

기울기 부호를 이용한 폭발자기회귀검정 연구

하정철¹ · 정중문²

¹²계명대학교 통계학과

접수 2015년 4월 26일, 수정 2015년 5월 18일, 게재확정 2015년 5월 28일

요약

랜덤워크가설이란 금융시장의 많은 시계열자료가 과거의 값과 관계없이 독립적으로 움직인다는 이론이다. 랜덤워크가설은 ARMA 모형에서 단위근 존재여부 문제로 해석되는데 대부분의 연구는 AR(1) 모형에서 $\rho < 1$ 여부를 검정하는 문제에 집중되어 왔다. 그러나, $\rho > 1$ 인 폭발자기회귀모형을 따르면 거품경제의 위험이 있게 되므로 이를 구분하는 것이 필요하다. 폭발자기회귀모형에서 모수 추정량의 점근분포에 대해 알려져 있으나 그 형태가 모수를 포함하고 있어 통계량으로 부적절하거나 모수에 특정한 구조를 가정하고 있어 사용하기 쉽지 않다. 본 연구에서는 소규모자료에서도 사용할 수 있는 기울기부호를 이용하여 폭발자기회귀모형에 대한 검정을 제시한다. 모의실험을 통해 검정 통계량의 성질을 확인한 결과, 오차항의 종속 정도에 따라 통계량의 분포가 일정한 경향을 따르는 것을 알 수 있었다. 대립가설이 참일 경우 통계량의 값이 커지는 성질을 이용하여 검정할 수 있음을 확인할 수 있었다.

주요용어: 단위근검정, 부호검정, 종속오차, 폭발자기회귀모형.

1. 서론

금융시장의 예측이 어려운 것은 널리 알려져 있으며 이를 이론적으로 설명하는 방법 중의 하나가 랜덤워크가설이다. 예를들어, 주가는 과거의 변화나 어떤 패턴에 제약을 받지 않고 독립적으로 움직이기 때문에 예측이 불가능하다는 주장이 있는 반면, 주가 예측 가능성의 증거를 제시하며 주식시장이 랜덤워크를 따르지 않는다는 주장이 혼재하고 있다. 이와 같이 금융시장이 랜덤워크를 따르는지 판단하는 문제에 대한 연구가 거듭되고 있지만 완벽하게 해결될 수 없는 난제로 남아있다. 계수가 ρ 인 AR(1) 모형에서 $\rho = 1$ 일 때 랜덤워크를 따른다고 하며 $|\rho| < 1$ 일 때 정상성을 가진다고 한다. Dickey와 Fuller (1979) 이래 랜덤워크연구는 정상성을 대립가설로 랜덤워크를 귀무가설로 설정한 것이 대부분이다.

만일 $\rho > 1$ 인 폭발자기회귀모형을 따르면 금융시장 거품경제와 같은 위험한 상황이 되는 것으로 이해할 수 있다. 경제현상에서 자산의 시장가격 (market value)과 내재가치 (fundamental value) 간의 차이를 거품으로 정의하는데 거품경제란 내재가치에 비해 시장가격이 과대평가된 경우를 말한다. 거품경제의 위험이 존재하면 정책변화가 필요하므로 이에 대한 판단이 중요한 문제가 된다.

본 연구에서는 ρ 의 변화에 따라 확률과정의 성질이 어떻게 변하는지 살펴보고 이를 알아낼 수 있는 검정통계량에 대해 알아본다. 연속하는 두 점 사이의 기울기를 이용한 부호검정통계량이 랜덤워크와 폭발자기회귀모형에서 어떤 성질을 가지는지 정리한다. 오차항이 독립이거나 MA(1)인 각 경우에 대해 시

¹ 교신저자: (704-701) 대구광역시 달서구 달구벌대로 1095, 계명대학교 통계학과, 부교수.
E-mail: jeicy@kmu.ac.kr

² (704-701) 대구광역시 달서구 달구벌대로 1095, 계명대학교 통계학과, 석사.

물레이션을 통해 부호검정통계량의 분포를 구하고 검정력을 비롯한 특징을 살펴본다. 오차항의 종속적인 성질이 통계량의 분포에 어떤 영향을 주는지 확인하여 통계량의 일반적인 성질을 확립하는 근거로 삼게 된다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 이론적 배경에 대해서 정리하고 3절에서는 부호검정통계량에 대한 시뮬레이션 결과와 그 의미를 해석한다. 마지막으로 이 연구의 결과를 요약하고 정리한다.

