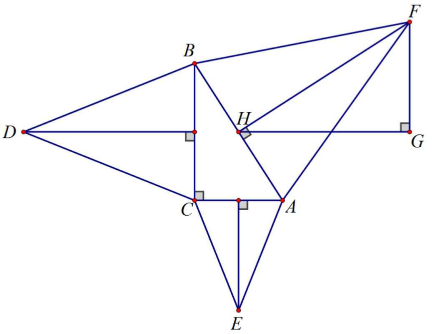
<증명 가-$\boxed{2}$-2> 각 C가 직각인 직각삼각형 ABC의 각 변에 밑변과 높이의 비가 $1:k$인 서로 닮음인 이등변삼각형을 그리고, 각 꼭짓점을 그림과 같이 각각 D, E, F라 한다. 또한, 직각삼각형 ABC의 각 변의 길이를 a, b, c라 하고, 점 D, E, F에서 선분 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$에 그은 수선의 길이를 a', b', c'라 한다. $\overline{AC}$와 평행하고 $\overline{AB}$의 중점을 지나는 직선과 $\overline{BC}$와 평행하고 점 F를 지나는 직선의 교점을 G라 하고, $\overline{AB}$의 중점을 H라 하면, 직각삼각형 FHG는 직각삼각형 ABC와 닮음이다. 왜냐하면, $\angle BCA=\angle HGF=90^\circ$이고, $\angle GHA=\angle CAB$이며, $\angle CBA+\angle CAB=90^\circ=\angle GHA+\angle GHF$이므로 $\angle CBA=\angle GHF$이다. 따라서 $c'=ck$라 둘 수 있다. 그러므로 직각삼각형

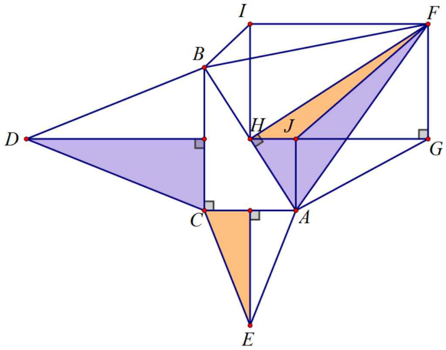
ABC와 닮음인 직각삼각형 FHG의 길이 비는 $a:b:c = a':b':c' = ak:bk:ck$이다.

한편, $\overline{HG}$와 평행하고 점 F를 지나는 직선과 $\overline{FG}$와 평행하고 점 H를 지나는 직선의 교점을 I라 하고, 점 A에서 $\overline{HG}$에 내린 수선의 발을 점 J라 하자. $\overline{BC}$의 중점을 K, $\overline{AC}$의 중점을 L이라 하면, $\triangle DKC = \triangle HGA$이다($\because$ $\overline{DK} = \overline{HG} = a'$, $\overline{KC} = \overline{JA}$). 마찬가지로 $\triangle CLE = \triangle JHI$이다. 그리고 $\overline{HG} \parallel \overline{IF}$, $\overline{IH} \parallel \overline{JA} \parallel \overline{FG}$이므로 $\triangle JHI = \triangle FHJ$, $\triangle JAG = \triangle JAF$, $\triangle HGA = \triangle HJA + \triangle JAG$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\triangle DKC + \triangle CLE &= \triangle HGA + \triangle JHI \\ &= \triangle HJA + \triangle JAG + \triangle JHI \\ &= \triangle HJA + \triangle JAF + \triangle FHJ \\ &= \triangle FHA\end{aligned}$$

이다. 이것은 작은 이등변삼각형 두 개의 넓이의 합의 절반이 큰 이등변삼각형 한 개의 넓이의 절반과 같다는 것을 의미한다. 따라서 두 작은 이등변삼각형의 넓이의 합은 큰 이등변삼각형의 넓이와 같다.

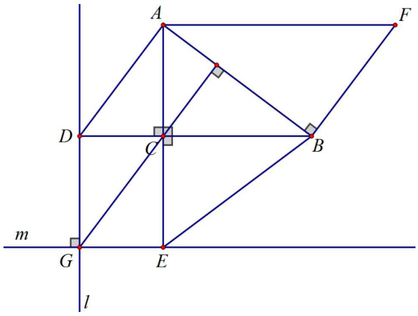




③ (이변)직각삼각형을 이용한 증명

<증명 가-③-1 > $\overline{AB}$가 빗변인 직각삼각형 $\triangle ABC$에서 각 변을 밑변으로 하고, 밑변과 높이의 비가 $1:k$(k는 실수)로 서로 닮음인 직각삼각형을 그린다. 이때 점 D, E, F를 각 직각삼각형의 꼭짓점이라 하자.

