

## 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형을 이용한 주식 투자<sup>†</sup>

진건주<sup>1</sup> · 이지연<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>영남대학교 통계학과

접수 2015년 6월 4일, 수정 2015년 6월 30일, 게재확정 2015년 7월 13일

### 요약

파론도 역설은 두 개의 지는 게임이 결합하여 이기게 되거나, 두 개의 이기는 게임이 결합하여 지게 되는 역설적인 현상을 말한다. 본 논문에서는 한 투자자가 여러 개의 주식 계좌를 과거의 투자 결과에 의해 투자 종목이 결정되는 과거의존 파론도 게임의 규칙에 따라 관리하는 경우를 고려한다. 주식의 매매만으로는 전체 계좌의 평균 누적 수익금이 점차 감소하지만 주식 투자를 진행하는 중 계좌 간에 일정한 금액을 재분배하면 전체 계좌의 평균 누적 수익금이 증가하는 파론도 현상이 존재할 수 있음을 2012년부터 2014년까지의 3년간의 한국거래소의 주식 데이터를 이용하여 확인한다. 반대로 계좌 간의 금액 재분배로 인해 점차 증가하는 평균 누적 수익금이 오히려 감소하는 역 파론도 현상이 발생할 수 있음도 함께 확인한다.

주요용어: 과거의존 파론도 게임, 기대상금, 마코프 체인, 재분배 모형, 정상확률, 주식 데이터, 파론도 역설.

### 1. 서론

파론도 역설 (Parrondo paradox)은 스페인의 물리학자 파론도 (Juan M. R. Parrondo)가 소개한 동전 게임에서 유래한 것으로, 두 개의 동전 게임을 별도로 진행하면 각각 지는 게임이 되는 반면에 매 시행에서 두 게임 중 한 게임을 임의로 선택하거나 일정한 규칙에 의해 두 게임을 주기적으로 반복하면 이기는 게임이 되는 역설적인 현상을 말한다. 최근 들어서는 넓은 의미로 두 개의 유사한 성질의 시스템이 결합하여 반대 성질의 시스템으로 변형되는 현상을 이르기에도 한다 (Parrondo, 1996; Harmer와 Abbott, 2002).

파론도가 소개한 동전 게임은 두 개의 게임  $A$ 와  $B$ 로 구성되며, 게임  $A$ 는 앞면이 나올 확률이  $1/2 - \epsilon$ 인 동전을 던져서 앞면이 나오면 1원을 얻고, 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 게임  $B$ 는 게임자가 현재 가지고 있는 누적 상금이 3의 배수이면 앞면이 나올 확률이  $1/10 - \epsilon$ 인 동전을 던지고, 3의 배수가 아니면 앞면이 나올 확률이  $3/4 - \epsilon$ 인 동전을 던져 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 그러면  $0 < \epsilon < 1/10$ 일 때, 게임  $A$ 와  $B$ 는 모두 게임당 점근적 기대상금이 음수가 되어 지는 게임이 된다. 반면에 매 시행에서 두 게임  $A$ 와  $B$  중 하나를 임의로 선택하거나 또는 일정한 규칙에 의해 두 게임을 주기적으로 반복하면 작은  $\epsilon > 0$ 에 대해 혼합게임의 점근적 기대상금이 양수가 되어 이기는 게임이 되게 할 수 있다 (Parrondo 등, 2000; Ethier와 Lee, 2009; Lee, 2009). 이러한 게임을 원금의존

<sup>†</sup> 이 논문은 2013년도 정부 (미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. 2013R1A1A3A04007670).

<sup>1</sup> (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 석사과정.

<sup>2</sup> 교신저자: (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 교수. E-mail: leeji@yu.ac.kr

(capital-dependent) 파론도 게임이라고 한다. Parrondo 등 (2000)은 이를 변형하여 게임자의 직전 두 번의 시행 결과에 따라 던질 동전이 결정되는 과거의존 (history-dependent) 파론도 게임  $B$ 를 소개하였다. 직전 두 번의 시행 결과가 뒷면-뒷면, 뒷면-앞면, 앞면-뒷면, 앞면-앞면이면 각각 앞면이 나올 확률이  $9/10 - \epsilon$ ,  $1/4 - \epsilon$ ,  $1/4 - \epsilon$ ,  $7/10 - \epsilon$ 인 동전을 던지는 게임이다. 여기서도 두 게임  $A$ 와  $B$ 를 임의적으로 혼합하거나 주기적으로 반복하면 혼합게임은 각 게임의 결과와 반대가 되는 게임으로 만들 수 있다 (Ethier와 Lee, 2009).

