

논문 2015-52-8-17

표적기동분석을 위한 Levenberg-Marquardt 적용에 관한 연구

(Study on Levenberg-Marquardt for Target Motion Analysis)

조 선 일*

(Sunil Cho[©])

요 약

Levenberg-Marquardt은 최소자승법 문제의 풀이법으로 잘 알려져 있다. 하지만 이전의 표적기동분석(TMA)의 추적필터의 경우 대부분 Gauss-Newton방법을 사용하고 있으며 Gauss-Newton은 역행렬 연산이 요구되어 시스템을 불안정하게 만드는 문제점이 있다. 본 논문에서는 Gauss-Newton의 수치적 불안정성을 해결하기 위해 TMA에 Levenberg-Marquardt을 적용하여 Levenberg-Marquardt이 적용된 표적기동분석 알고리즘의 안정성을 실험으로 보인다. 이를 위해 실험에서는 Monte-Carlo 시뮬레이션을 3개 시나리오에 대하여 수행하였으며 그 결과 Levenberg-Marquardt이 Gauss-Newton에 비하여 표적기동분석 결과인 거리, 침로, 속력의 수렴되는 시간이 빨라졌으며 행렬의 발산빈도가 저하되어 표적기동분석 결과가 안정화되었다.

Abstract

The Levenberg-Marquardt method is a well known solution about the least square problem. However, in a Target Motion Analysis(TMA) application most of researches have used the Gauss-Newton method as a batch estimator, which of inverse matrix calculation may causes instability problem. In this paper, Levenberg-Marquardt method is applied to TMA problem to prevent its divergence. In experiment, its performance is compared with Gauss-Newton in domain of range, course and speed. Monte Carlo simulation reveals the convergence time and reliability of the TMA based on Levenberg-Marquardt.

Keywords : Target Motion Analysis(표적기동분석), Least Square Problem(최소자승법), Levenberg-Marquardt

I. 서 론

해양에서 표적을 탐지 및 추적하는 방법은 표적이 방사하는 소음을 획득하는 수동센서에 의한 방법과 관측자가 송신한 신호의 반향음을 이용하는 능동센서에 의한 방법으로 나누어진다. 이때 능동센서의 경우 탐지거리가 수동센서에 비하여 짧으며 관측자의 위치가 노출

될 수 있는 단점이 있다. 따라서 수중에서 은밀성이 강조되는 잠수함의 경우 수동센서로 신호를 획득하고 표적기동분석(TMA)을 이용하여 획득된 신호로 표적의 거리, 침로, 속력 등의 상태정보를 추정한다.

비선형 최소자승법을 풀기 위해 다양한 알고리즘이 존재하며 대표적으로 Gradient Descent, Newton-Raphson, LM(Levenberg-Marquardt)을 이용한 방법이 있다. Gradient Descent 방법은 초기값으로부터 시작하여 함수의 Gradient의 반대방향으로 진행하여 최소값을 찾는 방법이다. Gradient에 비례하는 크기로 탐색을 진행하기 때문에 해에 근접할수록 수렴속도가 늦어진다는 단점이 발생한다. Newton-Raphson 방법은 기본적으로 목적 함수의 값이 0이되는 지점을 수치적

* 정회원, 국방과학연구소 제 6기술연구본부 함정전투 체계개발단
(Naval combat systems PEO, Agency for Defence Development)

© Corresponding Author(E-mail: sunilcho@add.re.kr)

Received ; February 9, 2015 Revised ; July 13, 2015

Accepted ; July 30, 2015

(Numerical)으로 반복적 과정을 통해 찾아가는 것이다. 이때 목적 함수가 어떤 함수의 1차미분 형태라고 한다면 Newton-Raphson을 이용해 최소자승법 문제를 풀 수 있다. 그러나 이러한 경우에 Newton-Raphson은 2차 미분의 계산이 필요하게 되어 일반적으로는 계산이 어렵다. 따라서 현실적으로 2차미분을 근사화하여 이용하는 Gauss-Newton 방법이 표적기동분석을 푸는데 주로 이용된다^[2]. LM 방법은 Gradient Descent 방법과 Gauss-Newton 방법을 결합한 방식으로 해에 근접한 경우는 Gauss-Newton, 반대의 경우에는 Gradient Descent 방법이 동작하도록 설계한 알고리즘이다^[3]. LM 방법의 경우 타 분야에서는 비선형 최소자승법 계산시 현재까지 많이 쓰이고 있다. Chan은 가까운 시간 내의 교통량 흐름을 예측하기 위해 Neural network를 학습시키는 과정에서 weight의 업데이트에 LM을 적용하였으며^[4], Xiang은 병렬의 LM을 사용하여 현미경 이미지 처리의 속도를 향상 시켰다^[5].