$\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$라 하면, $\overline{BF} = ck$, $\overline{CD} = bk$, $\overline{CE} = ak$ 이다. 이제 $\overline{AC}$에 평행하고 점 D를 지나는 직선 l, $\overline{BC}$에 평행하고 점 E를 지나는 직선 m을 그리자. 그러면 두 직선 l, m은 직교한다. 직선 l과 m의 교점을 G라 하고, 점 G와 점 C를 잇자. 그러면 $\triangle ACD$의 넓이는



$\triangle ACG$의 넓이와 같고, $\triangle BCE$의 넓이는 $\triangle BCG$의 넓이와 같다. 그리고

$$\overline{EG} : \overline{CE} = bk : ak = b : a = \overline{AC} : \overline{BC} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

이다. 한편,

$$\angle CEG = 90^\circ = \angle ACB \quad \cdots\cdots \quad ②$$

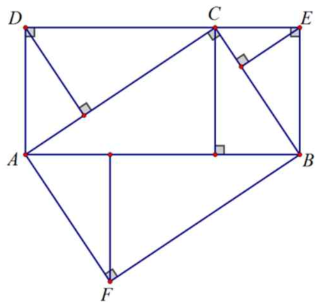
이므로 ①과 ②에 의하여 $\triangle GCE \backsim \triangle ABC$ 이다. 따라서 $\overline{GC} = ck$이다.

이제, $\overline{BC}$를 연장한 직선을 x축, $\overline{AC}$를 연장한 직선을 y축이라 하면, 점 B는 $(a,0)$, 점 A는 $(0,b)$, 점 E는 $(0,-ak)$, 점 D는 $(-bk,0)$이다. 그러면 $\overline{AB}$를 포함하는 직선은 $y = -\dfrac{b}{a}x + b$이고, $\overline{CG}$를 포함하는 직선은 점 $y = \dfrac{a}{b}x$이다. 두 직선은 직교하므로 $\overline{AB}$와 $\overline{CG}$의 연장선은 직교한다. 이때, 직교하는 점을 H라 하고, $\overline{CH}$의 길이를 h라 하자. 그러면 $\triangle ABG = \triangle ACG + \triangle BCG + \triangle ACB$이므로

$$\frac{1}{2}c(ck+h) = \frac{1}{2}b^2k + \frac{1}{2}a^2k + \frac{1}{2}ch$$

가 성립한다. 식을 정리하면 $\dfrac{1}{2}c^2k = \dfrac{1}{2}a^2k + \dfrac{1}{2}b^2k$이고, $c^2 = a^2 + b^2$이다.

<증명 가-$\boxed{3}$-2> 각 C가 직각인 직각삼각형 ABC에서 선분 $\overline{AB}$를 한 변으로 하고 그 변과 평행한 변이 점 C랑 만나는 직사각형을 그리자. 직사각형의 꼭짓점을 D와 E라 두자. 그러면 삼각형 ACD와 BCE도 각각 D와 E를 직각으로 하는 직각삼각형이 된다. 그러면 $\angle ACD = \angle EBC = \alpha$, $\angle DAC = \angle ECB = \beta$이다. 그리고 반대방향으로 AB를 밑변으로 하는 직각삼각형을 그리고 직각인 꼭짓점을 F라 두자. 그러면 $\triangle ABC \equiv \triangle ABF$이다. $\triangle ABC$에서 c를 밑변이라고 했을 때의 높이는 $ab = c \times$높이이므로 높이를 f라 하면, $f = \dfrac{ab}{c}$이다.



이제, $\overline{DC} = d$, $\overline{CE} = e$라 할 때, $\triangle ADC + \triangle BCE = \triangle ABF$임을 보이자.