원금의존 파론도 게임과 과거의존 파론도 게임은 기본적으로 한 명의 게임자에 의해 진행되는 게임인 반면에 Toral (2001)의 공간의존 (space-dependent) 파론도 게임과 Toral (2002)의 재분배 (redistribution) 모형은 여러 명의 게임자들이 서로 협력하여 진행할 때 파론도 역설이 발견되는 경우이다. 공간의존 파론도 게임은 여러 게임자들 중 임의로 선택된 게임자의 양 옆에 있는 다른 게임자들의 직전 시행 결과에 의해 동전이 결정되는 게임으로, 과거의존 파론도 게임의 시간 개념이 공간 개념으로 바뀌어 볼 수 있다. 한편, 재분배 모형은 여러 명의 게임자들로 구성된 집단에서 기존 게임  $A$ 를 게임자들 사이에서 자원을 전달하여 재분배하는 새로운 게임  $A'$ 으로 대체한 모형이다. 즉, 여러 게임자들 중 임의로 선택된 게임자는  $1/2$ 의 확률로 기존의 원금의존 파론도 게임  $B$ 나 과거의존 파론도 게임  $B$ 를 진행하고, 나머지  $1/2$ 의 확률로는 게임  $A'$ 를 실시한다. 게임  $A'$ 는 임의로 선택된 게임자가 임의로 선택된 또 다른 게임자에게 1원을 넘겨 주는 게임으로 전체 게임자들의 누적상금에는 변함이 없음으로 전체 집단에게는 공정한 게임이다. 반면에 임의로 선택된 게임자에 의해 진행되는 원금의존 파론도 게임  $B$  혹은 과거의존 파론도 게임  $B$ 는 확률 모수의 범위에 따라 지는 게임이 되며, 전체 집단에 대해서도 여전히 지는 게임이 된다. 이 때, 두 게임  $A'$ 와  $B$ 를  $1/2$ 의 확률로 결합한 혼합게임은 이기게 되어 파론도 역설이 나타남을 원금의존 파론도 게임  $B$ 의 경우는 Toral (2002)과 Ethier와 Lee (2012)에 의해 확인되었으며, 과거의존 파론도 게임  $B$ 의 경우는 Jin과 Lee (2015)에 의해 증명되었다.

파론도 역설은 처음 소개된 동전 게임 뿐 아니라 화학, 인구유전학, 신뢰성 이론, 인식론 등의 다양한 분야에서 발견되고 있으며 특히 주식 투자에 있어서 Cho와 Lee (2012a)는 과거의존 파론도 게임을 이용하여 주식 투자에서 파론도 역설이 존재할 수 있음을 2008년부터 2010년의 3년간의 한국거래소의 주식 데이터를 통해 확인하였다. 또한 Cho와 Lee (2012b)는 공간의존 파론도 게임의 규칙을 적용한 주식 투자에서도 파론도 역설 현상이 발생할 수 있음을 확인하였다.

본 논문에서는 Toral (2002)의 재분배 모형을 주식 투자에 적용하여 여러 개의 주식 계좌를 한 명의 투자자가 관리하는 경우를 살펴본다. 각 계좌에서의 투자 종목은 과거의존 파론도 게임의 규칙에 의해 결정된다. 그러면 전체 계좌의 평균 누적 수익금은 점차 감소하지만 투자 중에 한 번씩 한 계좌에 있는 일정 금액을 다른 계좌로 옮겨주면, 즉 재분배 게임  $A'$ 를 임의적으로 혼합하면, 전체 계좌의 평균 누적 수익금이 점차 증가하는 파론도 현상이 존재함을 실제 주식 데이터를 통해 확인하고자 한다. 반대로 재분배로 인해 점차 증가하는 평균 누적 수익금이 오히려 감소하는 역 파론도 (reverse Parrondo) 현상이 발생할 수 있음도 함께 확인한다. 기존의 과거의존 파론도 게임이나 공간의존 파론도 게임의 규칙만을 적용한 주식 투자에서는 게임  $A$ 가 그 효과를 주는 것으로 실제 주식 매매가 진행되는 반면에, 재분배 모형을 이용한 주식 투자에서는 주식 계좌 간의 금액 이체만으로 전체 투자 결과를 바꿀 수 있다는 것이 차이점이다.

Jin과 Lee (2015)에서 증명한 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형에서는 게임에서 이겼을 때의 상금과 졌을 때의 상금이 각각 +1원과 -1원으로 일정한 금액인 반면에 본 논문에서 다루고자 하는 주식 데이터는 연속적인 값의 범위에서 상승과 하락이 발생할 수 있다. 그러므로 기존의 +1, -1, 0으로 구성된 상금행렬을 0 이상의 실수값의 상승금액과 하락금액으로 구성된 일반 상금행렬로 먼저 확장하여야 주식 데이터 분석에 이용할 수 있다. 2절에서는 여러 개의 주식 계좌가 일반 상금행렬의 과거의존 파론도 게임으로 진행될 때의 투자당 기대 수익금과 재분배를 혼합할 때의 투자당 기대 수익금을 각각 계산

하고, 3절에서는 2012년부터 2014년까지의 주식 데이터를 적용하여 재분배의 혼합으로 인해 기대 수익금이 음의 값에서 양의 값으로 바뀌는 파론도 현상과 반대로 기대 수익금이 양의 값에서 음의 값으로 바뀌는 역 파론도 현상이 실제로 존재하는지를 분석한다.