기존의 일괄처리방법을 이용한 표적기동분석에 대한 연구에서는 Gauss-Newton방법의 알고리즘이 많이 연구되었다^{[6], [7], [8]}. 하지만 Gauss-Newton의 경우 역행렬 계산이 필요하다. 역행렬 계산 시에 근사화된 Hessian 행렬의 행렬식(Determinant)이 0에 가까워질수록 수치적으로 불안정성이 커지게 되어 해가 발산할 위험성이 생긴다. LM 방법은 근사화된 Hessian 행렬에 대각 행렬을 더하여 행렬식이 0에 가까워지는 것을 줄이며 상황에 따라 Gradient Descent와 Gauss-Newton 방법이 해를 추정하는데 미치는 영향을 조절한다.

본 논문에서는 표적기동분석에 LM을 적용하여 입력 데이터 중 방위각만 이용하는 BOTMA(Bearing Only Target Motion Analysis)에서 표적의 위치, 침로, 속력의 상태정보를 추정하는 시스템을 제안한다. 또한 LM의 표적기동분석 결과가 Levenberg방법과 Gauss-Newton에 비하여 수렴성능이 우수하며 수치적 불안정성을 감소시킨다는 것을 실험으로 보인다.

본 논문의 II장에서는 표적기동분석과 최소자승법에 대하여 설명하고 III장에서는 논문에 활용된 LM 방법에 대하여 설명한다. IV장에서는 LM을 적용한 표적기동분석 알고리즘을 제안하며 V장에서는 해당 알고리즘이 기존에 Gauss-Newton을 이용한 것에 비해 성능이 향상된 것을 실험으로 보이며 VI장에서 결론을 맺는다.

II. 표적기동분석과 최소자승법

표적기동분석은 자함이 측정한 방위각 및 주파수로 표적의 거리 및 침로, 속력등을 추정하는 기법이다. 본 논문에서는 방위각 정보만 이용하는 표적기동분석을 고려한다. 그림 1처럼 자함은 등속직선운동하는 표적의 방위각을 측정한다. 측정된 방위각에 기반하여 표적기동분석은 표적의 위치 및 속도를 추정하게된다. 표적기동분석을 위해 자함은 최소 1회 기동하여 가관측성을 확보해야한다.

표적기동분석은 식(1)과 같이 측정방위와의 차이를 최소화하는 추정방위 \hat{B}_i 를 구하는 비선형 최소자승법 문제로 표현할 수 있다.

$$F(x) = \sum_i (B_i - \hat{B}_i)^2 \quad (1)$$

B_i 는 i 번째의 측정방위, \hat{B}_i 는 i 번째의 추정방위이다. 표적기동분석에서는 표적이 등속직선운동을 한다고 가정하기에 추정방위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{B}_i = \arctan\left(\frac{\hat{X}_0 + \hat{V}_{x_0}t_i - X_{own}}{\hat{Y}_0 + \hat{V}_{y_0}t_i - Y_{own}}\right) \quad (2)$$

$\hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{V}_{x_0}, \hat{V}_{y_0}$ 는 각각 $t=0$ 시점의 표적의 위치 및 속도의 추정치이며 t_i 는 i 번째 입력이 들어온 시간, X_{own}, Y_{own} 는 자함의 위치이다. 결국 $x = (\hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{V}_{x_0}, \hat{V}_{y_0})$ 벡터에 대한 함수로 \hat{B}_i 의 표현이 가능하며 비선형 최소자승법을 풀기위해 Δx 를 반복적

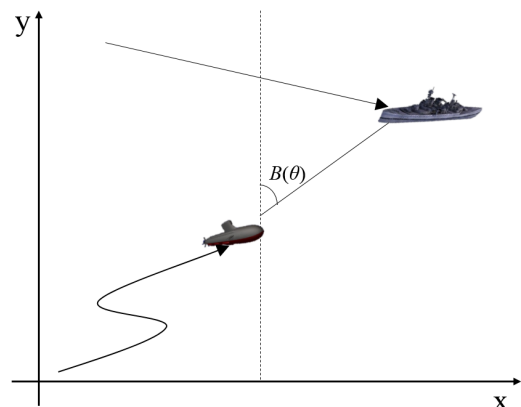


그림 1. 표적기동분석
Fig. 1. Target Motion Analysis.

으로 계산하여 추정해 x 를 구하게 된다.

시간에 따른 방위각들은 센서 상태나 자함의 기동 여부 등에 따라 부정확하게 방위각을 탐지할 가능성이 있다. 따라서 일반적으로 각각 방위각 측정치에 가중치를 부여한다. 식(1)을 가중치를 가지는 최소자승법으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{B(t_i) - \hat{B}(t_i, x)}{w_i} \right)^2 \\
 &= (B - \hat{B})^T W (B - \hat{B}) \\
 &= (B^T W \hat{B}) - 2B^T W \hat{B} + \hat{B}^T W B
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

여기서 $B = B(t_i)$, $\hat{B} = \hat{B}(t_i, x)$, w_i 는 i 번째 방위각에 대한 가중치, m 은 측정치의 전체 갯수다.