$\triangle ADC = \dfrac{1}{2} \times b \times d\sin\alpha$, $\triangle BCE = \dfrac{1}{2} \times a \times e\sin\beta$이고, $\sin\alpha = \dfrac{f}{b}$, $\sin\beta = \dfrac{f}{a}$

이므로

$$\triangle ADC + \triangle BCE = \frac{1}{2}(bd\sin\alpha + ae\sin\beta)$$

$$=\frac{1}{2}(df+ef)=\frac{1}{2}f(d+e)=\frac{1}{2}fc \quad (\because \ d+e=c)$$
$$=\triangle ABF$$
이다. 따라서 $\triangle ADC+\triangle BCE=\triangle ABF$이다.

<증명 가-3-3> $\angle C$가 직각인 직각삼각형 $\triangle ABC$ 의 각 변에 높이가 k배인 직각삼각형을 붙이고 각 꼭짓점을 D, E, F라 한다. 그리고 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하자.

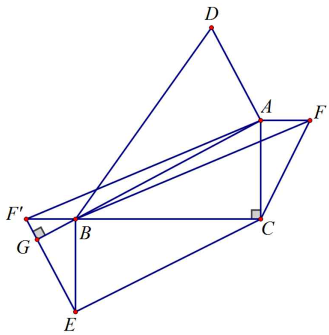
$\overline{BE}$와 $\overline{AC}$는 평행이므로 $\triangle BCE=\triangle BEA$, $\overline{AF}$와 $\overline{BC}$는 평행이므로 $\triangle ACF=\triangle ABF$이다. 그리고

① $\triangle ABC$에서 $\angle C=90^\circ$이므로 $\angle B+\angle A=90^\circ$

② $\angle ABE=\angle CBE+\angle CBA=90^\circ+\angle CBA$

③ $\angle BAF=\angle BAC+\angle CAF=\angle BAC+90^\circ$

이므로 $\angle ABE+\angle BAF=270^\circ$ 이다.



$\triangle BAF$를 점 A가 점 B로 가고 점 B가 점 A로 가게 뒤집었을 때, 점 F가 옮겨 온 $\overline{BC}$의 연장선 위에 있는 점을 F'라 하자. 그러면

① $\overline{F'B}=bk$, $\overline{BE}=ak$

② $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$

③ $\angle ACB=90^\circ$, $\angle F'BE=90^\circ$

이므로 $\triangle F'BE \backsim \triangle ACB$이다. 따라서 $\overline{EF'}=ck$이고, K가 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발일 때, $\overline{F'E}=\overline{CK}$이다. $\overline{AB}$에서 연장선을 그어 $\overline{F'E}$와 만나는 점을 G라고 둔다. $\angle ABC$와 $\angle F'BG$는 맞꼭지각으로 같고, $\triangle ABC \backsim \triangle F'EB$이므로 $\angle BAC$와 $\angle BF'E$는 같다. 따라서 $\angle ABC+\angle BAC=90^\circ=\angle GBF'+\angle BF'G$가 성립하므로 $BGF'=90^\circ$ 이다. 이것은 $\overline{AG}$와 $\overline{EF'}$가 직교함을 의미한다. 따라서

$$\triangle AF'E=\triangle AF'B+\triangle ABE+\triangle F'BE$$
$$=\triangle ACF+\triangle EBC+\triangle F'BE$$

(여기서 $\triangle BCE=\triangle BEA$, $\triangle ACF=\triangle ABF=\triangle ABF'$을 이용)이다. 이제, $\overline{GB}=h$라 두면 $\overline{GA}=c+h$이다. 그러므로 다음이 성립한다.

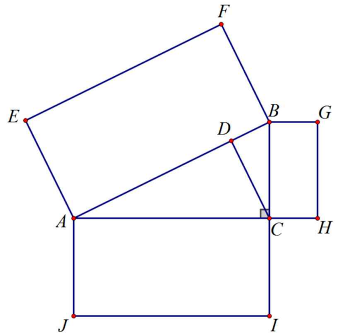
$$\frac{1}{2}(c+h)ck=\frac{1}{2}b\cdot\ bk+\frac{1}{2}a\cdot\ ak+\frac{1}{2}h\cdot\ ck$$
$$c^2k+chk=b^2k+a^2k+chk$$
$$\therefore\ a^2+b^2=c^2$$

2) 사각형류의 증명

1 직사각형

<증명 나-1-1> 각 C가 직각인 직각삼각형 ABC에서 각 변을 밑변으로 하고 각 변의 반을 높이로 하는 직사각형을 그리자.

