ISSN 1229-1889(Print)
ISSN 2287-9005(Online)
J Korean Soc Qual Manag Vol. 43, No.2:169-184,June 2015
http://dx.doi.org/10.7469/JKSQM.2015.43.2.169

열화가 감마과정을 따르는 경우 가속열화시험의 최적 계획

임헌상 * · 임대은 **†

* 삼성전자(주)
** 강원대학교 시스템경영공학과

Planning Accelerated Degradation Tests: the Case of Gamma Degradation Process

Lim, Heonsang * · Lim, Dae-Eun **†

* Samsung Electronics Co., Ltd.
** Department of System & Management Engineering, Kangwon National University

ABSTRACT

Purpose: This paper is concerned with optimally designing accelerated degradation test (ADT) plans based on a gamma process for the degradation model.

Methods: By minimizing the asymptotic variance of the MLE of the q-th quantile of the lifetime distribution at the use condition, the test stress levels and the proportion of test units allocated to each stress level are optimally determined.

Results: The optimal plans of ADT are developed for various combination of parameters. In addition, a method for determining the sample size is developed, and sensitivity analysis procedures are illustrated with an example.

Conclusion: It is important to optimally design ADT based on a gamma process under the condition that a degradation process should be always nonnegative and strictly increasing over time.

Key Words: Accelerated Degradation Test, Gamma Process, Optimal Plan, Maximum Likelihood Estimation

● Received 7 March 2014, 1st revised 30 March 2015, accepted 15 June 2015
† Corresponding Author(del@kangwon.ac.kr)

1. 서 론

신뢰성이란 제품이 주어진 조건에서 특정시간 동안 요구되는 기능을 수행할 확률을 의미하는데, 제품의 신뢰성이 높아짐에 따라 단기간 내에 신뢰성 정보를 얻는 것이 점점 어려워지고 있다. 신뢰성 높은 제품에 대하여 짧은 시간 내에 수명 정보를 획득하기 위하여 사용 조건보다 가혹한 조건에서 시험하여 제품의 고장과 밀접한 관련이 있는 열화특성치를 관측하고 이 데이터로부터 수명 정보를 추정하는 가속열화시험(Accelerated Degradation Test, ADT)이 이용되고 있다.

가속열화시험에 관한 연구는 일반적으로 시험 후 얻어지는 데이터를 분석하여 수명과 관련된 정보를 획득하는 추론과, 시험 전에 가용 자원 제약 하에서 효율적인 시험을 수행하기 위한 시험계획으로 구분할 수 있다. 대부분의 경우, 한정된 자원으로 제한된 시간 내에 시험을 수행해야하기 때문에 추론에 앞서 효율적인 시험계획을 마련하는 것은 매우 중요하다.

열화 모형은 일반적으로 일반경로 모형(general path model)과 추계적과정 모형(stochastic process model)으로 분류할 수 있는데 가속열화시험 계획에 대한 연구는 과거 열화특성치가 일반경로모형을 따르는 경우를 중심으로 이루어졌으나 (Boulanger and Escobar 1994, Park and Yum 1997, Park and Yum 2004, Li and Kececioglu 2004, 2006, Shi et al. 2009) 최근 시간에 따른 열화특성치간 상관관계를 설명할 수 있는 추계적과정 모형을 가정한 연구가 이루어지고 있다. 추계적과정 모형 중 열화모형으로 위너과정(Wiener process), 기하브라운운동(geometric Brownian motion), 감마과정(gamma process) 등이 활용되고 있다. Liao and Tseng (2006), Lim and Yum (2011), Lim (2012)은 위너과정 가정 하에서의 가속열화시험의 계획에 대하여 설계하였으며 Liao and Elsayed (2004)은 기하브라운운동 모형하에서의 최적 가속열화시험 계획을 수립하였다. 위너과정의 경우 열화가 음의 값을 가질 수 있으며, 기하브라운운동은 단조 증가 (strictly increasing) 하지 않을 수 있다. 그러나 일반 현실 상황에서 열화는 항상 양의 값을 가지며 단조 증가하는 특성을 보인다. 이러한 경우, 시간에 따른 열화량이 항상 양의 값을 가지며 단조 증가하는 감마과정이 적절한 모형이 될 수 있다.