III. 표적기동분석과 최소자승법

1. Gradient Descent

Gradient Descent는 함수의 Gradient의 반대방향으로 탐색을 반복하여 $F(x) = 0$ 이 되는 극소점을 찾는 방법이다. Gradient Descent는 반복과정 중 실제 해의 근처에서 수렴속도가 급격히 감소하는 단점이 있지만 단순한 형태의 함수의 극소점을 찾는 데 매우 높은 수렴성을 갖는다고 알려져 있다. 최소자승법의 함수인 $F(x)$ 에 Gradient를 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} F(x) &= (B - \hat{B}(x))^T W \frac{\partial}{\partial x} (B - \hat{B}(x)) \\
 &= - (B - \hat{B}(x))^T W \frac{\partial \hat{B}(x)}{\partial x} \\
 &= - (B - \hat{B}(x))^T W J
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

J 는 $\hat{y}(t, x)$ 의 자코비언(Jacobian) 행렬이다.

따라서 Gradient Descent 방법에 의해 Gradient의 반대방향으로 Gradient의 크기에 비례하여 이동하는 벡터 h_{GD} 는 다음과 같다.

$$h_{GD} = \alpha J^T W (B - \hat{B})
 \tag{5}$$

여기서 α 는 Gradient Descent의 수렴을 위해 목표 함수에 따라 임의로 설정 가능한 값이다. 이때 α 값이 크면 해가 발산할 가능성이 있으며 반대로 α 값이 작으면 수렴속도가 늦어질 수 있다.

2. Gauss-Newton

Gauss-Newton은 식(3)의 $F(x)$ 가 볼록 함수(Convex function) 형태라고 가정하여 $F(x)$ 의 1차 미분이 0이 되는 x 를 찾아 최소자승법 문제를 푸는 Newton-Raphson 방법의 한 종류이다. Newton-Raphson은 그림 2와 같이 임의의 탐색점 x 에서 접선을 그린 뒤 접선이 x 축과 만나는 점으로 탐색점을 갱신시키는 과정을 반복하여 결국 함수가 0이 되는 x 를 수치적으로 찾는 알고리즘이다.

Newton-Raphson의 식은 다음과 같다.

$$x_{k+1} = x_k + H(x_k)^{-1} \nabla F(x_k)
 \tag{6}$$

x_k 는 k 번째 반복과정에서의 x 이다. 식(5)과 식(6)를 비교하여 보면 결국 Newton-Raphson은 Gradient Descent에서 Hessian 행렬의 역행렬이 곱해지는 형태로 h 가 결정되는 것을 알 수 있다. Hessian 행렬이 기울기의 변화 정도인 곡률을 반영하는 값이므로 x_k 가 실제 해에 근접하여 기울기의 크기가 작아져도 곡률의 변화가 또한 동시에 작아져 h 가 극히 작아지는 것을 막을 수 있다. 따라서 Newton-Raphson은 일반적인 경우 Gradient Descent에 비하여 수렴속도가 빠르다. 하지만 이렇게 $F(x)$ 의 2차미분인 Hessian 행렬 구하는 것이 일반적으로 매우 어렵고 계산량이 크다. 따라서 대다수의 문제에서는 Newton-Raphson을 사용할 수 없고 그 변형된 형태인 Gauss-Newton을 사용하게 된다.

Gauss-Newton이 Newton-Raphson과의 차이점은 x 의 인근에서 함수 $F(x)$ 를 선형으로 근사할 수 있다는 가정하에 문제를 푸는 것이다. 함수를 선형으로 근사하면 테일러급수에서 2차 이상의 항들을 무시할 수 있다.

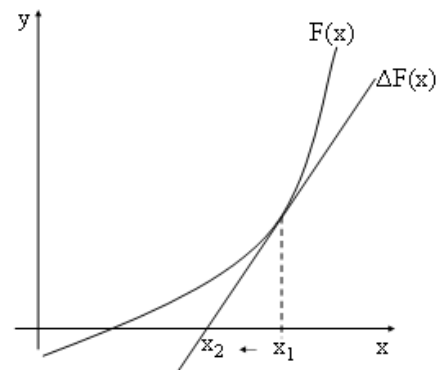


그림 2. Newton-Raphson 과정
Fig. 2. Process of Newton-Raphson.