$\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$라 하자. 점 C에서 $\overline{AB}$에 수선을 긋고, $\overline{AB}$와 만나는 점을 D라고 하자. 그러면 $\triangle ABC$와 $\triangle CBD$와 $\triangle ACD$는 서로 닮음이다.



ⅰ) $\triangle ABC \sim \triangle CBD$이므로 $\overline{BD}=x$라 두면

$$c : a = a : x$$

$$\therefore \quad x=\frac{a^2}{c}$$

ⅱ) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$이므로 $\overline{AD}=y$라 두면

$$c : b = b : y$$

$$\therefore \quad y=\frac{a^2}{c}$$

한편, $c=x+y$이므로 $x+y=\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{c}=c$이다. 따라서 $a^2+b^2=c^2$이다. 그리고

$$\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}=\frac{(a^2+b^2)}{2}=\frac{1}{2}c^2$$

을 만족한다.

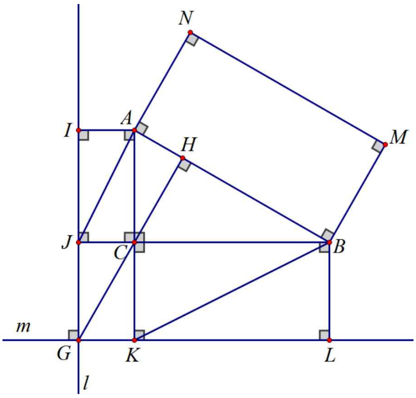
<증명 나-1-2> $\overline{AB}$가 빗변인 직각삼각형 ABC에서 각 변을 밑변으로 하고, 밑변과 높이의 비가 $1:k$인 서로 닮은 직사각형을 그리자. 각 꼭짓점을 그림과 같이 I, J, K, L, M, N이라고 하고, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면, $\overline{CJ}=bk$, $\overline{CK}=ak$, $\overline{BM}=ck$이다. 그리고 $\overline{IJ}$를 포함하는 직선 l과 $\overline{KL}$을 포함하는 직선 m의 교점을 G라고 하고, 점 C와 점 G를 잇자. 이때 $\triangle AJC$의 넓이는 $\triangle AGC$와 같고, $\triangle BKC$의 넓이는 $\triangle BGC$와 같다. 그리고

$$\overline{GK}:\overline{CK}=bk:ak=b:a=\overline{AC}:\overline{BC} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

이고,

$$\angle\, GKC=90^\circ=\angle\, ACB \quad \cdots\cdots \quad ②$$

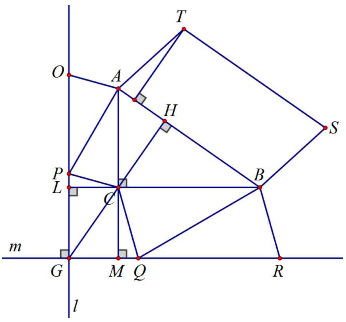
이다. ①과 ②에 의하여 $\triangle GCK \sim \triangle ABC$이다. 따라서 $\overline{GC}=ck$이다.
이제, $\overline{BC}$를 연장한 직선을 x축, $\overline{AC}$를 연장한 직선을 y축이라 하자. 그러면 점 B는 $(a,0)$, 점 A는 $(0,b)$, 점 K는 $(0,-ak)$, 점 J는 $(-bk,0)$이므로 $\overline{CG}$를 포함하는 직선은 $y=\frac{a}{b}x$이고, $\overline{AB}$를 포함하는 직선은 $y=-\frac{b}{a}x+b$이다. 따라서 두 직선은 직교한다. 이때, 이 점을 H라고 하고, $\overline{CH}$의 길이를 h라 하자.



$$\triangle ACG+\triangle BCG+\triangle ACB=\triangle ABG$$
이므로
$$\frac{1}{2}b^2k+\frac{1}{2}a^2k+\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}c(ck+h)$$
가 성립한다. 식을 정리하면 $\frac{1}{2}a^2k+\frac{1}{2}b^2k=\frac{1}{2}c^2k$이고, $a^2+b^2=c^2$이다.

