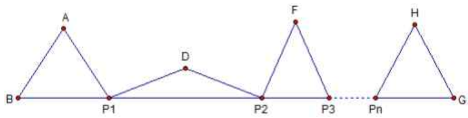
East Asian Math. J.
Vol. 31 (2015), No. 4, pp. 445-458
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2015.034

# 다각형의 등주문제에서 등각의 문제 고찰

## A Study on the Equiangular Problem in the Isoperimetric Problem of Polygons

이 재 운 · 최 근 배*

ABSTRACT. In this paper, we provide a geometrical solving method about the equiangular problem appeared in the solving process of the isoperimetric problem of polygon. In fact we deal with the following problem in the view of the productive thinking centered on the circle: Let $B$ and $G$ be fixed points, and let $\overline{AB} = \overline{AP_1} = \overline{DP_1} = \overline{DP_2} = \overline{FP_2} = \overline{FP_3} = \overline{HP_{n-1}} = \overline{HG}$. Then find the position of moving points $P_i\ (1 \le i \le n)$ to maximize the sum of areas of the triangles that lie on the line segment $\overline{BG}$.



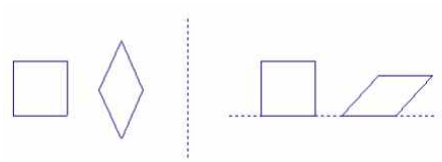

## I. 서론

교과교육 시간에 학생들의 공간감각(spatial sense) 또는 공간추론(spatial reasoning) 능력을 알아보기 위해서 “둘레의 길이가 같은 정사각형과 마름모 중 어느 것이 넓이가 더 넓은가?”라는 문제를 제시해보았다. 이 문제는 정사각형과 마름모를 모두 평행사변형의 관점에서 바라보면 쉽게 해결할 수 있는 문제이다. 그러나 대부분의 학생은 공식에 의존한 대수적인 계산에 집중하였다. 실제로, 위와 같은 문제를 대수적인 계산 없이 기하적인 관점으로 해결하라는 것으로 ○○대학교 교육대학 1학년

* 교신저자
Received July 6, 2015; Accepted August 24, 2015.
2010 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key Words: 다각형, 등주문제
** 이 논문은 2015학년도 제주대학교 학술진흥연구비 지원사업에 의하여 연구되었음


(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

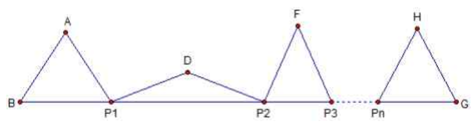
36명을 대상으로 지필시험을 보았다. 대부분(90%)의 학생들은 답을 알고 있지만 그 이유를 순수 기하적인 관점으로 설명한 한생은 17%(36명 중 6명)에 불과하였다. 그러한 이유 중 하나는 마름모와 관련된 개념이미지(concept image) (Tall, 1991, pp.91-92)가 소위 말하는 '다이아몬드'로 형식적 고착(formal abidance) (우정호, 2006, pp.459-460)이 있어 두 도형을 평행사변형의 범주에서 보지 못하고 있다는 점이다. 즉, 도형들 사이의 관계적 이해(relational understanding; Skemp, 1989) 또는 구조적인 내적 관련성(productive thinking; 남승인 외, 2013, pp.77-83) 등과 관련된 능력이 부족하다는 것이다(<그림 I-1> 참조, 최근배, 2014, p.678).



<그림 I-1> 마름모의 개념이미지와 넓이비교

이 논문에서는 학생들의 공간감각 능력 기르기를 위한 학습 자료의 일환으로 다각형의 등주문제에서 등각의 문제를, 원(circle)을 매개체로 사용하는 관점을 중심으로, 고찰하고자 한다. 구체적으로, 등각의 문제는 다각형에서의 등주문제를 해결하는 과정에서 나타난 아래와 같은 문제로, 원(circle)을 매개체로 사용하는 기하학적인 해결책을 제공하고자 한다. 이 문제는 ○○대학교 과학영재교육의 초등 수학반에서 등주문제를 해결하는 과정 중에 나타난 문제이다(자세한 사항은 최근배, 2009, 2011 참조).

문제: 점 $B$와 점 $G$는 고정점이고, $\overline{AB}=\overline{AP_1}=\overline{DP_1}=\overline{DP_2}=\overline{FP_2}=\overline{FP_3}=\overline{HP_{n-1}}=\overline{HG}$ 일 때 선분 $\overline{BG}$ 위의 삼각형들의 넓이의 합이 최대가 되는 동점 $P_i\,(1\le i\le n)$의 위치를 찾아라.




## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 평면에서의 등주문제

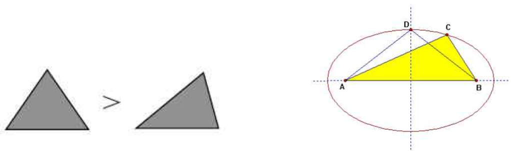
평면에서의 등주문제(Isoperimetric Problem, Dido′s Problem) ‘같은 길이의 둘레를 가지는 평면도형 중에서 가장 큰 넓이를 가지는 도형은 무엇인가?’는 고대 그리스시대부터 잘 알려진 최적화의 문제 중 하나로 둘레의 길이와 넓이사이의 관계성과 연관된 이슈로 주목할 만한 문헌적 역사는 Virgil의 Aeneas와 Dido여왕의 전설까지 거슬러 올라간다.[1]

등주문제의 완전한 증명은 해석학과 미・적분을 이용한 Weierstrass와 기하적인 방법을 사용한 Edler에 의해서 제일 먼저 이루어 졌으며, 그 후 많은 다른 또는 보다 진보된 증명들이 발견되었다. 반면 수순기하학적인 증명은 고대 그리스 수학자인 Zenodorus의 저술 ‘On isometric figures’에 의해서 알려졌지만, 증명이 완전하지 못하였다. 기하적인 관점에서의 완전한 증명에 대한 현대의 연구는 Steiner에 의한 것이라고 할 수 있다. 1841년 Steiner는 순수 유글리드 기하를 사용한 다섯 개의 증명방법을 발표하였다. 그러나 Steiner는 자신의 증명을 완전한 것으로 보았지만, 그 당시의 유명한 수학자인 Weierstrass는 Steiner 증명의 오류를 지적하고 해석학과 미・적분을 이용하여 완전한 증명법을 제시하였다.

## 2. Zenodorus

Zenodorus (약 200 B.C – 약 140 B.C)는 고대 그리스 수학자였으며 ‘등거리 도형에 관하여(on isometric figures)’라는 저술의 저자로 알려져 있다. 이 저술에서 그는 같은 크기의 둘레 길이를 갖는 모양이 다른 도형을 연구하였다. 그러나 불행하게도 그의 저술은 분실되었으며, 저술 중 일부분은 Pappus와 Theon과 같은 다른 수학자들에 의한 참고 문헌을 통해서 남아있다. Zenodorus는 등주문제와 관련된 중요한 네 개의 명제 남겼다(Tapia, 2009 참조). 이들 중에서 우리는 다각형의 등주문제 즉 ‘같은 둘레의 길이를 가지고 같은 수의 변을 가지는 다각형 중에서 정다각형이 가장 넓은 넓이를 가진다.’의 증명을 중심으로 고찰한다.

먼저, 다각형의 등주문제에서 등변을 밝히는 Zenodorus의 핵심아이디어는 ‘같은 길이의 밑변을 가지는 삼각형 중에 이등변 삼각형이 가장 큰 넓이를 가진다.’ 즉, <그림 II-1>과 같이 변 길이의 평균화와 같다.




<그림 II-1> 등변을 밝히는 핵심아이디어(Blasjo, 2005)와 타원

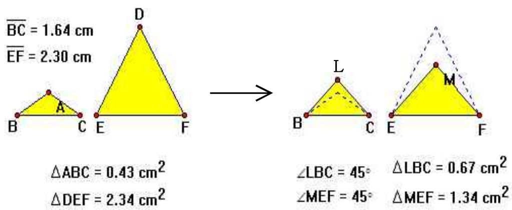
1) 베르길리우스(Vergilius, 영어 Vergil 버질, 70-19 B.C.)가 쓴 로마의 국가 서사시(epic, 敍事詩) 아이네이스(Aeneid, Aeneis)(https://www.facebook.com/notes/210473145660187/)

<그림 II-1>의 아이디어를 사용해서, $P$를 $n$-각형 중에서 넓이가 최대인 도형[2]이라고 두고, $P$가 등변다각형임을 보이자. 만일 등변이 아니라면 ‘인접한 서로 다른 길이의 두 변’이 존재한다.[3] 그러면 위에서 언급한 아이디어를 사용해서 둘레의 길이는 같지만 넓이가 더 넓은 다각형을 만들 수 있다. 이것은 $P$가 넓이가 최대인 도형이라는 데 모순이 된다. 따라서 $P$는 등변 다각형이다.