식으로는 다음과 같다.

$$F(x) = \frac{1}{2} \|f(x)\|^2 = \frac{1}{2} f(x)^T w f(x) \quad (7)$$

$$f(x+h) = f(x) + J(x)h + O(\|h\|^2)$$

$f(x)$ 가 x 인근에서 선형으로 근사화된 형태를 $l(x)$ 이라고 한다면

$$f(x+h) \approx l(h) = f(x) + J(x)h \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F(x+h) &\approx L(h) = \frac{1}{2} l(h)^T l(h) \\ &= \frac{1}{2} f^T f + h^T J^T f + \frac{1}{2} h^T J^T J h \end{aligned}$$

식(8)에서 $L(h)$ 의 2차 미분을 구해보면 $J^T J$ 가 되고 이것이 $F(x)$ 의 근사화된 Hessian 행렬이 된다. 결국 Gauss-Newton은 x 의 인근에서 함수 $f(x)$ 를 선형으로 근사할 수 있다는 가정 하에 $F(x)$ 의 1차미분결과인 Jacobian 행렬로 $F(x)$ 의 2차 미분항인 Hessian 행렬을 표현할 수 있다. Gauss-Newton 방법에 의해 이동하는 벡터 h_{GN} 는 다음과 같다.

$$h_{GN} = -(J^T w J)^{-1} J^T w (B - \hat{B}) \quad (9)$$

결국 Gauss-Newton은 매 스텝마다 이동벡터 h_{GN} 을 구하여 실제해에 근접하게 된다.

Gauss-Newton은 Gradient Descent에 비하여 수렴속도가 빠르지만 식(9)에서 보듯이 $J^T J$ 에 대한 역행렬의 연산이 필요하다. 따라서 $J^T J$ 이 Singular의 형태와 유사한 경우 수치적으로 불안정해져 해가 발산할 가능성이 있는 문제점이 있다.

3. Levenberg-Marquardt

LM 방법은 Gauss-Newton의 수치적 불안정성을 해결하고자 고안되었다. 수치적 불안정성을 해결하기 위해 LM은 현재 단계에서 추정되는 해가 실제해와 차이가 적을 경우에는 Gauss-Newton 방법을, 실제해와 차이가 클 경우에는 Gradient Descent를 쓴다. 이를 LM 방법에 의해 이동하는 변화 벡터 h_{LM} 에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$h_{LM} = -(J^T w J + \mu_k \text{diag}(J^T w J))^{-1} J^T w (B - \hat{B}) \quad (10)$$

여기서 μ_k 는 설정 가능한 파라미터로 k 번째 반복단

계에서의 damping factor이다. μ_k 가 작다면 식(7)은 Gauss-Newton과 유사해지고 μ_k 가 크다면 식(7)은 Gradient Descent와 유사해지게 된다.

원래 Levenberg 방법의 경우 $\mu_k \text{diag}(J^T J)$ 대신 $\mu_k I$ 를 더해줘 Gradient Descent의 수렴속도 저하문제가 있었다. $\mu_k I$ 는 곡률의 변화가 반영되지 않기 때문에 x_k 가 실제 해에 근접하여도 단순히 μ_k 만큼의 이동만 가능하여 μ_k 에 따라 수렴속도의 저하가 있을 수 있다. 그것을 Marquardt가 개선하여 $J^T J$ 의 대각행렬에 비례하는 값을 더해주었다. 이 때문에 μ_k 가 클 경우에 Gradient Descent와 결과가 유사해지지만 Gradient Descent의 단점인 수렴속도 저하 문제가 해결될 수 있다. $J^T J$ 의 대각행렬의 원소는 근사화된 Hessian 행렬이므로 곡률을 반영하기 때문이다.

LM에서는 결국 Damping factor μ_k 의 초기치 μ_0 의 설정방법과 반복적으로 해를 찾는 단계마다 μ_k 를 어떻게 갱신할 것인가로 문제가 귀결된다. 다양한 방법이 존재하지만 본 논문에서는 다음과 같이 초기에 Marquardt에 의해 제안되었던 방법을 사용하였다. 먼저 μ_0 는 $k=0$ 인 단계에서 $\max(J^T J)$ 의 값으로 설정하였다. μ_k 은 식(11)의 $F(x+h)$ 와 $L(h)$ 의 유사도를 이득비율(Gain ratio)로 나타내어 갱신하였다. $F(x+h)$ 와 $L(h)$ 가 이동벡터 h_{LM} 에서 얼마나 유사한지는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\rho = \frac{F(x) - F(x+h)}{L(0) - L(h)} \quad (11)$$

그리고 μ_k 는 다음과 같이 ρ 에 의해 결정되며 본 논문에서는 LM에서 가장 일반적으로 사용되는 임계치(Threshold)를 사용하였다^[9].

$$\mu_k = \begin{cases} \mu_k = 2\mu_{k-1} & , \quad \rho < 0.25 \\ \mu_k = \mu_{k-1}/3 & , \quad \rho > 0.25 \end{cases} \quad (12)$$

식(10)를 보면 결국 h_{LM} 가 커서 $F(x+h)$ 와 $L(h)$ 차이가 클 경우에는 μ_k 를 증가시켜 Gradient Descent의 영향이 커지며 $F(x+h)$ 와 $L(h)$ 차이가 작아 선형근사가 잘 이루어졌을 경우에는 μ_k 가 작아져 Gauss-Newton의 영향이 커지게 된다.