### 2. 일반 상금행렬의 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형

주식 데이터에 적용할 수 있도록 먼저 일반 상금행렬의 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형을 설명하고 게임당 기대상금 식을 유도한다.  $N (\geq 2)$ 명의 게임자들로 구성된 집단에서 한 명의 게임자를 임의로 선택하고 이를 게임자  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )라고 하자. 게임  $A'$ 는 임의로 선택된 게임자  $i$ 가 임의로 선택된 또 다른 게임자  $j$  ( $j \neq i, j = 1, 2, \dots, N$ )에게  $w$ 원 ( $w > 0$ )을 넘겨 주는 게임이다. 그러면 게임자  $i$ 는  $w$ 원을 잃어 패의 상태가 되고, 게임자  $j$ 는  $w$ 원을 얻어 승의 상태가 된다. 그러나 전체 집단의 총 누적상금에는 변함이 없으므로 게임  $A'$ 은 전체 집단에게는 공정한 게임이다. 한편, 게임  $B$ 는 임의로 선택된 게임자  $i$ 의 직전 두 번의 시행 결과에 따라 앞면이 나올 확률이 각각  $p_0, p_1, p_2, p_3$ 인 4개의 동전을 사용한다. 즉, 직전 두 번의 시행 결과가 패-패이면  $p_0$  동전을, 패-승이면  $p_1$  동전을, 승-패이면  $p_2$  동전을, 승-승이면  $p_3$  동전을 사용하는 과거의존 파론도 게임의 규칙을 따른다. 이 때,  $p_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) 동전을 던져 앞면이 나오면  $u_i$ 원의 상금을 얻어 승의 상태가 되고, 뒷면이 나오면  $d_i$ 원을 잃어 패의 상태가 된다. 승의 상태가 되면 전체 집단에 대한 누적상금이  $u_i$ 원 증가하게 되고, 패의 상태가 되면  $d_i$ 원 감소하게 된다. 이 때, 모든  $i = 0, 1, 2, 3$ 에 대해  $u_i$ 와  $d_i$ 는 양의 실수값이다.  $N$ 명의 게임자들의 초기 상태는 임의로 결정된다.

각 게임자들의 연이은 두 번의 시행 결과인 패-패, 패-승, 승-패, 승-승을 각각 상태 0, 1, 2, 3으로 나타내면, 게임  $A'$ 과  $B$ 는 다음의 두 가지 마코프 체인으로 설명할 수 있다. 첫 번째 마코프 체인  $\{\mathbf{X}_n, n \geq 0\}$ 은  $x_i$ 를 게임자  $i$ 의 상태라고 할 때,  $N$  차원의 벡터  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 로 전체 게임자들의 상태를 나타내는 마코프 체인이고 상태공간  $\Sigma_N := \{0, 1, 2, 3\}^N$ 에서 정의된다. 두 번째 마코프 체인  $\{\mathbf{N}_n, n \geq 0\}$ 은  $n_i$ 를  $N$ 명 중 상태가  $i$ 인 게임자들의 수라고 할 때, 4차원 벡터  $\mathbf{n} = (n_0, n_1, n_2, n_3)$ 로 전체 게임자들 중 각 상태  $i$ 에 있는 게임자들의 수를 나타내는 마코프 체인이고 그 상태공간은  $\tilde{\Sigma}_N := \{(n_0, n_1, n_2, n_3) \in \mathbf{Z}_+^4 : n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = N\}$ 이다.

게임  $A'$ 에 대한 전이확률행렬  $\mathbf{P}_{A'}^{(N)}$ 은,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 와  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ 에 대해

$$P_{A'}^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [N(N-1)]^{-1}$$

로서,  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ 이고  $i \neq j$ 인  $i, j$ 에 대해서  $x_i$ 의 상태가 홀수이면  $y_i = 2$ ,  $x_i$ 의 상태가 짝수이면  $y_i = 0$ , 그리고  $x_j$ 의 상태가 홀수이면  $y_j = 3$ ,  $x_j$ 의 상태가 짝수이면  $y_j = 1$ 이고,  $i, j$  이외의 나머지 요소들은 같은 값들을 가질 때 위와 같은 확률 값을 가지고 그 외의 경우에는 0이다.

게임  $B$ 에 대한 마코프 체인  $\{\mathbf{X}_n, n \geq 0\}$ 의 전이확률행렬  $\mathbf{P}_B^{(N)}$ 는  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$ 일 때,  $i$ 번째 요소  $x_i$ 를 제외한 나머지 요소들은 모두 같은  $\mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, x_N)$ 에 대해

$$P_B^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} N^{-1}p_{x_i} & x_i \text{가 홀수이고 } y_i=3 \text{이거나 또는 } x_i \text{가 짝수이고 } y_i=1 \text{이면,} \\ N^{-1}q_{x_i} & x_i \text{가 홀수이고 } y_i=2 \text{이거나 또는 } x_i \text{가 짝수이고 } y_i=0 \text{이면} \end{cases}$$

이고, 그 외의 경우에는  $P_B^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 이다. 여기서  $q_x := 1 - p_x$ ,  $x = 0, 1, 2, 3$ 이다.

한편, 두 게임  $A'$ 와  $B$ 를 확률  $\gamma \in (0, 1)$ 로 혼합한 게임  $\gamma A' + (1 - \gamma)B$ 의 전이확률행렬  $\mathbf{P}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}$ 은

$$\mathbf{P}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} = \gamma \mathbf{P}_{A'}^{(N)} + (1 - \gamma) \mathbf{P}_B^{(N)} \tag{2.1}$$

가 된다.

게임당 기대상금을 계산하기 위해서는 마코프 체인에 의해 진행되는 게임의 평균에 대한 다음의 강대수의 법칙 (strong law of large numbers)이 필요하다.