반면, 등각을 밝히는 Zenodorus의 아이디어는 두 삼각형의 닮음을 이용한 <그림 II-2>과 같은 둘레의 길이의 재분배이다. 그러나 이것은 아이디어에서 약간의 오류가 보인다.

<그림 II-2> 둘레의 재분배(Blasjo, 2005)

실제로, 다각형의 등주문제의 Zenodorus의 증명에서 ‘둘레의 재분배에 따른 넓이 변화의 문제’가 명확하지 않다. 이를 테면, <그림 II-3>에서 두 이등변삼각형 $ABC$와 $DEF$의 넓이의 합은 $2.77cm^2$이지만 변형된 두 닮은 이등변삼각형 $LBC$와 $MEF$의 넓이 합은 $2.01cm^2$로 넓이가 감소하였다.




<그림 II-3> Zenodorus의 증명의 반례(Blasjo, 2005; 최근배, 2011)

### 3. 원에 내접하는 다각형

다각형 등주문제의 Zenodorus 증명방법은 2절에서 언급한 것처럼 먼저, 등변을 밝히고 그 후 둘레의 재분배를 통한 등각을 밝히고 있다. 이 절에서는 원에 내접하는 다각형의 관점에서의 증명방법을 알아본다.

2) 등주문제의 해와 관련된 존재성 문제의 일반적인 논의는 Spivak(1979, pp. 441-444)에 잘 나타나 있으며 또한 Blasjo(2005, p.542)는 다각형에서의 해의 존재성 문제를 다루고 있다.
3) 다각형에서 서로 다른 길이의 두변이 존재하면 인접한 서로 다른 길이의 두 변이 존재한다.

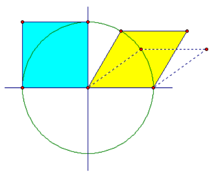
먼저, 다각형에서 한 변을 제외하고 나머지 변의 길이가 주어진 다각형 중에서 넓이가 최대인 다각형은 제외된 한 변을 지름으로 하고 반원에 내접하는 것이다. 이것에 대한 증명은 ‘주어진 길이를 두 변으로 가지는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 도형은 주어진 두 변이 직각을 이루는 직각삼각형이다.’는 사실과 ‘반원에 대한 원주각이 90°이다.’는 사실을 사용하면 된다.

둘째, 앞에서 밝힌 사실을 이용하여, 변의 길이가 모두 주어진 다각형 중에서 넓이가 최대인 것은 원에 내접하는 다각형이다(이광연, 1998, pp.22-23 참조).

끝으로, 다각형의 등주문제 답은 정다각형이다. 증명의 기본적인 아이디어는 원에 내접하는 다각형의 인접한 두 변의 길이가 같다는 것을 밝히는 것이다. 이에 대한 자세한 증명은 이광연(1998) 또는 http://dmat.cfm.cl/colloquium/2010-07-09-15:00.pdf을 참고하면 된다.

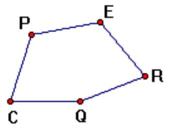
## Ⅲ. 등각의 문제

2장에서 살펴본 다각형의 등주문제와 관련된 증명에서 Zenodorus의 방법은 등각의 증명이 명확하지 않고, 이광연 등이 고찰한 증명은 원에 내접 후 등변(따라서 등각)의 방법으로 답을 구하고 있다. 우리의 방법은 기본적으로 등변을 먼저 보이고 그 후 등각을 보이는 Zenodorus의 방법을 따르는 것으로 Zenodorus의 완전하지 않는 등각의 증명을 좀 더 명확히 하고자 한다. 다각형의 등주문제에서 등각의 문제를 다룰 때, 존재성의 문제(각주 2 참고)를 가정한다. 먼저, 삼각형의 경우에는 등변 삼각형이 정삼각형이기 때문에 등각의 문제는 해결된다. 이제, 사각형인 경우를 생각해보자. 2장의 2절에 의하면 사각형의 등주문제의 답은 우선 등변, 즉 마름모가 되이어야 한다. 따라서 사각형의 등주문제는 정사각형과 마름모의 넓이 비교를 하면 된다. <그림 Ⅲ-1>은 마름모가 정사각형일 때 넓이가 가장 커다는 것을 보여 준다.