2. 이론적 배경

2.1. 랜덤워크

랜덤워크 (random walk)는 임의의 방향으로 향하는 연속적인 걸음을 나타내는 수학적 개념 (Pearson, 1905)으로 술에 취한 사람이 걷는 자취에 비유되기도 한다. 물리학에서는 액체나 기체 속에서 입자의 불규칙한 운동인 브라운운동 (Brownian motion)을 설명하는데 사용된다.

랜덤워크모형에서 흔히 다음 3가지 모형이 고려된다.

$$X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

$$X_t = a_0 + \rho X_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.2)$$

$$X_t = a_0 + a_1 t + \rho X_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.3)$$

식 (2.1)은 평균이 0인 AR(1) 모형, 식 (2.2)는 이동상수 (drift)가 존재하는 AR(1) 모형이며 식 (2.3)은 선형추세 (linear trend)가 존재하는 AR(1) 모형이다. 식 (2.2)와 (2.3)의 경우, 결정적성분 (deterministic component)을 추정해야하는 과정이 추가되어야 할 뿐만 아니라 (Fuller, 1976; Dickey와 Fuller, 1981) a_0 에 의해 시계열의 형태가 결정되므로 폭발자기회귀모형의 성질을 검토하는 것이 적절하지 않다. 따라서, 본 논문에서는 식 (2.1)에 대하여 ρ 의 변화에 따라 확률과정의 성질이 어떻게 변하는지 살펴보고 이를 확인할 수 있는 검정통계량에 대해 알아본다.

랜덤워크가설 (random walk hypothesis)이란 시계열이 과거의 변동이나 어떤 패턴에 제약받지 않고 독립적으로 움직인다는 가설이다. 주가가 랜덤워크가설을 따르는지 여부는 효율적시장가설 (efficient market hypothesis)의 성립여부와 일치한다. 효율적시장가설에서는 주식시장이 효율적이면 현재의 이용가능한 모든 정보가 이미 주가에 반영되어 있기 때문에 과거의 주가가 현재 혹은 미래의 주가에 아무런 영향을 미치지 않고 새로운 정보만이 주가변동을 유발하므로 주가는 예측이 불가능하다고 하며, 따라서 주가가 랜덤워크를 따른다고 설명한다 (Malkiel, 1973). 반면 효율적시장가설을 부정하는 입장에서는 주식 수익률이 예측가능하다는 증거가 많기 때문에 주식시장은 랜덤워크를 따르지 않는다고 주장한다 (Fama와 French, 1988).

2.2. 단위근검정

t 시점에서의 관측값이 X_t 인 절편이 없는 AR(1) 모형을 생각한다.

$$X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.4)$$

여기서 오차항 ϵ_t 는 $Var(\epsilon_t) = \sigma^2$ 이고 $P(\epsilon_t > 0) = P(\epsilon_t < 0) = 1/2$ 가 만족되는 확률변수이다. $\rho = 1$ 이면 비정상확률과정인 랜덤워크가 되며 단위근을 가진다고 한다. 이때, X_t 는 t 가 커질수록 분산이 커지게 된다. 시계열이 정상확률과정을 따르는지 혹은 비정상확률과정을 따르는지 여부를 판단하는 단위근검정 방법에는 Dickey와 Fuller (1979)에 의해 제시된 DF검정, Said와 Dickey (1984)가 제안한

ADF검정 등이 있다. 단위근 검정문제는 최근까지도 다양한 분야에서 사용되고 있다 (Kim과 Jeong, 2014).

DF검정은 최소제곱추정량 $\hat{\rho}$ 을 이용하여 단위근의 존재여부를 판단하는 방법으로 $\hat{\rho}$ 과 t -통계량 (t_ρ)은 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_t^2}, \quad t_\rho = \frac{(\hat{\rho} - \rho) \left(\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}.$$

여기서 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \hat{\rho} X_{t-1})^2$ 이다.