[2] 평행사변형을 이용한 방법

<증명 나-[2]-1> $\overline{AB}$가 빗변인 직각삼각형 ABC에서 각 변을 밑변으로 하고 밑변과 높이의 비가 $1:k$(k는 실수)인 평행사변형을 그리자. 그리고 꼭짓점을 그림과 같이 O, P, Q, R, S, T 라 하자. 이제 $\overline{OP}$를 포함하는 직선을 l, $\overline{QR}$를 포함하는 직선을 m이라 하자. 이 두 직선은 직교한다. 직선 l과 m의 교점을 G라고 하고, 점 G와 점 C를 잇자. 그러면 $\triangle ACP$의 넓이는 $\triangle ACG$의 넓이와 같고, $\triangle BCQ$의 넓이는 $\triangle BCG$의 넓이와 같다. 그리고 점 C에서 직선 l, m 에 내린 수선의 발을 각각 L, M이라고 하고, 점 T에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 N이라 하자. $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면, $\overline{CM}=ak$, $\overline{GM}=bk$, $\overline{TN}=ck$이다. 여기서 $\overline{GM}=bk$, $\overline{CM}=ak$이므로



$$\overline{CM}:\overline{GM}=ak:bk=a:b=\overline{BC}:\overline{AC} \quad \cdots\cdots \quad ①$$
이고,
$$\angle GMC=90^\circ=\angle ACB \quad \cdots\cdots \quad ②$$

이다. ①과 ②에 의하여 $\triangle GCM \backsim \triangle ABC$이다. 따라서 $\overline{GC} = ck$이다.
다음으로 $\overline{BC}$를 연장한 직선을 x축, $\overline{AC}$를 연장한 직선을 y축이라 하면, 점 B는 $(a,0)$, 점 A는 $(0,b)$, 점 M은 $(0,-ak)$, 점 L은 $(-bk,0)$이다. 그리고 $\overline{CG}$를 포함하는 직선은 $y=\frac{a}{b}x$이고, $\overline{AB}$를 포함하는 직선은 $y=-\frac{b}{a}x+b$이므로 두 직선은 직교한다. 이제 직교하는 점을 H라고 하고, $\overline{CH}$의 길이를 h라 하자.

$$\triangle ACG + \triangle BCG + \triangle ACB = \triangle ABG$$

이므로

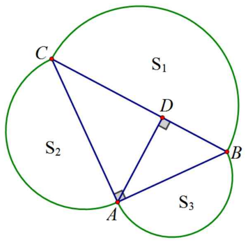
$$\frac{1}{2}b^2k + \frac{1}{2}a^2k + \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}c(ck+h)$$

가 성립한다. 식을 정리하면 $\frac{1}{2}a^2k + \frac{1}{2}b^2k = \frac{1}{2}c^2k$이고, $a^2+b^2=c^2$이다.

3) 반원을 이용한 방법

<증명 다-1>

각 A가 90°인 직각삼각형 ABC의 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 점 D라 한다. 그러면 각 반원의 넓이는



$$S_1 = \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 \times \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}\overline{BC}^2$$

$$S_2 = \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 \times \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}\overline{AC}^2$$

$$S_3 = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \times \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}\overline{AB}^2$$

이다.

① $\triangle ABC$와 $\triangle DBA$가 닮음이므로,

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BD}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$$

② $\triangle ABC$와 $\triangle DAC$가 닮음이므로,

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{DC}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{DC}$$

이다. 그리고

③ $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$

이다.①, ②, ③에 의해

$$\frac{\pi}{8}(\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2) = \frac{\pi}{8}(\overline{BC} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{BD})$$

$$= \frac{\pi}{8}\overline{BC} \cdot (\overline{DC} + \overline{BD}) = \frac{\pi}{8}\overline{BC} \cdot \overline{BC} = \frac{\pi}{8}\overline{BC}^2$$

이다. 그리고 $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이다.

4) 임의의 닮음인 도형으로의 일반화

<증명 라-1> $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 직각삼각형 ABC에서 각 변을 밑으로 하는 서로 닮음인 임의의 도형을 그리자. 이때 각 넓이를 S_1, S_2, S_3라 하자. $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D라고 하자. $\angle A = \angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$ 이므로

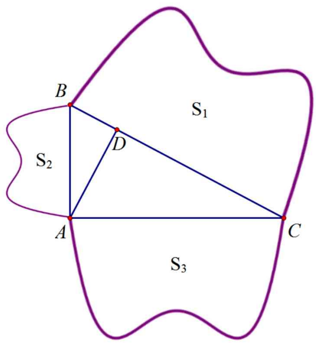
$\triangle ABC$, $\triangle DBA$, $\triangle DAC$는 직각삼각형이다 ……①

그리고 $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = 90^\circ$, $\angle BAD = \angle ACB$, $\angle DBA = \angle DAC$이다. 따라서 $\triangle ABC$, $\triangle DBA$, $\triangle DAC$는 닮음이다.