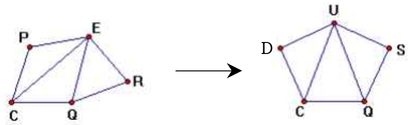
<그림 Ⅲ-1> 정사각형과 마름모 원에서 동시에 보기

한편, 2장 2절에 의하면 오각형 등주문제의 답은 우선 등변이 되이어야 한다. 이제, 등각임을 밝혀보자.



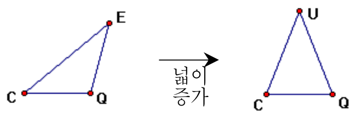

<그림 III-2> 등변 오각형

즉, <그림 III-2>와 같은 등변 오각형에서 둘레의 길이를 변화시키지 않고 넓이가 최대인 오각형이 되려면 등각이 되어야함을 보이자. 이는 대각선에 붙어있는 삼각형이 모두 합동이 됨을 보이면 된다. 우선, <그림 III-3>과 같은 변형을 생각해보자(최근배, 2009, 2011).



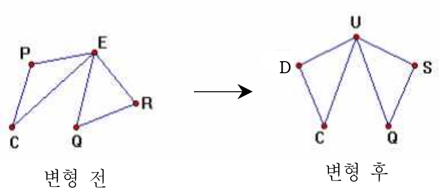

<그림 III-3> 대각선 길이 같게 하기 변형: $\frac{\overline{CE}+\overline{EQ}}{2}=\overline{CU}=\overline{UQ}$

<그림 III-3>과 같은 '대각선 길이 같게 하기' 변형에서 우선 <그림 III-4>와 같이 두 대각선을 변으로 가지는 삼각형은 <그림 II-1>에 의해서 넓이가 증가한다.



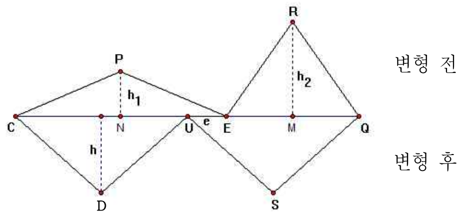

<그림 III-4> 두 대각선을 변으로 가지는 삼각형의 변화

이제, <그림 III-3>과 같은 변형에 따라서 <그림 III-5>와 같이 대각선에 붙어있는 두 삼각형도 변화가 된다. 여기서 변화된 삼각형에서의 넓이 변화를 살펴보자.




<그림 III-5> 두 대각선에 붙어 있는 삼각형의 변화

이를 위해서 <그림 III-5>와 같은 변형 전후의 삼각형을 <그림 III-6>과 같이 붙여 놓고 넓이의 크기를 비교해보자. 여기서 $e=\overline{CE}-\overline{CU}$, $h_1$와 $h_2$는 각각 $\overline{CE}$와 $\overline{CQ}$를 밑변으로 한 삼각형의 높이이고, $h$는 $\overline{CU}$와 $\overline{UQ}$ 밑변으로 하는 두 합동인 삼각형의 높이를 나타낸다.



<그림 III-6> 두 대각선에 붙어 있는 변형 전후의 삼각형

<그림 III-6>에서 편의 상 $\overline{CU}=\overline{UQ}=b$ 라고 두면, 선분 $\overline{CQ}$ 위에 있는 두 삼각형의 넓이의 합은 다음과 같다.

$$\triangle PCE\text{의 넓이}+\triangle REQ\text{의 넓이} = \frac{1}{2}\times(b+e)\times h_1+\frac{1}{2}\times(b-e)\times h_2$$

이로부터 다음 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times(b+e)\times h_1+\frac{1}{2}\times(b-e)\times h_2 &= \frac{1}{2}\times\{b(h_1+h_2)+e(h_1-h_2)\}\\ &\le \frac{1}{2}\times b\times(h_1+h_2),\ (h_1\le h_2\text{ 이기 때문에})\end{aligned}$$

따라서 다음의 부등식을 얻는다.

$$\triangle PCE\text{의 넓이}+\triangle REQ\text{의 넓이} \le \frac{1}{2}\times b\times(h_1+h_2)$$

만일 아래의 부등식 (1)이 증명되면

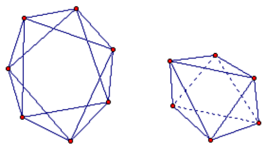
$$\frac{1}{2}\times(h_1+h_2)\le h \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (1)$$

다음의 부등식 (2)를 보인 것이다.

$$\triangle PCE\text{의 넓이}+\triangle REQ\text{의 넓이} \le 2\times\triangle CDU\text{의 넓이} \cdots\cdots (2)$$

앞의 사실로부터 만일 부등식 (1)이 증명(다음 1절에서 증명)된다면 ‘대각선 길이 같게 하기’변형에 의해, <그림 III-4>과 식 (2)에 의해서, 둘레의 길이 변화 없이 넓이를 더 키울 수 있다. 따라서 둘레의 길이가 같은 오각형 중에서 넓이가 최대가 되기 위해서는 반드시 대각선의 길이가 같아야한다. 그러므로 대각선에 붙어있는 삼각형은 모두 합동이고, 따라서 오각형의 모든 각은 등각이다.