귀무가설인 $\rho = 1$ 일 때, DF검정통계량의 극한분포는 다음과 같다.

$$n(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(t) dW(t)}{\int_0^1 W^2(t) dt}, \quad t_\rho \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(t) dW(t)}{\left(\int_0^1 W^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

여기서 $W(t)$, $t \in [0, 1]$ 는 표준 위너과정 (standard Wiener process)이고 \xrightarrow{d} 는 분포수렴 (convergence in distribution)을 의미한다.

위의 분포는 쉽게 다를 수 있는 분포가 아니므로 Dickey와 Fuller (1979)는 모의실험을 통해 분포표를 제시하였다. 그러나, 오차항이 독립이 아닌 경우 제시된 분포와 실제 분포가 많은 차이를 보이는 문제점이 있고 (Schwert, 1987), 표본크기가 작고 ρ 가 1에 가까운 경우 낮은 검정력을 가지는 문제점이 있는 것으로 알려져 있다 (Hamilton, 1994). 이와 같은 단위근검정에 관한 연구는 $\rho = 1$ 인 귀무가설에 대하여 $|\rho| < 1$ 인 정상시계열을 검정하는 문제에 관한 것이다.

한편, 폭발자기회귀모형의 모수 추정량의 분포는 White (1958)에서 확인할 수 있다. 식 (2.4)에서 $X_0 = 0$, $\epsilon_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ 일 때 $\rho > 1$ 에서 $\hat{\rho}$ 과 t_ρ 의 분포는 다음과 같다.

$$\frac{\rho^n}{\rho^2 - 1}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow{d} Cauchy, \quad t_\rho \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

그리고 식 (2.4)에서 $X_0 = c$, $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ 일 때 $\hat{\rho}$ 과 t_ρ 의 분포는 Anderson (1959)에 의해 다음과 같다고 알려져 있다.

$$\frac{\rho^n}{\rho^2 - 1}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow{d} y/z, \quad t_\rho \xrightarrow{d} y|z| \left(\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 \sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} / z.$$

여기서 y 와 z 는 각각 $y_n = \sum_{t=1}^n \rho^{-(n-t)} \epsilon_t$, $z_n = \rho \sum_{t=1}^{n-1} \rho^{-t} \epsilon_t + \rho X_0$ 의 극한값이다.

이 외에도 특정한 ρ 의 구조를 가정한 Phillips (1986)의 연구도 있다. 그러나, White와 Anderson의 연구는 ρ 의 참값을 알아야 하므로 통계량으로 사용할 수 없고 Phillips (1986)의 연구와 달리 본 논문은 ρ 에 특정한 형태를 가정하지 않은 검정에 대해 다루게 된다.

2.3. 부호검정

부호검정 (sign test)은 자료정보의 일부분인 부호정보만을 활용하여 위치모수 (θ_0)에 대하여 검정하는 방법으로 관측값 X_t 와 위치모수 θ_0 의 차이에 대한 부호만을 이용한다. 이러한 부호검정은 모집단의 분포에 대한 가정을 필요로 하지 않는 비모수적 검정방법으로 부호만을 고려하여 생기는 정보손실을 줄이기 위해 부호순위검정이 사용되기도 한다 (Kim 등, 2014b). 위치모수에 대한 가설과 부호검정통계량은 다음과 같다.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0,$$

$$B = \sum_{t=1}^n I(X_t > \theta_0).$$

여기에서 $I(A)$ 는 A 가 만족하면 1, 아니면 0이 되는 지시함수 (indicator function)이다. 검정통계량 B 는 위치모수보다 큰 관측값들의 개수이므로 X_t 가 대칭분포일 때, 귀무가설 하에서 B 의 분포는 시행횟수가 n 이고 성공의 확률이 $1/2$ 인 이항분포 (binomial distribution)를 따른다.

3. 연구결과

연속하는 시점에서 관찰되는 두 점 (X_{t-1}, X_t) 와 (X_t, X_{t+1}) 사이의 기울기 S_t 는 다음과 같이 정의한다.

$$S_t = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t - X_{t-1}} \quad (t = 2, 3, \dots, n-1).$$

기울기 S_t 는 시점 t 에서 관찰값 변화에 대비한 시점 $t+1$ 에서 관찰값 변화의 비를 측정한 값으로 이 값이 양수이면 시계열이 계속 증가하거나 감소한다는 것을 의미하므로 해당 구간에서 단조함수가 된다.