**정리 2.1 (Ethier와 Lee, 2009)** 유한 상태공간  $\Sigma$ 에서 정의되는 분할불가 (irreducible)이고 비주기적 (aperiodic) 마코프 체인  $\{X_n, n \geq 0\}$ 의 전이확률행렬과 정상분포를 각각  $\mathbf{P}$ 와  $\boldsymbol{\pi}$ 라고 하자. 함수  $w : \Sigma \times \Sigma \mapsto \mathbf{R}$ 로 상금행렬 (payoff matrix)  $\mathbf{W} = (w(i, j))_{i, j \in \Sigma}$ 을 나타내고, 모든  $n$ 에 대해  $\xi_n := w(X_{n-1}, X_n)$ 이고  $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ 로 정의하면  $S_n$ 은  $n$ 번의 시행 후의 누적 상금이 된다.  $(i, j)$ 의 요소가  $P(i, j)w(i, j)$ 인 행렬을  $\dot{\mathbf{P}}$ 라고 하고, 열벡터  $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)^T$ 라고 두면, 게임당 점근적 기대상금

$$\mu := \boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{1}$$

은 임의의 초기상태  $X_0$ 에 대해

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \text{ a.s.}$$

을 만족한다.

위의 정리를 적용하기 위해 각 게임의 일반 상금행렬부터 살펴보자. 먼저 게임  $A'$ 의 상금행렬  $\mathbf{W}_{A'}^{(N)}$ 은 모든 상태  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 에 대해 전체 집단에 대한 누적상금에는 항상 변함이 없으므로

$$w_{A'}^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

이 된다. 게임  $B$ 의 상금행렬  $\mathbf{W}_B^{(N)}$ 은  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$ 일 때,  $i$ 번째 요소  $x_i$ 를 제외한 나머지 요소들은 모두 같은  $\mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, x_N)$ 에 대해

$$w_B^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} +u_{x_i} & x_i \text{가 홀수이고 } y_i=3 \text{이거나 또는 } x_i \text{가 짝수이고 } y_i=1 \text{이면,} \\ -d_{x_i} & x_i \text{가 홀수이고 } y_i=2 \text{이거나 또는 } x_i \text{가 짝수이고 } y_i=0 \text{이면} \end{cases}$$

이고, 그 외의 경우에는  $w_B^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 이다. 한편, 혼합게임  $\gamma A' + (1 - \gamma)B$ 의 상금행렬은  $\mathbf{W}_{A'}^{(N)} = \mathbf{0}$ 이므로  $(1 - \gamma)\mathbf{W}_B^{(N)}$ 로 얻어진다.

게임  $B$ 의 기대상금을 계산하기 위해 정리 2.1를 게임  $B$ 의 마코프 체인  $\{X_n, n \geq 0\}$ 에 적용하면  $\Sigma := \Sigma_N$  그리고  $\mathbf{P} := \mathbf{P}_B^{(N)}$ 이 된다. 특별히  $N = 1$ 일 때는 한 명의 게임자로 진행되는 기존의 과거의 존 파론도 게임과 동일하므로 정상분포  $\boldsymbol{\pi}_B^{(1)} := \boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 는

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{p_0 p_1 + 2p_0 q_3 + q_2 q_3} (q_2 q_3, p_0 q_3, p_0 q_3, p_0 p_1) \quad (2.2)$$

로 얻어진다 (Lee, 2011).  $N \geq 2$ 일 때의 정상분포  $\boldsymbol{\pi}_B^{(N)}$ 는 (2.2)의 정상분포  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 로 이루어진  $N$ 차원의  $\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi} \times \dots \times \boldsymbol{\pi}$ 가 된다. 즉,  $\boldsymbol{\pi}_B^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \pi_{x_1} \pi_{x_2} \dots \pi_{x_N}$ 가 된다 (Jin과 Lee, 2015).

게임  $B$ 의 두 번째 마코프 체인  $\{N_n, n \geq 0\}$ 의 정상분포  $\bar{\boldsymbol{\pi}}_B^{(N)}$ 는  $(N, \boldsymbol{\pi})$ 의 다항분포 (multinomial distribution)로서

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}_B^{(N)}(n_0, n_1, n_2, n_3) = \binom{N}{n_0, n_1, n_2, n_3} \pi_0^{n_0} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \pi_3^{n_3},$$

$$0 \leq n_0, n_1, n_2, n_3 \leq N, n_0 + \dots + n_3 = N$$

이다 (Jin과 Lee, 2015).

따라서 게임  $B$ 의 게임당 접근적 기대상금  $\mu_B^{(N)}$ 는 정리 2.1에 의해

$$\begin{aligned} \mu_B^{(N)} &= \pi_B^{(N)} \dot{P}_B^{(N)} \mathbf{1} \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_N)} \pi_{x_1} \cdots \pi_{x_N} \sum_{i=1}^N N^{-1} (u_{x_i} p_{x_i} - d_{x_i} q_{x_i}) \\ &= N^{-1} \sum_{(n_0, n_1, n_2, n_3)} \binom{N}{n_0, n_1, n_2, n_3} \pi_0^{n_0} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \pi_3^{n_3} [n_0(u_0 p_0 - d_0 q_0) + n_1(u_1 p_1 - d_1 q_1) \\ &\quad + n_2(u_2 p_2 - d_2 q_2) + n_3(u_3 p_3 - d_3 q_3)] \\ &= \pi_0(u_0 p_0 - d_0 q_0) + \pi_1(u_1 p_1 - d_1 q_1) + \pi_2(u_2 p_2 - d_2 q_2) + \pi_3(u_3 p_3 - d_3 q_3) \end{aligned} \tag{2.3}$$

로 얻어지고, (2.2)의 정상분포를 식 (2.3)에 대입하면

$$\mu_B^{(N)} = \frac{p_0 p_1 (u_3 p_3 - d_3 q_3) + p_0 q_3 (u_2 p_2 - d_2 q_2) + p_0 q_3 (u_1 p_1 - d_1 q_1) + q_2 q_3 (u_0 p_0 - d_0 q_0)}{p_0 p_1 + 2p_0 q_3 + q_2 q_3} \tag{2.4}$$

가 된다.