끝으로, 2장의 2절에 의해서 일반적인 다각형의 등주문제의 답은 우선 등변이어야 한다. 등변 $n(>5)$-각형의 등각의 문제해결은 $n(\le 5)$-각형의 경우와 마찬가지로 ‘대각선에 붙어있는 삼각형들이 모두 합동이다’는 사실을 증명한다. 따라서 주어진 다각형이 등변이므로 ‘두 개의 인접한 다각형의 변과 삼각형을 이루는 대각선의 길이가 모두 같음’을 보이면 된다. 여기서 편리를 위해 두 개의 인접한 다각형의 변과 삼각형을 이루는 대각선을 ‘주대각선’이라고 부르자(<그림 III-7> 참고).

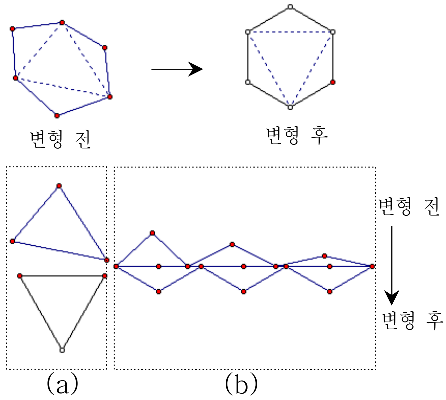


<그림 III-7> 주대각선들

이의 증명 논리는 $n(\le 5)$-각형의 경우와 마찬가지로 ‘만약 길이가 다른 주대각선이 있다면 다각형의 둘레의 길이를 변화시키지 않고 넓이를 더 넓게 만들 수 있다’는 것이다. 따라서 주대각선의 연결성분이 1개인 경우는 5각형의 경우와 같은 방법으로 증명이 된다. 다시 말해서 홀수 $n(>5)$-각형인 경우는 연결성분이 1개(<그림 III-7>의 왼쪽 다각형 참조)이기 때문에 5각형의 경우와 증명방법이 같다. 그러나 짝수 $n(>5)$-각형인 경우는 주대각선의 연결성분이 2개(<그림 III-7>의 오른쪽 다각형 참조)이다. 이 경우 ‘두 개의 길이가 다른 주대각선이 있으면 인접한 두 개의 길이가 다른 주대각선이 있다’는 사실을 주장할 수 없다. 따라서 5각형의 경우의 증명방법을 그대로 적용할 수 없다. 실제로, 각각의 연결성분내의 주대각선의 길이가 같아야한다는 사실은 이끌 수 있지만 각 연결성분내에서 주대각선의 길이를 같게 만드는 변형이 서로 간에 영향을 받는다. 따라서 짝수 $n(>5)$-각형인 경우는 <그림 III-8>과 같은 변형을 생각한다. <그림 III-8>의 (a)는 이전에 해결한 다각형의 정다각형의 변형이다. 이를테면 6-각형은 3각형, 8-각형은 4각형, 10-각형은 5각형, 일반적은 $2n$-각형은 $n$-각형의 정 $n$-각형의 변형이다. 따라서 <그림 III-8>의 (a)는 <그림 II-5>에 의


(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

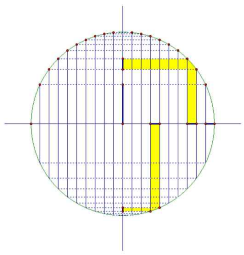
해서 넓이가 증가하는 변형이다. 이제, 우리가 증명해야할 사실은 '<그림 III-8>의 (b) 변형이 넓이를 증가시키다'라는 것이다. 이것의 증명은 다음 2절에서 논의하며, 결국 이 증명은 <그림 III-6>의 일반화와 관련되어 있다.