3.1. 부호검정통계량

3.1.1. 오차항이 독립인 경우

식 (2.4)에서 오차항이 서로 독립인 0에 대칭인 분포를 따른다는 가정 하에서 가설은 다음과 같다.

$$H_0 : \rho = 1 \text{ vs. } H_1 : \rho > 1.$$

$\rho = 1$ 인 경우, $S_t = \epsilon_{t+1}/\epsilon_t$ 이 되므로 S_t 와 S_{t+1} 은 독립이 아님을 쉽게 알 수 있다. 그러나 기울기의 부호 $\psi_t = I(S_t > 0)$ ($t = 2, 3, \dots, n-1$)는 귀무가설 하에서 서로 독립인 성공확률 $1/2$ 인 베르누이 확률변수가 되어 $P(S_t > 0) = 1/2$ 이다. 그리고, $\rho < 1$ 인 경우는 ψ_t 가 독립이 되지 않고 특히 $\rho = 0$ 인 경우는 $P(S_t > 0) = 1/3$ 이 됨을 알 수 있다 (Kim 등, 2014a). $\rho > 1$ 인 대립가설 하에서는 ψ_t 가 독립이 아니고, $X_t \gg \epsilon_t$ 일 때 $S_t \approx \rho$ 로부터 $P(S_t > 0) > 1/2$ 이 될 것으로 추측할 수 있다.

1보다 큰 ρ 에 대해서는 $P(S_t > 0)$ 의 계산이 간단하지 않으므로 시뮬레이션을 통해 $P(S_t > 0) = 1/2$ 이 되는 것을 확인할 수 있었다. 따라서 $P(S_t > 0)$ 에 의한 랜덤워크 가설은 다음과 같이 지정할 수 있다.

$$H_0^{(1)} : P(S_t > 0) = \frac{1}{2} \text{ vs. } H_1^{(1)} : P(S_t > 0) > \frac{1}{2}.$$

이러한 사실을 바탕으로 다음과 같은 부호검정통계량 B 를 생각할 수 있는데 B 의 값이 $(n-2)/2$ 에 가까우면 시계열에 방향성이 없다는 것으로 이해할 수 있다. 따라서 B 의 큰 값에 대해서 귀무가설을 기각하게 된다.

$$B = \sum_{t=2}^{n-1} \psi_t.$$

귀무가설 하에서 부호검정통계량 B 의 분포는 시행횟수가 $n-2$ 이고 성공 확률이 $1/2$ 인 이항분포를 따르게 되며, 표본크기 n 이 큰 경우에는 정규근사에 의해 다음과 같은 검정통계량을 사용할 수 있다.

$$Z_B = \frac{B - E(B)}{\sqrt{Var(B)}} = \frac{B - (n-2)/2}{\sqrt{(n-2)/4}}.$$

3.1.2. 오차항이 종속인 경우

오차항이 종속일 경우 부호검정통계량이 어떤 성질을 가지는지 명확하지가 않으므로 가장 간단한 형태인 MA(1) 모형을 따른다고 가정하고 오차항의 자기상관이 음인 경우와 양인 경우 각각에 대해 시뮬레이션을 통해 검정통계량의 성질을 확인하도록 한다. 오차항이 MA(1) 모형을 따르는 모형식은 아래와 같이 쓸 수 있고 X_t 에 대한 ARMA(1,1) 모형식으로 이해할 수 있다.

$$X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t = u_t + \theta u_{t-1}, u_t \sim iidN(0, 1).$$

3.2. 시뮬레이션

식 (2.4)에서 초기값 X_0 가 0인 경우에 대해 자료를 생성하고 오차항 ϵ_t 가 독립인 경우와 MA(1)인 경우로 나누어 부호통계량의 분포를 생성한다. 모든 시뮬레이션에서 표본의 크기 30으로 1000회 반복하여 부호검정통계량의 분포를 구한다. 비교를 위해 귀무가설의 극한분포인 $N(14, 7)$ 의 그래프를 같이 나타내었다.