두 게임  $A'$ 와  $B$ 의 혼합게임  $\gamma A' + (1 - \gamma)B$ 의 게임당 접근적 기대상금  $\mu_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}$ 은  $\dot{P}_{A'}^{(N)} = \mathbf{0}$ 을 이용하면

$$\begin{aligned} \mu_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} &= \pi_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} \dot{P}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} \mathbf{1} \\ &= (1 - \gamma) \pi_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} \dot{P}_B^{(N)} \mathbf{1} \\ &= (1 - \gamma) \sum_{(x_1, \dots, x_N)} \pi_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \sum_{i=1}^N N^{-1} (u_{x_i} p_{x_i} - d_{x_i} q_{x_i}) \\ &= N^{-1} (1 - \gamma) \sum_{(n_0, n_1, n_2, n_3)} \bar{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}(n_0, n_1, n_2, n_3) [n_0(u_0 p_0 - d_0 q_0) + n_1(u_1 p_1 - d_1 q_1) \\ &\quad + n_2(u_2 p_2 - d_2 q_2) + n_3(u_3 p_3 - d_3 q_3)] \\ &= N^{-1} (1 - \gamma) [\bar{n}_0(u_0 p_0 - d_0 q_0) + \bar{n}_1(u_1 p_1 - d_1 q_1) + \bar{n}_2(u_2 p_2 - d_2 q_2) + \bar{n}_3(u_3 p_3 - d_3 q_3)] \end{aligned} \tag{2.5}$$

가 된다. 단,  $\bar{n}_0 := E_{\bar{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}} [n_0]$ ,  $\bar{n}_1 := E_{\bar{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}} [n_1]$ ,  $\bar{n}_2 := E_{\bar{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}} [n_2]$  그리고  $\bar{n}_3 := E_{\bar{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}} [n_3]$ 이며, 여기서  $\bar{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}$ 는 상태공간  $\Sigma_N$ 에서의 혼합게임  $\gamma A' + (1 - \gamma)B$ 의 정상분포를 나타내며, 그 기대값들  $\bar{n}_0, \bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ 은

$$\begin{aligned} \bar{n}_0 &= N(q_2 + \gamma p_2)(q_3 + \gamma p_3)/d \\ \bar{n}_1 &= N(p_0 + \gamma q_0)(q_3 + \gamma p_3)/d \\ \bar{n}_2 &= N(p_0 + \gamma q_0)(q_3 + \gamma p_3)/d \\ \bar{n}_3 &= N(p_0 + \gamma q_0)(p_1 + \gamma q_1)/d \end{aligned}$$

로 계산된다 (Jim과 Lee, 2015). 단,  $d := (q_2 + \gamma p_2)(q_3 + \gamma p_3) + 2(p_0 + \gamma q_0)(q_3 + \gamma p_3) + (p_0 + \gamma q_0)(p_1 + \gamma q_1) > 0$ 이다.

이 기대값들을 식 (2.5)에 대입하면, 혼합게임  $\gamma A' + (1 - \gamma)B$ 의 게임당 점근적 기대상금은

$$\begin{aligned} \mu_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} = & (1 - \gamma)\{p_3(\gamma q_0 + p_0)(\gamma q_1 + p_1)u_3 + p_2(\gamma q_0 + p_0)(\gamma p_3 + q_3)u_2 + p_1(\gamma q_0 + p_0)(\gamma p_3 + q_3)u_1 \\ & + p_0(\gamma p_2 + q_2)(\gamma p_3 + q_3)u_0 + q_0\{[(d_2 - d_0)p_2 + (d_3 - d_1)q_1 - d_2]p_3 - d_3q_1\}\gamma^2 \\ & + \{(d_0 - d_2)2q_0p_2 + (d_3 - d_1)2q_0p_1 - (d_3 - 2d_2 - 2d_1 + d_0)q_0 - d_2q_2 + d_3q_1 - d_1q_1\}p_3 \\ & + (d_2 - d_0)q_0p_2 + (d_1 - 2d_3)q_0p_1 + (d_3 - d_2 - d_1)q_0 - d_3q_1\}\gamma + [(d_2 - d_0)p_0p_2 \\ & + (d_1 - d_3)p_0p_1 + (-d_2 - d_1 + d_0)p_0 - d_0q_2]q_3\}/\{(p_2 + 2q_0)p_3 - q_0p_1 + q_0\}\gamma^2 \\ & + [(-2p_2 + 4p_0 - 1)p_3 + p_2 + q_1 + (2p_1 + 1)q_0]\gamma + (p_2 - 2p_0 - 1)p_3 + q_2 + (p_1 + 2)p_0\} \end{aligned}$$