<그림 III-8> 등변 짝수-각형의 두 변형

## 1. 부등식 (1)의 증명

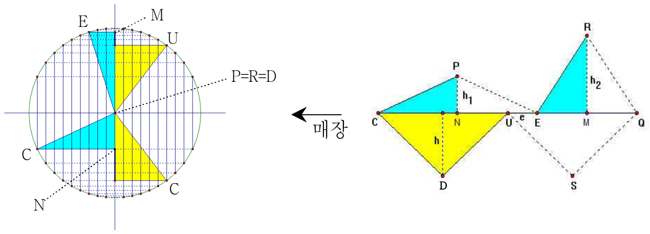
부등식 (1)의 증명은 <그림 III-6>의 선분 $\overline{CQ}$ 위·아래 있는 삼각형을 <그림 III-10>와 같이 하나의 원에 매장(embedding)하고 생각하면 쉽게 해결된다. <그림 III-10>에서 $\overline{CN}+\overline{EM}=\overline{CU}=b$ 이고, $x$-축을 등분하고 이에 따라 $y$-축의 변화를 살펴보자. 실제로, $x$-축의 등간성이 $y$-축에서는 유지가 되지 않는다. 다시 말해서, <그림 III-9>와 같이 $x$-축에서는 같은 변화량일지라도 원의 가장 자리로 갈수록 $y$-축의 변화량이 작아짐을 알 수 있다[4].



<그림 III-9> $x$-축의 같은 변화에 따른 $y$-축의 변화량

4) 실제로 $y=\sqrt{1-x^2}$ 의 도함수는 $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ 이고, $x$의 값이 1에 가까울수록 절댓값이 커다는 것을 알 수 있다.

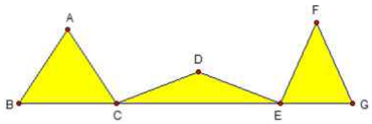
따라서 $h_1 + h_2 \leq 2h$ 이다.




<그림 III-10> $\frac{1}{2} \times (h_1 + h_2) \leq h$

## 2. 일반화

이절에서는 앞선 절에서 해결한 문제를 일반화하고자 한다. 이것은 짝수 다각형의 등각을 보일 때 사용할 수 있는 아이디어와 관련되어있다(<그림 III-8>의 (b) 참고). <그림 III-11>에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG}$일 때, 세 삼각형의 넓이 합을 최대로 만드는 두 동점 $C$와 $E$의 위치를 찾는 문제를 해결하고 이로부터 일반적인 경우로의 확장에 대한 아이디어를 찾는다.



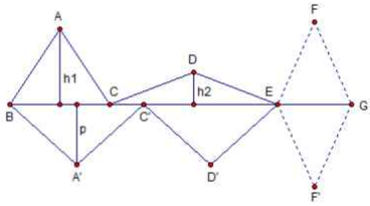

<그림 III-11> 삼각형이 세 개인 경우의 변형

삼각형의 개수가 두 개인 경우의 아이디어를 사용하기 위해서, 먼저, <그림 III-11>에서 세 삼각형의 밑면의 길이가 선분 $\overline{BG}$ 길이의 $\frac{1}{3}$보다 작은 경우가 있다고 가정하자. 여기서 선분 $\overline{BG}$의 길이의 $\frac{1}{3}$보다 작은 밑면을 가지는 삼각형 하나를 선택한다. 일관성을 잃지 않고 선택된 삼각형이 가장 오른쪽에 있다고 가정한다. <그림 III-11>에서 $\triangle EFG$의 변인 선분 $\overline{EG}$의 길이는 선분 $\overline{BG}$의 길이의 $\frac{1}{3}$보다 작음을 알 수 있다.

이제, 삼각형 $\triangle EFG$를 고정하고, 나머지 두 삼각형 $\triangle BAC$와 $\triangle CDE$의 변형을 <그림 III-12>와 같이 생각해보자. 여기서 점 $C'$은 선분 $\overline{BE}$의 중점이고 $\overline{BA'} = \overline{A'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E}$ 이다. 따라서 두 삼각형 $\triangle BA'C'$과 $\triangle C'D'E$는 합동이다. 그러므로 앞선 절(<그림 III-6> 참고)에 의하여 다음을 알 수 있다.