3.2.1. 오차항이 독립인 경우 부호검정

모형 $X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t$ 에서 오차항이 독립인 경우 ρ 의 크기에 따른 부호검정통계량의 분포에 대한 시뮬레이션 결과를 살펴본다. $\rho = 1$ 인 랜덤워크모형의 부호검정통계량의 분포와 $\rho = 1.5$ 일 때 폭발자기회귀모형의 부호검정통계량의 분포는 Figure 3.1과 같다. $\rho = 1$ 인 경우 시행횟수가 28이고 성공확률이 1/2인 이항분포를 따르므로 Figure 3.1 (왼쪽)에서 확인할 수 있듯이 14에서 가장 많은 빈도가 나왔다. $\rho > 1$ 인 경우의 Figure 3.1 (오른쪽)에서는 부호검정통계량 값이 28에서 가장 많이 분포하였다. 이를 통해 $P(S_t > 0) > 1/2$ 일 것이라 유추할 수 있다.

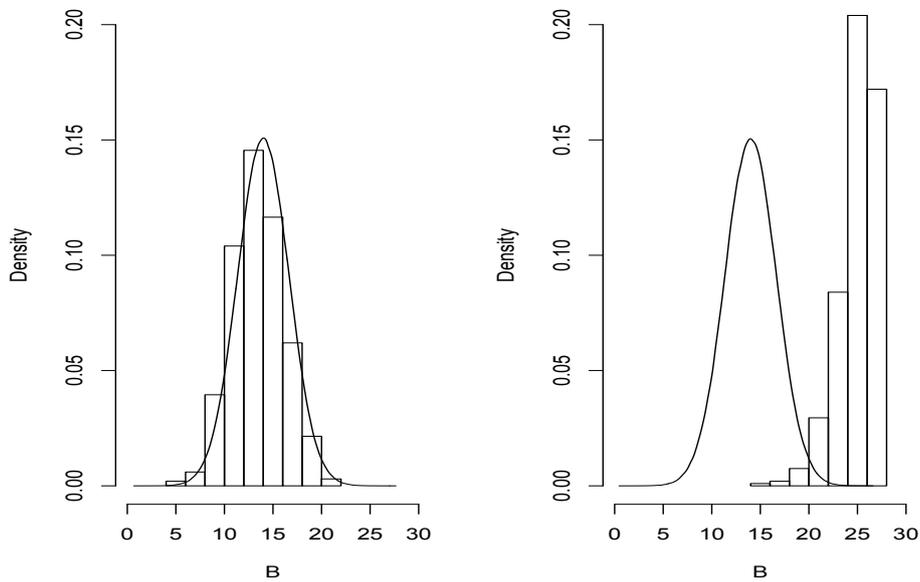


Figure 3.1 Distribution of B : $\rho = 1$ (left), $\rho = 1.5$ (right)

유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 $\rho = 1, 1.01, \dots, 1.10$ 에 대한 부호검정 결과는 Table 3.1과 같다. 여기서 $\rho = 1$ 인 경우는 유의확률을 나타내며, 나머지는 검정력에 해당된다. 유의확률은 0.05에 가깝게 나타났

으며 검정력이 점차 커지는 것을 확인할 수 있다. 즉, 오차항이 독립인 경우, ρ 가 1보다 조금만 커지더라도 부호검정을 통해 폭발자기회귀과정을 쉽게 검정할 수 있게 된다.

Table 3.1 Power of B : $X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim iidN(0, 1)$

ρ	1	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10
Power	0.048	0.063	0.06	0.08	0.089	0.135	0.229	0.28	0.359	0.467	0.544

3.2.2. 오차항에 자기상관이 있는 경우 부호검정

오차항이 $\theta = -0.5$ 또는 0.5 인 MA(1) 모형을 따를 때, $\rho = 1$ 인 경우의 부호검정통계량 분포를 그려 보면 Figure 3.2와 같다. Figure 3.1 (왼쪽)과 비교하면 $\theta = -0.5$ 인 경우에는 연속된 시점의 오차항이 다른 부호를 가질 가능성이 높아지므로 S_t 가 음의 값을 가지는 경우가 자주 발생하여 Figure 3.2 (왼쪽)의 그래프가 Figure 3.1 (왼쪽)보다 좌측으로 치우쳐져 있다. 이를 통해 $P(S_t > 0) < 1/2$ 가 되는 것으로 유추할 수 있다. $\theta = 0.5$ 인 경우에는 연속된 시점의 오차항이 같은 부호를 가질 가능성이 높아지므로 S_t 가 양의 값을 가지는 경우가 자주 발생하여 Figure 3.2 (오른쪽)의 그래프가 Figure 3.1 (왼쪽)보다 우측으로 치우쳐져 있다. 이를 통해 $P(S_t > 0) > 1/2$ 가 되는 것으로 유추할 수 있다.