$\triangle DBA$와 $\triangle ABC$는 닮음이므로 $\overline{BA} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{BA}$가 성립한다. 즉,

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$$

$$\therefore \ \overline{BD} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}}$$



그리고 $\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{BC} : \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}}$ 이므로, $\overline{BC}$를 곱하면 $\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$ 이다. 그런데 $\overline{BD}$와 $\overline{BC}$를 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 $\overline{BD}^2$와 $\overline{BC}^2$ 이므로, 서로 닮은 임의의 도형은 정사각형의 넓이의 실수배 한 것과 같다.

$$\therefore \ k\overline{BC}^2 = S_1, \ k\overline{AB}^2 = S_2 \ (k\text{는 실수})$$

$$\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 = k\overline{BC}^2 : k\overline{AB}^2 = S_1 : S_2$$

$$\therefore \ \overline{BC} : \overline{BD} = S_1 : S_2$$

마찬가지로, $\triangle DAC$와 $\triangle ABC$는 닮음이므로 $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{DC} : \overline{AC}$가 성립한다. 즉,

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{DC}$$

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{DC} : \overline{AC}$$

$$\therefore\ \overline{DC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}}$$

$\overline{BC} : \overline{DC} = \overline{BC} : \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}}$이므로 $\overline{BC}$를 곱하면 $\overline{BC} : \overline{DC} = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 = k\overline{BC}^2 : k\overline{AC}^2 = S_1 : S_3$이다.

$$\therefore\ \overline{BC} : \overline{DC} = S_1 : S_3$$

그리고 $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$이므로

$$S_2 + S_3 = \frac{\overline{BD}\cdot S_1}{\overline{BC}} + \frac{\overline{DC}\cdot S_1}{\overline{BC}}$$

$$= \frac{(\overline{BD} + \overline{DC})S_1}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}\cdot S_1}{\overline{BC}} = S_1$$

이다.

5) 결과 분석

이상으로부터 연구과제로 설정하였던

1. 직각삼각형의 각 변 위에 닮음인 다각형과 반원을 붙였을 때 피타고라스 정리가 성립하는지 알아본다.
2. 직각삼각형의 각 변 위에 임의의 닮음인 도형을 붙였을 때 피타고라스 정리가 성립하는지 알아본다.
3. 이 증명 활동이 가지는 의의를 생각해 본다.

에 대해 학생들은 다음과 같은 결과를 얻었다.

1. 정사각형뿐만 아니라 직각삼각형의 각 변에 모두 닮음인 정삼각형, 이등변삼각형, (이변)직각삼각형, 직사각형, 평행사변형, 반원을 붙이더라도 피타고라스 정리가 성립함을 알 수 있었다. 그리고 증명법도 다양하게 존재하였다.
2. 임의의 닮음인 도형을 붙여도 피타고라스 정리가 성립함을 알 수 있었다. 따라서 피타고라스 정리는 닮음인 어떤 도형을 붙여도 성립함을 확인 할 수 있었다.
3. 피타고라스 정리는 직각삼각형의 변 사이의 길이 관계를 나타낸다. 이러한 길이 관계는 닮음을 이용하면 쉽게 보일 수 있다. 그런데 유클리드의 증명법은 넓이 관계를 이용하고 있다. 더구나 붙이는 도형으로 정사각형을 채택하고 있다. 전자보다 더 복잡하기는 하지만 정사각형을 붙인 유클리드의 증명은 우선 넓이 관계로 얻어지는 정리가 길이 관계로 바로 해석될 수 있다는 장점을 가

진다. 다양한 도형을 붙여 가며 증명활동을 해 봄으로써 일반화를 할 수 있었으며, 정사각형을 붙이는 도형으로 선택한 유클리드의 방법의 가치를 알 수 있었다.

한편, 학생들의 증명을 분석하면 몇 가지 특징적인 사실을 알 수 있다.