4. Levenberg-Marquardt가 적용된 표적기동분석 방법

Gauss-Newton이나 LM은 두 알고리즘 모두 국소 최저치(Local minima)에 빠질 수 있는 문제점이 있다. 즉 적절한 초기(k=0)의 $\widehat{X}_0, \widehat{Y}_0, \widehat{V}_{x_0}, \widehat{V}_{y_0}$ 의 설정이 추정해가 국소 최저치에 수렴할지 실제 해에 수렴할지에 큰 영향을 미친다.

이를 해결하기 위해 본 논문에서는 처음 입력되는 방위각과 마지막으로 입력되는 방위각을 이용하여 식(13)과 같이 225개의 초기 p를 생성하고 225개 모두에 대하여 LM 방법을 통해 해를 찾는다.

$$x_0 = \begin{bmatrix} R_0 \sin(B_0) \\ R_0 \cos(B_0) \\ \frac{R_n \sin(B_n) - R_0 \sin(B_0)}{t_n} \\ \frac{R_n \cos(B_n) - R_0 \cos(B_0)}{t_n} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\{R_0 | R_0 = R_0^k, 1 \leq k \leq 15\}, \{R_n | R_n = R_n^k, 1 \leq k \leq 15\}$$

이다. 그 후 225개의 추정해 중 F(x)가 가장 작은 해를 최종 추정해로 결정하여 표적기동분석 결과가 국소 최저치에 빠지는 문제점을 해결한다.

방위각에 대한 가중치는 방위각의 분산, 센서 상태, 자함의 기동여부를 반영하여 구성한다. 일반적으로 센서들은 표적의 소음으로부터 얻어지는 방위각을 일정 시간동안 모아서 1개의 방위각을 계산하기에 방위각과 함께 분산을 함께 제공한다. 또한 센서는 입력되는 방위각에 따라 정확도에 차이를 가지며 자함이 변침을 수행할 때 획득되는 방위각의 경우 정확도가 매우 떨어지게 된다. 따라서 본 논문에서는 다음과 같이 가중치 w_i 를 구성한다.

$$w_i = \begin{cases} 0 & , \text{ownship manoeuvre} \\ 0 & , \text{sensor state is bad} \\ 1/\sigma_B & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

여기서 σ_B 는 센서로부터 주어지는 해당시점에 입력된 방위각의 분산값이다.

LM은 반복적인 계산과정을 통해 해를 추정한다. 따라서 효율성을 위해 추정해가 k단계와 k+1단계에서 차이가 적다면 계산과정을 멈추고 최종적인 추정해로 판단한다. 또한 k의 최대값 k_{max} 을 두어 계산과정이 발산되는 것을 막는다. 일반적으로 단계별 추정해의 차이

및 k_{max} 는 $J^T J$ 의 크기에 따라 시스템에 적합하도록 설계한다. 본 논문에서는 $J^T J$ 의 크기 뿐 아니라 표적기동분석이 3600초간 실시간으로 계산이 수행한다고 가정하였기에 계산시간의 단축을 위해 $k_{max} = 10$ 으로 설정하였으며 단계별 추정해의 차이가 $\|\Delta p\| < 10^{-4}$ 을 만족하면 해를 찾았다고 판단하도록 알고리즘을 구성하였다.

IV. 실험 및 결과

LM이 기존의 Gauss-Newton 과 Levenberg 방법에 비하여 수렴 성능이 안정적이며 빠르다는 것을 최종 추정해의 거리, 침로, 속력오차로 비교 하였다. 또한 LM이 적용된 표적기동분석이 발산의 가능성이 적다는 것을 보이기 위해 초기 p의 225개의 결과에 대한 발산여부를 비교 실험하였다. 실험을 위하여 3개의 시나리오에 대하여 실험을 수행하였으며 궤적은 그림 3과 같다

시나리오들은 가상의 궤적으로 방위각 소음은 $N(0,1)$ 의 AWGN으로 입력된다고 가정하고 시뮬레이션 하였다. 방위각 입력에 변화를 주기위하여 표적 및 자함의 시작점 및 침로를 달리하여 실험하였다.

실험에서는 Gauss-Newton과 LM으로 각각 해를 추정하고 추정해와 실제해의 차이를 거리, 침로, 속력에 대하여 성능을 분석하였다. 객관적인 결과의 분석을 위하여 각 시나리오에 대하여 Monte Carlo 시뮬레이션을 20회 수행하였다. Monte Carlo 시뮬레이션의 성능 오차는 식(15)와 같다.

$$m(t) = \frac{1}{20} \sum_i e_i(t), \sigma = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_i (e_i(t) - m(t))^2}$$

$$e_i^R = \frac{\widehat{R}(t) - R(t)}{R(t)} \circ 100, \quad (15)$$

$$e_i^C = \widehat{C}(t) - C(t), e_i^S = \widehat{S}(t) - S(t)$$

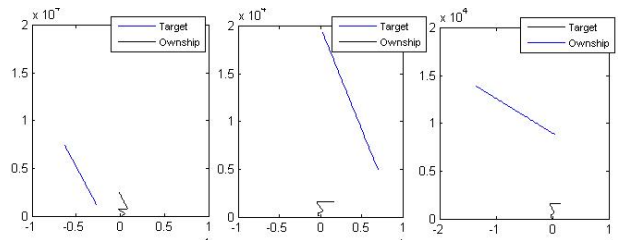


그림 3. 시나리오 궤적
Fig. 3. The trace of scenario.