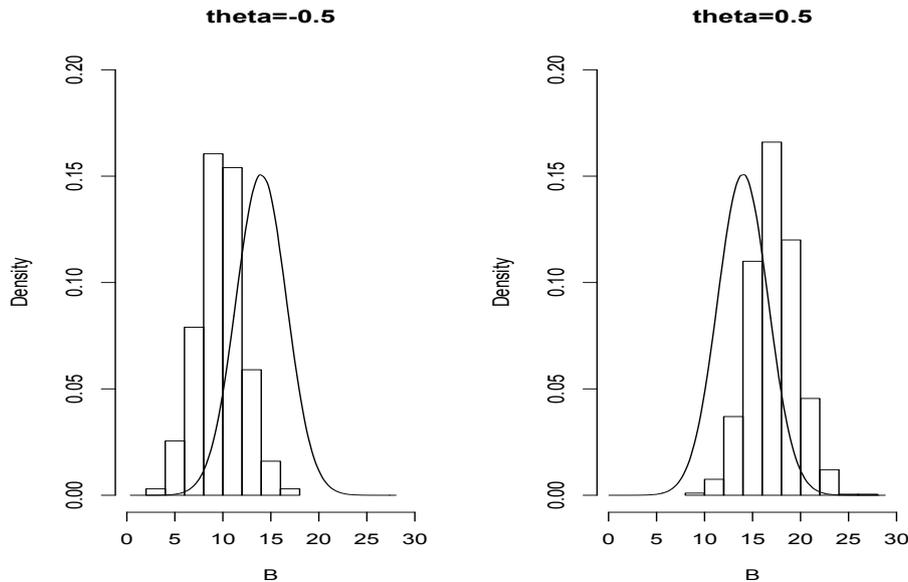


Figure 3.2 Distribution of B under $\rho = 1$: $\theta = -0.5$ (left), $\theta = 0.5$ (right)

오차항이 $\theta = -0.5$ 또는 0.5 인 MA(1) 모형을 따를 때, $\rho = 1.5$ 인 경우의 부호검정통계량 분포를 그려 보면 Figure 3.3과 같다. Figure 3.1 (오른쪽)과 비교하면 $\theta = -0.5$ 인 경우는 연속된 시점의 오차항이 다른 부호를 가질 가능성이 높아지므로 S_t 가 음의 값을 가지는 경우가 자주 발생하여 Figure 3.3 (왼쪽)의 그래프가 Figure 3.1 (오른쪽)보다는 좌측으로 옮겨져 있으나 그 영향이 크지 않음을 알 수 있고 여전히 우측으로 치우친 분포가 나타난다. $\theta = 0.5$ 인 경우에는 연속된 시점의 오차항이 같은 부호를 가질 가능성이 높아지므로 S_t 가 양의 값을 가지는 경우가 자주 발생하여 Figure 3.3 (오른쪽)의 그래프가 Figure 3.1 (오른쪽)보다 우측으로 치우쳐져 있다.