① 주어진 직각삼각형의 변에 도형을 붙이지 않더라도 변의 길이 관계인 피타고라스 정리는 얻어진다. 학생 증명 가-1-1, 나-1-1이 그러한 예이다. 따라서 유클리드 증명법의 핵심은 넓이 관계를 보이는 것이며, 학생들은 증명활동의 도달점도 넓이 관계임을 인식하였다. 그리고 다-1과 라-1은 길이 관계가 이미 얻어지지만 넓이 관계에 사고의 초점을 두고 있어 그 사실을 간과하고 있다. 하지만 논의의 목적에 비추어볼 때 바람직한 방향이기도 하다.

길이 관계를 나타내는 경우	넓이 관계를 나타내는 경우
가-1-1, 나-1-1	가-1-2, 가-2-1, 가-3-1, 가-3-3, 나-1-2, 나-2-1

② 가-1-3, 가-2-1, 가-3-1, 나-1-2, 나-2-1은 유클리드의 증명법과 해석기하학적 관점을 적용한 것으로, <다각형류>의 증명 모두를 해결하고 있다. 소개된 다른 증명법들도 다른 경우로의 적용을 시도하였으나 실패하였다.

③ 폴리아가 변의 길이 관계를 이용하여 증명하였던 일반화 증명을 스스로 발견하고 보다 구체적으로 증명하였다(라-1).

④ 증명 과정에서 피타고라스 정리의 식이 얻어지지 않는 경우도 있다. 이 경우는 별도의 해석과정이 필요하다. 가-2-2, 가-3-2가 그러한 예이다. 특히, 가-3-2의 경우, '$\sin\alpha = \frac{f}{b} = \frac{b}{c}$, $\cos\alpha = \frac{f}{a} = \frac{b}{c}$이므로 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$을 이용하면 $\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$이 성립하여 피타고라스 정리를 유도할 수 있다'는 것을 학생이 언급하고 있다. 이것은 실제로 피타고라스 정리가 단위원을 나타낸다는 사실 또는 단위원을 이용하여 삼각비를 구하는 것과 같이 피타고라스 정리의 의의와 함께 수학의 내적 연결성을 인식할 수 있는 증명이 된다.

⑤ 학생들은 유클리드 기하학적 방법, 해석기하학적 방법(대수적 방법 포함)을 적절히 사용하고 있으며, 도형의 분할, 도형의 닮음과 닮음비, 삼각비, 등적변환, 다양한 삼각형의 넓이 구하는 공식들, 다양한 도형의 성질, 직선의 방

정식, 좌표평면에서의 삼각비의 활용, 변환(대칭, 평행)이동 등 다양한 수학적 개념들을 활용하고 있다.

V. 결론

피타고라스 정리는, 정리가 학문적으로 규명되기 이전부터 인간생활과 함께 한 수학적 개념으로 그 학문적·실생활적 흥미와 유용성에 의해 오랜 기간 연구되어 왔다. 이러한 학문적·실생활적 가치는 직각삼각형의 변 사이의 관계라는 '길이 개념'과 변에 붙인 닮음인 도형들 사이의 넓이 관계라는 '넓이 개념'이 상황에 따라 달리 적용될 수 있다는 양면적 특성 때문이다. 그리고 학교수학에서는 이러한 특성을 동치 관계로 가르치고 있다.

하지만 본 연구에서와 같이 유클리드의 증명을 기초로 하여 정사각형 대신에 다른 닮음인 도형을 붙여 증명을 시도한 결과 이러한 동치성은 결과적 동치이며, 그것도 유클리드의 증명에 한정됨을 알 수 있다. 유클리드의 증명에서는 피타고라스 정리를 나타내는 식이 넓이 관계로 얻어지고, 이 식의 해석으로 변의 길이 관계를 얻을 수 있다. 그러나 살펴 본 바와 같이 정사각형이 아닌 다른 도형을 붙였을 때, 변의 길이 관계를 먼저 얻고 이 사실을 넓이 관계를 보이는데 적용하게 되는 경우가 있었다. 길이 관계가 넓이 관계를 보이는데 수단으로 역할하고 있는 것이다. 또한 증명 속에서 외형적으로는 피타고라스 정리를 나타내는 식이 얻어지지만, 그 식이 넓이 관계를 나타내는 경우가 있는 반면 길이 관계를 나타내는 경우도 있었으며, 심지어 그러한 식이 증명에서 나타나지 않는 경우도 있었다. 또한 넓이 개념과 길이 개념이 융합되기도 하였다.