로 얻어진다. 이 때, 혼합게임의 기대상금  $\mu_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}$ 은 전체 게임자들의 수  $N$ 과 게임  $A'$ 에서의 재분배 금액  $w$ 원의 영향을 받지 않고, 모수  $\gamma$ 와 게임  $B$ 와 관련된 모수  $p_i, q_i, u_i, d_i, i = 0, 1, 2, 3$ 로만 구성됨을 알 수 있다. 특별히  $\gamma = 1/2$ 이면,

$$\begin{aligned} \mu_{(1/2, 1/2)}^{(N)} = & \{(1 + p_0)[(1 + p_1)p_3u_3 + p_2(1 + q_3)u_2 + p_1(1 + q_3)u_1] + p_0(1 + q_2)(1 + q_3)u_0 \\ & + \{-d_0q_0 - d_2(1 + p_0)\}p_2 + (d_3 - d_1)(1 + p_0)p_1 + (d_3 + d_2 + d_1 - 2d_0)p_0 \\ & + d_3 + d_2 + d_1 + 2d_0\}p_3 + 2[(d_2 - d_0)p_0 + d_2 + d_0]p_2 + (2d_1 - d_3)(1 + p_0)p_1 \\ & + (-d_3 - 2d_2 - 2d_1 + 4d_0)p_0 - d_3 - 2d_2 - 2d_1 - 4d_0\}/\{2(p_2 - 2p_0 - 4)\}p_3 \\ & - 4p_2 + 2(1 + p_0)p_1 + 10p_0 + 18\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

가 된다.

### 3. 주식 투자의 적용

본 절에서는 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형을 주식 투자에 적용할 때, 파론도 현상과 역 파론도 현상이 나타나는지 최근 3년간의 주식 데이터를 이용하여 살펴본다.

우선 기존 모형을 주식 투자에 적용하기 위해서  $N$ 명의 게임자들을  $N$ 개의 주식 계좌들로 보고, 과거의존 파론도 게임  $B$ 에서 사용되는 동전을 매일 매매하는 주식 종목으로 간주하여 4개의 주식 종목을 과거의존 파론도 게임의 규칙에 따라 사고 파는 투자 포트폴리오  $B$ 를 고려한다.  $N$ 개의 주식 계좌를 관리하는 투자가는 매일 매매한 주식의 수익금을 예치할 계좌를  $N$ 개의 계좌 중 임의로 한 개 선택한다. 이 때, 수익금은 매매하는 주식 종목을 주가가 상승하면 양의 값을 가지고 하락하면 음의 값을 가진다. 매일 계좌가 선택이 되면 1/2의 확률로 계좌 간에 재분배를 하거나 아니면 1/2의 확률로 포트폴리오  $B$ 를 진행한다. 즉, 1/2의 확률로 임의로 선택된 계좌에서 나머지  $N - 1$ 개의 계좌들 중에서 임의로 선택된 또 다른 계좌로 일정 금액을 이체하거나 또는 1/2의 확률로 임의로 선택된 계좌의 직전 두 번의 투자 결과 (상승 혹은 하락)에 따라 4개의 주식 종목 중 한 주식을 매매하는 포트폴리오  $B$ 를 진행한다. 선택된 계좌의 직전 투자 결과가 하락-하락이면 주가 상승확률이  $p_0$ 인 주식을, 하락-상승이면 주가 상승확률이  $p_1$ 인 주식을, 상승-하락이면 주가 상승확률이  $p_2$ 인 주식을, 상승-상승이면 주가 상승확률이  $p_3$ 인 주식을 매매한다. 이 때, 4개의 주식 종목을 가지고 과거의존 파론도 게임의 규칙으로 진행되는 포트폴리오  $B$ 와 1/2의 확률로 수익금의 재분배 과정을 혼합하는 혼합 포트폴리오  $C := A'/2 + B/2$ 의 투자 결과를 투자당 기대 수익금을 통해 비교한다.

2012년부터 2014년까지 한국거래소의 유가증권시장에 상장된 900여개 주식 종목의 데이터를 이용하여 전날과의 종가 차이를 구한다. 종가가 전날에 비해 상승했다면 승에 해당하고, 전날에 비해 하락했다

면 패에 해당한다. 종가의 변동이 없는 날은 본 분석에서 제외한다. 3년간의 전체 거래일 약 740일 중 종가가 변동(상승 혹은 하락)한 날이 700일 이상인 종목 226개를 분석에 이용하였다. 226개의 각 종목에 대해 주가 상승확률  $p$ 를