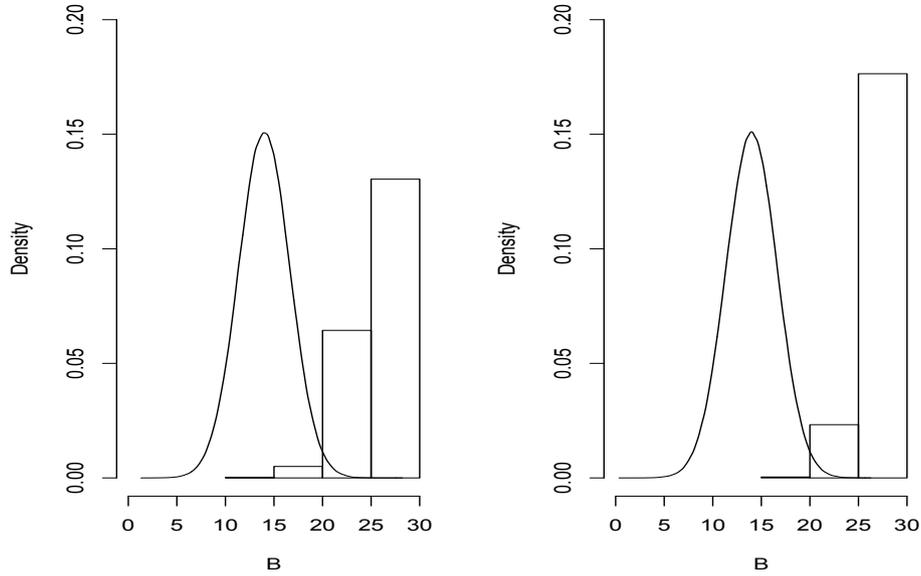


Figure 3.3 Distribution of B under $\rho = 1.5$: $\theta = -0.5$ (left), $\theta = 0.5$ (right)

θ 와 ρ 의 여러 값에 대해 실행한 검정결과를 Table 3.2와 같다. θ 가 음의 값인 경우에는 오차항이 독립인 경우보다 부호검정통계량 값의 분포가 좌측으로 옮겨져 있는 것을 알 수 있었다. 따라서 오차항의 독립을 가정한 분포를 기준으로 검정할 경우 유의수준보다 작게 나타난다. θ 가 양의 값인 경우에는 오차항이 독립인 경우보다 부호검정통계량 값의 분포가 우측으로 편중되는 것을 알 수 있다. 오차항이 양의 상관이고 그 값이 클수록 빠르게 발산하여 검정력이 높아지고 음의 상관인 경우에는 느리게 발산하여 검정력이 상대적으로 낮아지는 것을 알 수 있다. 그러나, 낮은 상관정도에서 유의수준 왜곡이 심하지 않고 음의 상관이 존재하는 경우에도 검정력이 충분히 큰 것을 확인할 수 있다.

Table 3.2 Power of B : $X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t$, $\epsilon_t = u_t + \theta u_{t-1}$, $u_t \sim iidN(0, 1)$

ρ	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
-0.8	0.000	0.037	0.689	0.934	0.977	0.989	0.992	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.5	0.003	0.163	0.751	0.946	0.983	0.994	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.2	0.006	0.385	0.867	0.981	0.987	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.2	0.121	0.662	0.952	0.990	0.997	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.5	0.372	0.808	0.973	0.997	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.8	0.524	0.861	0.983	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

4. 결론

본 논문에서는 랜덤워크가설가설검정에 대한 소개와 함께 낮은 검정력과 유의수준 왜곡 문제에 대한 대안으로 부호검정에 기초한 랜덤워크검정을 제안하였다. 일반적으로 많이 다루고 있는 정상성과 비정상성에 대한 검정이 아닌 귀무가설 $\rho = 1$ (랜덤워크)인 경우와 대립가설 $\rho > 1$ (폭발자기회귀모형)인 경우에 대해 기율기를 이용한 부호검정통계량의 성질을 시뮬레이션을 통해 확인해 보았다. AR(1) 모형에서 오차항이 독립인 경우와 오차항이 MA(1)인 경우의 자료를 각각 생성하고 표본의 크기가 30일 때, 연속하는 두 시점에서 관찰되는 두 점 사이의 기율기의 부호검정통계량 값을 1000번 반복실험하여 분포

를 확인하고 유의확률과 검정력을 구하였다. 부호검정통계량 B 의 성질을 이용하여 오차항이 독립인 단위근을 가지는 경우를 귀무가설 $H_0^{(1)} : P(S_t > 0) = 1/2$ 으로 두고 폭발자기회귀모형일 때 대립가설을 $H_1^{(1)} : P(S_t > 0) > 1/2$ 으로 두었다. 귀무가설에서 B 의 분포는 이항분포가 되고 대립가설에서 큰 값을 가지게 된다.