$m(t)$ 는 20회 수행시에 실제해과의 오차의 평균이며 σ 는 표준편차이다. 이때 실제해과 추정해의 차이인 e_i 는 침로와 속력에 대해서는 실제해와 추정해간의 차로 오차를 측정한다. 하지만 거리 오차는 표적기동분석에 입력값을 제공하는 센서의 특성이, 거리가 멀수록 잡음과 실제 방위각 움직임 구별하기 어려운 것을 감안하여 실제 거리 대비 오차 비율로 나타낸다. 그림 4은 3개 시나리오에 대한 거리 오차이다.

그림 4에서 사나리오 1의 거리오차를 보게 되면 세 방법이 비슷한 곡선을 보인다. 모두 가관측성이 확보되는 280부터 수렴을 시작한다. 하지만 LM과 Levenberg 방법은 Gauss-Newton보다 40초 전에 20%오차 범위에 들어온다. 시나리오 2는 시나리오 1에 비하여 Gauss-Newton과 LM의 수렴 속도가 차이가 크다. LM은 240초 이후부터 수렴된 결과를 보이기 시작하는 반면 Gauss-Newton의 경우 480초에 도달하는 시점에서야 발산하던 해가 급격히 수렴하는 결과를 보인다. 240초 시점에서의 결과는 error가 10%정도로 실제해와의 차이는 있지만 수렴상태에 왔다는 것에 주목할 수 있다. Levenberg 방법은 수렴을 시작한 시점은 LM과 비슷하지만 이후에 460초부터 880초까지 10% 내외의 오차를 보인다.

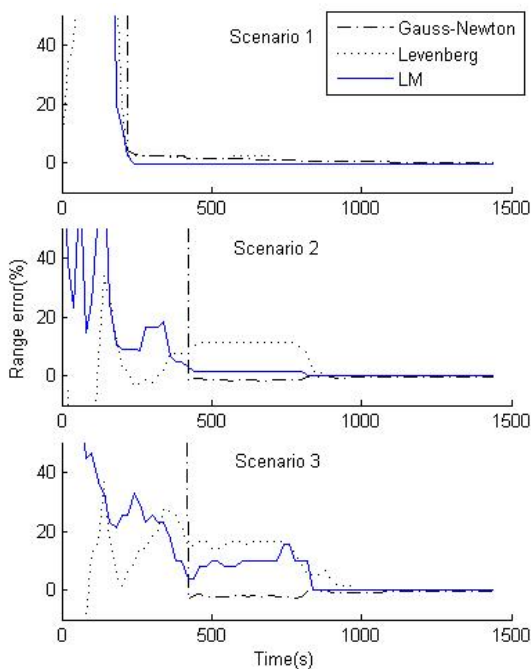


그림 4. 거리 오차
Fig. 4. Range error.

시나리오 3의 경우에도 Gauss-Newton이 480초 이전에서는 발산하는데 비해 LM은 220초 이후부터 20%정도의 오차는 존재하지만 수렴하는 곡선을 보이는 것을 관찰할 수 있다. 침로에 대한 오차 결과는 그림 5다.

그림 5의 경우에 시나리오 1의 경우 LM과 Levenberg 방법은 유사한 곡선을 보인다. 두 방법을 Gauss-Newton과 비교하여도 수렴시점은 차이가 없다. 이는 표적기동분석의 추정해에서 침로의 변화는 크지 않는 것과 관계가 있다.

일반적으로 표적기동분석시에 침로는 초기에 실제해와는 다른 추정해 일지라도 어느정도 수렴하는 경향을 보인다. 이는 방위각에 의한 표적의 기동정보 추정에서는 표적의 시작과 끝점의 위치가 변화하여도 침로의 변화는 크지 않기 때문이다. 또한 $C = \arctan(VX_{own}/VY_{own})$ 로 침로는 자함의 속력성분들의 발산하여도 침로 성분은 $0^\circ-360^\circ$ 사이에서 존재하는 점도 영향을 미친다.

시나리오 2의 경우에는 LM과 Levenberg 방법은 200초부터 10° 이하로 수렴하였다. 이에 반해 Gauss-Newton은 480초 전까지 발산하고 있는 모습을 보인다. 시나리오 3의 경우에는 LM과 Gauss-Newton은 유사한 형태를 보이나 곡선의 완만함에서 차이가 있다.