$$\hat{p} = \frac{\text{종가가 상승한 날의 수}}{\text{종가 변동일의 수}}$$

로 추정하면 주가 하락확률  $q$ 의 추정값  $\hat{q}$ 는  $1 - \hat{p}$ 가 된다. 그리고

$$\hat{u} = \frac{\text{종가 상승 폭의 합}}{\text{종가가 상승한 날의 수}}$$

$$\hat{d} = \frac{\text{종가 하락 폭의 합}}{\text{종가가 하락한 날의 수}}$$

로 평균 상승금액과 평균 하락금액을 구하여 상승금액  $u$ 와 하락금액  $d$ 의 추정값으로 사용한다 (Cho와 Lee, 2012a). 226개의 주식 종목 중 4개의 주식 종목으로 구성된 포트폴리오  $B$ 의 투자당 점근적 기대 수익금  $\mu_B$ 는 각 주식에서 추정된 값  $\hat{p}_i, \hat{q}_i, \hat{u}_i$ , 그리고  $\hat{d}_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ )를 이용하여 식 (2.4)로 얻어진다. 계좌 간에 일정한 금액을 재분배하는 게임  $A'$ 을 1/2의 확률로 혼합한 혼합 포트폴리오  $C$ 의 투자당 점근적 기대 수익금  $\mu_C$ 는 식 (2.6)에 의해 계산된다. 만약  $\mu_B < 0$ 이고  $\mu_C > 0$ 이면 재분배로 인해 투자당 기대 수익금이 음수에서 양수로 바뀌는 경우로서 파론도 현상이 나타나는 포트폴리오에 해당되고, 반대로  $\mu_B > 0$ 이고  $\mu_C < 0$ 이면 재분배로 인해 기대 수익금이 점차 감소하는 역 파론도 현상이 존재하는 포트폴리오에 해당된다. Figure 3.1은 파론도 현상 및 역 파론도 현상의 존재를 확인하는 분석 절차를 나타낸 것이다.

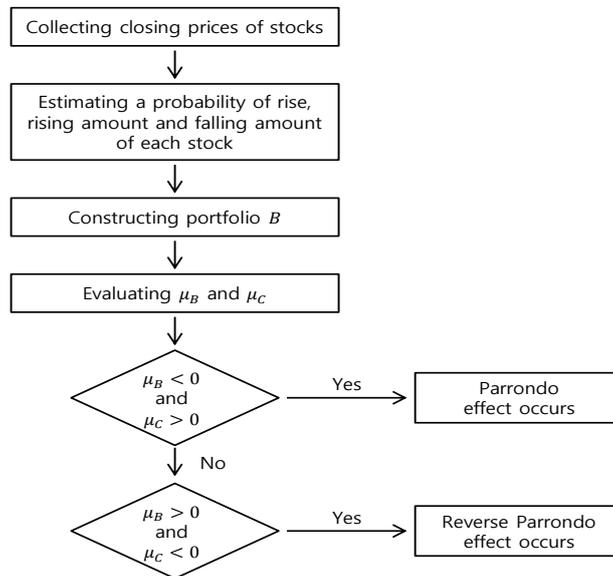


Figure 3.1 A checking process for Parrondo paradox

Table 3.1과 같이 분석 대상인 전체 226개 종목 중에서 4개의 종목으로 구성되는 포트폴리오  $B$ 는 총 2,540,059,200개가 가능하고, 이 중 기대 수익금  $\mu_B$ 에 대해  $\mu_B > 0$ 인 경우는 1,488,450,795개이

고,  $\mu_B < 0$ 인 경우는 1,051,608,405개로 나타났다. 파론도 현상은 포트폴리오  $B$ 의 경우 기대 수익금이 음수인 1,051,608,405개 중에 혼합 포트폴리오  $C$ 의 기대 수익금  $\mu_C$ 는 양수인 경우로서 약 0.54%에 해당하는 5,682,560개에서 나타났다. 반대로 역 파론도 현상은 포트폴리오  $B$ 의 기대 수익금이 양수인 1,488,450,795개 중에 혼합 포트폴리오  $C$ 의 기대 수익금이 음수인 경우로서 약 0.39%인 5,732,662개에서 일어났다.

**Table 3.1** Percentage of Parrondo paradox

Portfolio	$B$	$C$	Percentage
$\mu_B < 0$	1,051,608,405	$\mu_C < 0$	1,045,925,845
		$\mu_C > 0$	5,682,560
$\mu_B > 0$	1,488,450,795	$\mu_C < 0$	5,732,662
		$\mu_C > 0$	1,482,718,133
Total	2,540,059,200		

파론도 현상과 역 파론도 현상에 해당하는 실제 주식 종목들을 예로 살펴보았다. KODEX 조선, 성지건설, 현대엘리베이터, 롯데제과로 구성되는 포트폴리오  $B$ 는 파론도 현상에 해당되는 경우로서 각 주식 종목의 모수 추정값과 포트폴리오  $B$ 와  $C$ 의 기대 수익금은 Table 3.2와 같다.

**Table 3.2** Parrondo effect

Portfolio	Stock	Probability of rise	Rising amount	Falling amount	Expected profit
$B$	KODEX Shipbuild	0.4508	227.48	203.99	-2.7834
	Sungjee Construction	0.4113	366.18	278.03	
	Hyundai Elevator	0.4490	1681.70	1568.12	
	Lotte Confectionery	0.4854	23664.76	22024.32	
$C$	$A'/2+B/2$				+1.3191

한편, GS건설, Kstar 국고채, POSCO, LG생활건강으로 구성되는 경우는 포트폴리오  $B$ 의 기대 수익금은 양수인 반면에 포트폴리오  $C$ 의 기대 수익금은 음수로 나타나서 역 파론도 현상이 발생하였다. 각 주식 종목의 모수 추정값과 각 포트폴리오의 기대 수익금은 Table 3.3과 같다.