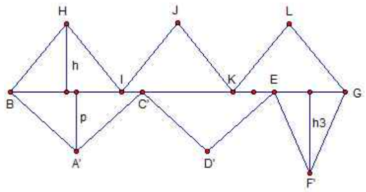
(a) $\triangle BAC$의 넓이+$\triangle CDE$의 넓이 $\leq$ $\triangle BA'C'$의 넓이+$\triangle C'D'E$의 넓이 $\cdots\cdots$ (3)

(b) $\frac{1}{2}\times(h_1+h_2)\leq p$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4)



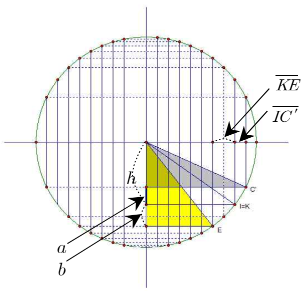

<그림 III-12> 두 삼각형의 변형

한편, <그림 III-13>의 선분 $\overline{BG}$의 위와 아래에 있는 삼각형들의 넓이의 합을 비교해보자. 여기서 $\overline{BH}=\overline{HI}=\overline{IJ}=\overline{JK}=\overline{KL}=\overline{LG}$ 이고 또한 $\overline{BI}=\overline{IK}=\overline{KG}=\frac{1}{3}\overline{BG}$ 이다.




<그림 III-13> 넓이 비교

<그림 III-13>에서 두 삼각형 $\triangle BA'C'$과 $\triangle C'D'E$는 합동이므로 $2\times\overline{IC'}=\overline{KE}$이고, 따라서 <그림 III-14>로부터 $b\leq 2a$가 성립함을 알 수 있다.




<그림 III-14> $b\leq 2a$

편의상 $\overline{BI}=\overline{IK}=\overline{KG}=\frac{1}{3}\overline{BG}=l$, $\overline{IC'}=e$ 라고 두자. <그림 III-12>, <그림 III-13>과 <그림 III-14>에서 $p=h-a$ 이고 $h_3=h+b$ 이기 때문에 다음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\triangle BA'C' \text{의 넓이}+\triangle C'D'E\text{의 넓이}+\triangle EF'G \text{의 넓이}\\
&\quad=\frac{1}{2}\times(l+e)\times p+\frac{1}{2}\times(l+e)\times p+\frac{1}{2}\times(l-2e)\times h_3\\
&\quad=(l+e)\times(h-a)+\frac{1}{2}\times(l-2e)\times(h+b)\\
&\quad=\frac{3}{2}\times l\times h+\frac{1}{2}(b-2a)-e(a+b)\\
&\quad\leq\frac{3}{2}\times l\times h\quad(b-2a\leq 0\text{이고 }-e(a+b)\leq 0\text{이기 때문에})\\
&\quad=\triangle HBI\text{의 넓이}+\triangle JIK\text{의 넓이}+\triangle LKG\text{의 넓이}
\end{aligned}$$

따라서 식 (3)과 $\triangle FEG$ 의 넓이=$\triangle F'GE$ 의 넓이라는 사실에 의해서 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\triangle ABC\text{의 넓이}+\triangle CDE\text{의 넓이}+\triangle FEG\text{의 넓이}\\
&\quad\leq\triangle BA'C'\text{의 넓이}+\triangle C'D'E\text{의 넓이}+\triangle F'GE\text{의 넓이}\\
&\quad\leq\triangle HBI\text{의 넓이}+\triangle JIK\text{의 넓이}+\triangle LKG\text{의 넓이}
\end{aligned}$$

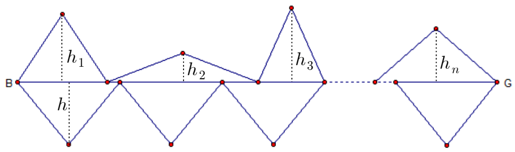
또한 식 (4)와 $p=h-a$, $h_3=h+b$, 그리고 $b\leq 2a$에 의해서 다음 식을 얻는 수 있다.

$$\frac{1}{3}\times(h_1+h_2+h_3)\leq\frac{1}{3}\times(2p+h_3)=\frac{1}{3}\times(2h-2a+h+b)\leq h$$

한편, 삼각형이 두 개인 경우를 세 개인 경우로 확장하는 아이디어를 사용하면 삼각형의 개수가 $n(\geq 4)$인 경우에도 유사한 결론을 얻을 수 있다. 즉, <그림 III-15>의 삼각형들에서 선분 $\overline{BG}$ 위에 있는 선분을 제외한 다른 모든 삼각형들의 선분들의 길이가 같을 때 다음을 알 수 있다.

(a) 선분 $\overline{BG}$를 같은 길이의 $n$개의 선분으로 분할하는 점에 의해서 만들어지는 삼각형들의 넓이 합이 최대가 된다. 즉, <그림 III-15>에서 선분 $\overline{BG}$의 아래 부분에 있는 합동인 $n$개의 삼각형들의 넓이 합이 최대가 된다.