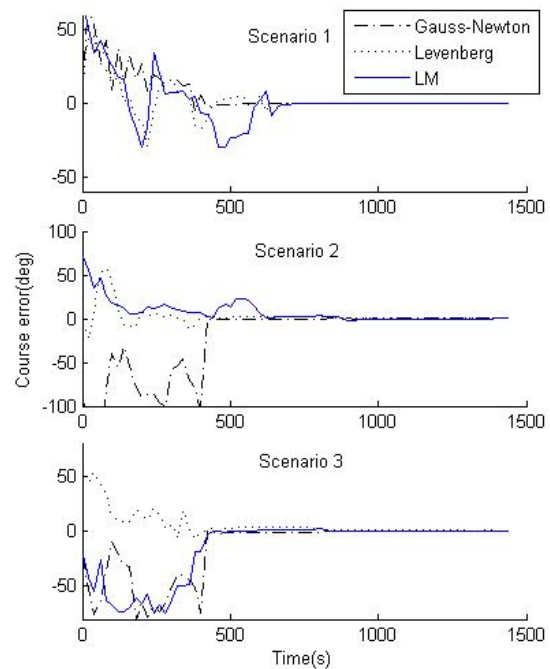


그림 5. 침로 오차
Fig. 5. Course error.

Gauss-Newton은 발산의 형태를 보이고 LM은 잘못된 해를 구하고 있으나 완만한 곡선의 형태를 보인다.

속력에 대한 오차 결과는 그림 6이다. 그림 6에서 속도오차의 경우 실험 결과가 거리오차와 그래프의 형태가 유사한 것을 알 수 있다. 시나리오 1의 경우 거리 오차와 마찬가지로 LM과 Levenberg 방법은 Gauss-Newton이 수렴하기 40초전에 속도오차가 10m/s 이내로 수렴한다. 시나리오 2와 3의 경우에도 Gauss-Newton이 수렴하는 480초 이전부터 LM과 Levenberg 방법은 10m/s 이내로 수렴되어 있다. 속력의 수렴에 있어서 10m/s의 오차는 크다고 할 수 있다. 하지만 LM과 Levenberg방법이 초반에 어느정도 수렴을 보인다는 것은 방위각정보가 적은 표적기동분석 초기에 Gauss-Newton에 비하여 안정적인 계산이 가능하다는 점을 알 수 있다. Gauss-Newton의 경우 거리 오차와 속도오차에서 480초를 기점으로 매우 급격하게 변화하는 것을 관찰할 수 있으며 이는 Gauss-Newton은 가관측성이 확보된 정보량이 충분히 수집되기 전에는 발산한다는 것이다.

전체적으로 실험의 결과에서 LM과 Levenberg방법은 유사한 그래프의 추이를 보인다. LM과 Levenberg 방법의 큰 차이는 LM이 대각행렬을 이용하여

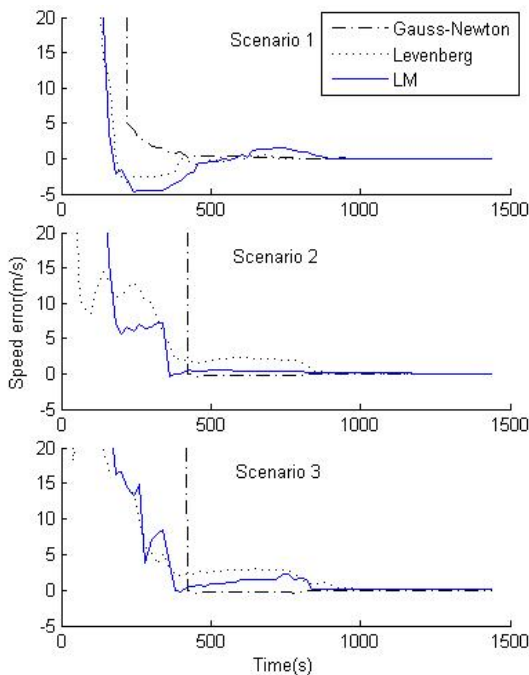


그림 6. 속도 오차
Fig. 6. Speed error.

Levenberg의 수렴속도를 개선한다는 점에 있다. 하지만 본 논문에서는 표적기동분석의 실시간 처리의 특성을 고려하여 탐색 반복 과정을 $k_{max} = 10$ 으로 제한하였기 때문에 두 방법의 성능은 큰 차이를 보이지 않았다. 그러나 변화가 적은 침로 오차를 제외하고 거리와 속도오차를 관찰하면 Levenberg 방법은 LM에 비하여 조금씩 성능이 떨어지는 모습을 확인할 수가 있다. 이러한 성능차이는 실험환경인 AWGN의 방위입력이 아닌 비선형적 입력특성이 두드러지는 실제 해상환경에서는 증가할 것이다.