**Table 3.3** Reverse Parrondo effect

Portfolio	Stock	Probability of rise	Rising amount	Falling amount	Expected profit
$B$	GS E&C	0.4662	960.73	1023.88	+5.5160
	Kstar KTB ETF	0.6011	75.14	98.95	
	POSCO	0.4915	3337.68	3507.00	
	LG H&H	0.5434	8231.68	9348.91	
$C$	$A'/2+B/2$				-1.6944

위의 예에서 살펴본 것처럼 투자가가 종가를 기준으로 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형의 규칙으로 주식 투자를 진행할 때, 음의 기대수익을 가지는 포트폴리오  $B$ 에 재분배 과정  $A'$ 을 혼합하면 양의 기대수익이 되거나 양의 기대수익을 가지는 포트폴리오  $B$ 에 재분배 과정  $A'$ 을 혼합하면 음의 기대수익이 얻어지는 파론도 역설 현상이 미약하나마 주식 투자에서도 존재함을 최근 3년간 한국거래소의 주식 데이터를 통해 확인하였다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형을 주식 투자에 적용하여 주식 투자에서도 파론도 역설 현상이 존재하는지를 파악하였다. 먼저 기존의 고정 상금행렬을 일반 상금행렬로 확장한 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형에 대한 투자당 기대 수익금 식을 유도하였다. 그리고 2012년부터 2014년까지의 한국거래소의 주식 데이터를 이용하여 분석 대상인 전체 226개의 각 주식 종목들의 상승확률, 하락확률, 상승금액, 하락금액 등을 추정하고, 과거의존 파론도 게임의 규칙을 적용한 포트폴리오  $B$ 의 기대 수익금과 계좌 간의 금액을 재분배하는 게임  $A'$ 을 1/2의 확률로 혼합한 혼합 포트폴리오  $C$ 의 기대 수익금을 비교하였다. 분석 대상 총 226개의 종목들에 대해 구성 가능한 모든 경우의 포트폴리오  $B$ 를 분석한 결과,  $\mu_B < 0$ 인 포트폴리오 중에서 약 0.54%에서 파론도 현상이 발견되고  $\mu_B > 0$ 인 포트폴리오 중에서 약 0.39%에서 역 파론도 현상이 존재하였다. 비록 전체 가능한 조합에서 차지하는 비중은 매우 작지만 파론도 역설 현상이 11,415,222개의 포트폴리오  $B$ 에서 발견되어 실제 주식 투자에서 존재함을 확인하였다. 만약 주식 매매 중에 발생하는 수수료와 거래 비용 등을 고려한다면 매매 횟수가 상대적으로 더 많은 포트폴리오  $B$ 의 기대 수익금이 포트폴리오  $C$ 의 기대 수익금보다 더 많이 감소하여 파론도 역설 현상의 비중은 달라질 것이다. 한편, 본 논문에서는 기존의 과거의존 파론도 게임의 규칙을 적용하기 위해 매일의 증가가 상승 또는 하락하는 경우만 고려하였다. 주식 데이터의 실제 변동을 잘 설명하기 위해서는 증가 변동이 없는 상태도 추가할 필요가 있으며 이는 향후 연구과제로 논의될 것이다.

#### References

- Cho, D. and Lee, J. (2012a). Parrondo paradox and stock investment. *Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 543-552.
- Cho, D. and Lee, J. (2012b). Spatially dependent Parrondo games and stock investments. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **23**, 867-880.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2009). Limit theorems for Parrondo's paradox. *Electronic Journal of Probability*, **14**, 1827-1862.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2012). Parrondo's paradox via redistribution of wealth. *Electronic Journal of Probability*, **17**, 1-21.
- Harmer, G. P. and Abbott, D. (2002). A review of Parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, **2**, R71-R107.
- Jin, G. and Lee, J. (2015). A redistribution model of the history-dependent Parrondo game. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **26**, 77-87.
- Lee, J. (2009). Optimal strategies for collective Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 973-982.
- Lee, J. (2011). Paradox in collective history-dependent Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 631-641.
- Parrondo, J. M. R. (1996). How to cheat a bad mathematician? In *the Workshop of the EEC HC&M Network on Complexity and Chaos*, ISI, Torino, Italy. Unpublished.
- Parrondo, J. M. R., Harmer, G. P. and Abbott, D. (2000). New paradoxical games based on Brownian ratchets. *Physical Review Letters*, **85**, 5226-5229.
- Toral, R. (2001). Cooperative Parrondo's games. *Fluctuation and Noise Letters*, **1**, L7-L12.
- Toral, R. (2002). Capital redistribution brings wealth by Parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, **2**, L305-L311.

## Stock investment with a redistribution model of the history-dependent Parrondo game<sup>†</sup>

Geonjoo Jin<sup>1</sup> · Jiyeon Lee<sup>2</sup>

<sup>12</sup>Department of Statistics, Yeungnam University

Received 4 June 2015, revised 30 June 2015, accepted 13 July 2015

### Abstract

The Parrondo paradox is the counter-intuitive phenomenon: when we combine two losing games we can win the game or when we combine two winning games we can lose the game. In this paper, we assume that an investor adopts the rule of the history-dependent Parrondo game for investment in the stock market. Using the KRX (Korea Exchange) data from 2012 to 2014, we found the Parrondo paradox in the stock trading: the redistribution of profits among accounts can turn the decrease of the expected cumulative profit into the increase of the expected cumulative profit. We also found that the opposite case, namely the reverse Parrondo effect, can happen in the stock trading.

*Keywords:* History-dependent Parrondo game, expected profit, Markov chain, Parrondo paradox, redistribution model, stationary distribution, stock data.

---

<sup>†</sup> This work was supported by the Basic Science Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Science, ICT & Future Planning (No. 2013R1A1A3A04007670).

<sup>1</sup> Graduate student, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongsan 712-749, Korea.

<sup>2</sup> Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongsan 712-749, Korea. E-mail: [leejy@yu.ac.kr](mailto:leejy@yu.ac.kr)