(b) $\frac{1}{n}\times(h_1+h_2+\cdots+h_n)\le h$, 여기서 $h_i(1\le i\le n)$는 선분 $\overline{BG}$의 위에 있는 $i$번째 삼각형의 높이이고, $h$는 선분 $\overline{BG}$의 아래에 있는 합동인 삼각형들의 높이를 의미한다.




<그림 III-15> $n$개 삼각형의 균형화

## Ⅳ. 교육적 시사점

일반적으로 다각형의 등주문제는 주로 원의 내접다각형의 관점으로 해결책을 모색한다(이광연, 1998; http://dmat.cfm.cl/colloquium/2010-07-09-15:00.pdf). 반면, 이 논문에서는 대각선길이의 균형화의 관점에서 다각형의 등주문제 해결책을 고찰하고 있다. 실제로, 다각형의 등주문제 해결책을 <그림 II-1>의 아이디어를 사용하여 등변의 문제뿐만 아니라 등각의 문제 모두에 적용하려는 아이디어로부터 대각선길이의 균형화의 문제가 나타났다. 이러한 관점에서의 등각의 문제를 해결하기 위한 증명은 GSP(Geometer's Sketchpad)를 이용한 조작적인 검증(최근배, 2009, p. 236; 2011, p. 454)이 있지만 수학적인 증명으로서는 명확성이 부족하다. 이 논문의 목적은 등각의 문제를 학생들의 입장에서 좀 더 수학적인 정당성을 추구하고자 연구된 논문이다. 구체적으로, <그림 III-1>, <그림 III-10>, <그림 III-12>, <그림 III-13>과 <그림 III-14>는 원 속으로의 매장(embedding) (원과의 관계적 이해; relational understanding with circle)을 통한 기하적인 증명을 보여주고 있으며 이러한 아이디어들은 다년간의 영재교육 프로그램 개발과정에서 도출된 것이다.

앞선 분석을 통해서 얻을 수 있는 교육적 시사점은 <그림 II-1>, <그림 III-1>, <그림 III-10>, <그림 III-12>, <그림 III-13>과 <그림 III-14>와 같은 아이디어는 관계적 이해의 관점에서 기하적인 공간감각을 기를 수 있는 좋은 학습 자료가 될 수 있으며, 또한 3장의 2절은 원을 매개체로 한 기하적인 변환과 대수적인 식과의 관계를 이어주는 좋은 학습소재가 될 수 있다. 기하적인 변환은 아이디어를 제공하고 대수적인 식은 이러한 아이디어를 정당화 한다.

# 참고문헌

[1] 남승인·류성림·권성룡·김남균·신준식·박성선·박만구·최근배·권점례 (2013). 2009 개정교육과정에 의한 초등수학교육론, 서울: 경문사

[2] 우정호 (2006). 수학학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.

[3] 이광연 (1998). 등주문제에 관한 연구. 성균관대학교 교육대학원.

[4] 최근배 (2009). 초등수학 영재를 위한 평면에서의 등주문제 고찰(게슈탈트 관점을 중심으로), 학교수학, 11(2), pp. 227-241.

[5] 최근배 (2011). 초등 영재 교수 · 학습을 위한 평면에서의 등주문제 내용구성 연구 -기하적인 방법을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 50(4), 441-466.

[6] Blasjo, V. (2005). The Evolution of the Isoperimetric Problem, *The American Mathematical Monthly, 112*, pp. 526-566.

[7] Skemp R. R. (1989) (김판수 · 박성택 역). 초등수학교육, 서울: 교우사.

[8] Spivak, M. (1979), A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. 4, 2nd ed., Publish or Perish, Berkeley, CA.

[9] Tall, D. (1991). 고등수학적사고, (류희찬 · 조완영 · 김인수 역). 서울: 경문사.

[10] Tapia, R. A. (2009). The Remarkable Life of the Isoperimetric Problem: The World's Most Influential Mathematics Problem.
http://www.princeton.edu/~wmassey/CAARMS15/PDF/Tapia.pdf

Jaun Lee
Department of Mathematics
Yeungnam University
Kyongsan 712-749, Korea
E-mail: julee@yu.ac.kr

Keunbae Choi
Department of Mathematics Education, Teachers College
Jeju National University
Jeju 690-781, Korea
E-mail: kbchoe@jejunu.ac.kr