LM이 $J^T J$ 의 수치적 불안정성을 해결할 수 있다는 점을 보이기 위해 다음과 같이 실험하였다. t_i 시점에서 표적기동분석에서 해를 구하기 위하여 식(13)에서 225개의 초기 p 를 생성하고 이에 대하여 최소자승법을 풀다고 언급했었다. 실험에서는 이 과정에서 $(J^T J)^{-1}$ 가 발산하는 개수를 체크하였다. 여기서의 발산이란 C언어 프로그램이 연산 결과로 NaN이나 Inf등을 반환하는 경우로 협소하게 정의하였다. 이 또한 Monte Carlo 20회를 수행하여 225개중 발산하는 p 가 각 시나리오 당 평균적으로 몇 개인지 위의 실험과 동일하게 세가지 시나리오에 대하여 수행하였다. 결과는 표 1과 같다.

세 시나리오 모두 Gauss-Newton에서는 225개의 p 중 약 2%에 해당하는 각각 평균 3.7, 3.8개의 p 가 발산하였다. Levenberg 방법과 LM에서는 각각 $\mu_k I$ 와 $\mu_k \text{diag}(J^T J)$ 가 Hessian 행렬에 더해진 결과로 역행렬 계산이 안정화되어 발산이 발생하지 않은 것을 관찰할 수 있다.

본 실험에서는 연산이 전혀 불가능할 경우로 발산의 개념을 협소하게 정의하였는데도 불구하고 약 2%의 확률로 발산한 것이다. 따라서 우리는 식(6)에서 Gauss-Newton이 $J^T J$ 의 표적기동분석시에 최소자승법

표 1. Hessian 행렬의 발산 빈도
Table 1. The number of times for Hessian Matrix' divergence.

	Gauss-Newto n	Levenberg	LM
시나리오1	4.81	0	0
시나리오2	3.73	0	0
시나리오3	3.82	0	0

문제를 풀이하는 과정에서 수치적 불안정성을 가진다는 점을 확인할 수 있다. 이러한 수치적 불안정성은 그림 4와 6의 거리와 속도 오차에서 Gauss-Newton 결과가 LM이나 Levenber방법과 달리 그래프의 일정 시점에서 수직에 가까운 형태로 수렴하는 것과 관계가 크다고 할 수 있다.

V. 결 론

본 논문은 표적기동분석에 최소자승법의 풀이법 중 하나인 LM 방법을 적용하였다. 기존의 Gauss-Newton 기반의 표적기동분석 방법과 비교하여 LM이 빠른 시간에 수렴성을 보이는 것을 보이고 또한 Gauss-Newton의 수치적 불안정성을 해결하고 있다는 것을 실험으로 보였다. LM이 Gauss-Newton보다 빠른 시간에 수렴성을 보이는 이유는 두가지로 요약된다. 초기에 Gradient Descent의 영향으로 이동량이 커서 실제 해에 빨리 가까워 질 수 있다는 점과 수치적 불안정성이 작아진다는 점이다. 이 두가지는 표적의 추적까지 걸리는 시간 소요가 자함의 생존성에 큰 영향을 미치게 되는 표적기동분석 시스템의 특성상 매우 중요한 요소이다.

REFERENCES

- [1] N. Steven C and A. Vincent J, "Observability criteria for bearings-only target motion analysis," IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, 1981, 2: 162-166.
- [2] G. Patrick and P. Rik, "A gauss-newton-like optimization algorithm for weighted nonlinear least-squares problems," IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44.9: 2222-2228.
- [3] M. Donald W, "An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters," Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics, 1963, 11.2: 431-441.
- [4] CHAN Kit Yan, et al, "Neural-network-based models for short-term traffic flow forecasting using a hybrid exponential smoothing and Levenberg-Marquardt algorithm," IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems, 2012, 13.2: 644-654.
- [5] ZHU Xiang, and ZHANG Dianwen, "Efficient

Parallel Levenberg-Marquardt Model Fitting towards Real-Time Automated Parametric Imaging Microscopy," PloS one, 2013, 8.10: e76665.

- [6] NARDONE, Steven C., LINDGREN, Allen G., and GONG, Kai F., "Fundamental properties and performance of conventional bearings-only target motion analysis," IEEE Trans. Automatic Control, 1984, 29.9: 775-787.
- [7] Nardone, Steven C., and Marcus L. Graham, "A closed-form solution to bearings-only target motion analysis," IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1997, 22.1: 168-178.
- [8] DOĞANÇAY Kutluyıl, "On the efficiency of a bearings-only instrumental variable estimator for target motion analysis," Signal processing, 2005, 85.3: 481-490.
- [9] D. W. Marquardt, "An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters," Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, 11:431-441

저 자 소 개



조 선 일(정희원)

2006년 KAIST 정보통신공학과
학사 졸업.

2010년 KAIST 정보통신공학과
석사 졸업.

2010년~현재 국방과학연구소
연구원

<주관심분야 : 표적기동분석, Kalman filter>