오차항이 음의 상관인 경우, $\rho = 1$ 이면 부호검정통계량 값이 좌측으로 치우쳐져 유의확률이 $\alpha = 0.05$ 보다 작아지고 $\rho > 1$ 이면 독립인 경우보다 시계열이 느리게 발산하여 검정력이 작아지는 것을 알 수 있었다. 오차항이 양의 상관인 경우, $\rho = 1$ 이면 부호검정통계량 값이 우측으로 치우쳐져 유의확률이 $\alpha = 0.05$ 보다 커지고 $\rho > 1$ 이면 독립인 경우보다 시계열이 빠르게 발산하여 검정력이 커지는 것을 알 수 있었다.

본 검정은 비모수적인 방법으로 표본의 크기가 작을 때 효율적으로 사용할 수 있으나 오차항의 상관 정도가 클 때 유의수준 왜곡으로 자유롭지 못한 단점이 있다. 그러나 작은 상관관계에서는 유의수준 왜곡현상이 적게 나타나고 검정력도 오차항의 상관도와 관계없이 아주 좋은 것을 확인할 수 있었다. 본 논문에서는 시뮬레이션을 이용해 B 의 성질에 대해 많이 알 수 있었으나 오차항이 독립일 때 대립가설에서 $P(S_t > 0)$ 를 구하는 문제와 더불어 오차항이 독립이 아닌 경우 부호검정 통계량의 분포에 대한 규칙의 이론적인 증명은 독립된 연구로 진행 중이다.

References

- Anderson, T. W. (1959). On asymptotic distribution of estimates of parameters of stochastic difference equations. *Annals of Mathematical Statistics*, **30**, 676-687.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427-431.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, **49**, 1057-1072.
- Fama, E. F. and French, K. R. (1988). Dividend yields and expected stock returns. *Journal of Financial Economics*, **22**, 3-25.
- Fuller, W. A. (1976). *Introduction to statistical time series*, John Wiley & Sons, New York.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- Kim, J. Y. and Jeong, K. (2014). The research on daily temperature using continuous AR model. *Journal of the Korean Data & Information Society*, **25**, 155-167.
- Kim, T. Y., Park, C., Kim, S., Kim, C., Kim, H. and Yu, J. (2014a). A sign test for random walk hypothesis based on slopes. *Journal of the Korean Data & Information Society*, **25**, 385-392.
- Kim, T. Y., Park, C., Kim, S., Kim, M. S., Lee, W. J. and Kwon, Y. (2014b). A Wilcoxon signed-rank test for random walk hypothesis based on slopes. *Journal of the Korean Data & Information Society*, **25**, 1499-1506.
- Malkiel, B. G. (1973). *A random walk down Wall Street*, 6th ed., W. W. Norton & Company, Inc., New York.
- Pearson, K. (1905). The problem of the random walk. *Nature*, **72**, 294.
- Phillips, P. C. B. (1986). Understanding spurious regression. *Journal of Econometrics*, **33**, 311-340.
- Said, S. E. and Dickey, D. A. (1984). Testing for unit roots in autoregressive moving average models of unknown order. *Biometrika*, **71**, 599-607.
- Schwert, G. W. (1987). Effects of model specification on tests for unit roots in macroeconomic data. *Journal of Monetary Economics*, **20**, 73-103.
- White, J. S. (1958). The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case. *The Annals of Mathematical Statistics*, **29**, 1188-1197.

A study on the slope sign test for explosive autoregressive models

Jeongcheol Ha¹ · Jong Mun Jung²

¹²Department of Statistics, Keimyung University

Received 26 April 2015, revised 18 May 2015, accepted 28 May 2015

Abstract

In random walk hypothesis, we assume that current change of financial time series is independent of past values. It is interpreted as an existency of a unit root in ARMA models and many researches have been focused on whether $\rho < 1$ or not. If some financial data are generated from an explosive autoregressive model, the chance of a bubble economy increases. We have to find the symptoms of it in advance. Since some well-known parameter estimators contain the parameter itself and other statistic is constructed under a specific parameter structure assumption, those are difficult to be adopted. In this paper we investigate a test for explosive autoregressive models using slope signs. We found the properties of the slope sign test statistic under both independent error and correlated error conditions, mainly by simulations.

Keywords: Correlated error, explosive AR model, sign test, unit root test.

¹ Corresponding author: Associate professor, Department of Statistics, Keimyung University, Daegu 704-701, Korea. E-mail: jeicy@kmu.ac.kr

² Master, Department of Statistics, Keimyung University, Daegu 704-701, Korea.