이처럼 피타고라스 정리의 증명 속에서 길이 관계와 넓이 관계는 동치가 아니며, 증명 결과를 재해석하는 과정 또는 관계를 맺어주는 활동을 필요로 하므로 결과적 동치가 된다. 따라서 피타고라스 정리의 증명으로 유클리드의 증명적 사고를 활용하려고 하면 이러한 해석활동이나 관계맺음 활동을 최소화할 수 있는 '정사각형'을 붙이는 것이 효율적임을 알 수 있다. 그리고 이 경우의 최대 장점은 도형의 넓이가 그대로 피타고라스 정리를 나타내는 식으로 해석될 수 있다는 것이다. 즉, 닮음을 이용하여 피타고라스 정리의 길이 관계는 쉽게 얻을 수 있지만, 이 경우는 넓이 관계를 함의하고 있지 않다. 반면 유클리드 증명의 경우는 넓이 관계를 나타내지만, 그 관계는 길이 관계로 해석될 수 있다. 이것이 증명이 추구하는 효율성의 초점이 된다고 할 수 있으며, 유클리드의 증명이 가지는 가치일 것이다.

본 연구의 또 하나의 의의는 이러한 증명 과정에 다양한 아이디어가 필요하며, 다양한 수학적 개념이 필요하여 창의성 신장에 도움을 준다는 것이다. 또한 증명을 구성하고 정제하는 과정에서 창의적 의사소통을 위한 능력도 요구되므로 '수학적 과정'의 신장을 위한 좋은 소재가 된다는 것이다. 실제로 학생들은 증명을 위한 아

이디어의 발견보다도 증명 내용을 표현하고 정제하는데 더 어려움을 토로하였다.

유클리드 증명의 일반화에 대한 증명은 여기서 소개된 것 외에도 다양하게 존재할 것이며, 더 폭넓은 수학적 개념들이 사용될 수 있을 것이다. 본 연구에서는 삼각형의 경우보다 사각형의 경우 증명의 개수가 적은 편이며, 타원을 붙이는 경우나 직각삼각형의 변에 바로 붙어있지 않는 도형[4] 등에 대해서는 논의가 이루어지지 않았는데. 이를 바탕으로 더 많은 증명을 유도하는 후속 활동이 필요하다.

참 고 문 헌

[1] 교육과학기술부(2011), 2009 개정 교육과정-수학.

[2] 리처드 민키에비츠 지음, 이상원 옮김(2002), 문명과 수학, 서울; 경문사.

[3] 우정호(2010), 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울; 서울대학교출판부.

[4] 유클리드 씀, 이무현 옮김(1997a), 기하학원론 - 평면기하, 서울; 교우사.

[5] 유클리드 씀, 이무현 옮김(1997b), 기하학원론 - 비율, 수, 서울; 교우사.

[6] E. S. Loomis(1968), *The Pythagorean Proposition*, NCTM.

[7] S. I. Brown & M. I. Walter(2005), *The Art of Problem Posing*, NJ.; Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[8] 大矢真一(2001), ピタゴラスの定理, 東京; 東海大学出版会.

[9] http://blog.naver.com/PostView.nhn?blogId=hksteven&logNo=70158207535

Chung, Young Woo
Kyungsung University
Busan, 608-736, Republic of Korea
e-mail : nahime02@ks.ac.kr

Kim Boo Yoon†
Pusan National University

4) 大矢眞一(2001) 참고

* Key Words: Pythagorean theorem, generalization for Euclidean proof of the Pythagorean theorem, Euclidean proof

† Corresponding author

Busan 609-735, Republic of Korea
e-mail : kimby@pusan.ac.kr
Kim Dong Young
Haeundae High School
Busan 612-818, Republic of Korea
e-mail : hal3691@naver.com

Ryu Dong Min
Haeundae High School
Busan 612-818, Republic of Korea
e-mail : dmr98@naver.com

Park Ju Hyung
Haeundae High School
Busan 612-818, Republic of Korea
e-mail : psd1246@naver.com

Jang Min Je
Haeundae High School
Busan 612-818, Republic of Korea
e-mail : baseball1104@naver.com