Tang et al. (2004)과 Pan and Sun (2014)은 비용 제약 하에서 계단형으로 스트레스를 인가하는 경우의 가속열화시험의 계획을 개발하였다. 계단형 가속시험의 경우 데이터 분석 시 누적노출모형과 같은 스트레스 변화 효과에 대한 가정이 필요하다는 단점이 있는 반면 일정형 가속시험의 경우 시험 수행 시 관리가 수월하고 데이터 분석이 용이하다는 장점이 있어 가속열화시험을 이용하는 현장에서는 일정형 가속열화시험이 많이 활용되고 있다 (Lim 2012). 본 논문에서는 열화특성치가 감마과정을 따른다고 가정 하에 스트레스가 일정하게 가해지는 일정형 가속열화시험의 계획을 개발하고자 한다. 사용조건에서의 수명 분포의 q 분위수 추정량의 점근분산이 최소가 되도록 스트레스 수준, 각 스트레스 수준에 할당하는 시료수를 결정하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 열화 모형인 감마과정과 세 가지 가속 모형에 대하여 설명하고 사용조건에서의 수명 분포를 구하였다. 제 3장에서는 목적함수인 사용조건에서 수명 분포의 q 분위수 추정량의 점근 분산을 구하고 이를 스트레스 수준, 각 스트레스 수준에 할당하는 시료수에 대하여 최적화하는 시험 계획을 수립하였으며, 또한 총 시료수를 산출하는 방법에 대하여 설명하였다. 제 4장에서는 발광다이오드 예제를 통해 가속열화시험 계획을 수립하고 및 민감도 분석을 수행하였다. 마지막으로 제 5장에서는 본 논문의 결론 및 추후 연구과제를 제시하였다.

2. 가속 열화 모형

2.1 감마과정 모형

본 논문에서는 시점 t' 에서의 열화특성치 $y(t')$ 가 형상계수 (shape coefficient) $\alpha'(>0)$, 척도계수(scale coefficient) $\beta(>0)$ 를 가지는 감마과정을 가정하며 아래와 같은 특성을 갖는다.

1. $y(0)=0$,
2. $\{y(t')|t' \geq 0\}$ 는 정상 독립 증분(stationary independent increments)을 가진다.
3. $y(t')$ 는 다음과 같은 확률밀도함수(Probability Density Function, pdf)를 갖는 감마 분포(gamma distribution)를 따른다.

$$f_y(y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha' t')}\frac{1}{\beta^{\alpha' t'}}y^{\alpha' t'-1}e^{-y/\beta}\,,\ \ t'>0$$

여기서, $\alpha' t'$ 는 형상모수(shape parameter)이고 β는 척도모수(scale parameter)이다.

4. 각 독립 증분 $\Delta y_{ab}(=y(t'_b)-y(t'_a);0 \leq t'_a \leq t'_b)$ 은 형상모수가 $\alpha'\Delta t'\ (=\alpha'(t'_b-t'_a))$ 이고 척도모수가 β인 감마 분포를 따른다.

2.2 가속 모형 및 표준화

본 논문에서는 감마과정의 스트레스 s' 하에서의 형상계수 $\alpha'(s')(>0)$ 가 스트레스 s'와 다음의 모형 중 하나를 따른다고 가정한다 (Nelson 1990).

$$\text{아레니우스 모형 : } \alpha(s')=\delta_1'\exp(-\delta_2'/s')\,,\ \ s\text{는 절대온도}$$

$$\text{멱함수 모형 : } \alpha(s')=\delta_1'(s')^{\delta_2'}\,,\ \ s\text{는 전압}$$

$$\text{지수 모형 : } \alpha(s')=\delta_1'\exp(-\delta_2' s')\,,\ \ s\text{는 기후 변수}$$

여기서, $\delta_1'(>0)$와 $\delta_2'(>0)$는 미지의 상수이다.

s_0'을 사용 조건, s_M'을 최대 스트레스 수준, t_M'을 최대 시험 시간이라고 하면 모형의 간편성을 위해 각 스트레스 수준과 시험 시간은 다음과 같이 표준화할 수 있다.

$$s=\frac{1/s_0'-1/s'}{1/s_0'-1/s_M'},\ \text{아레니우스 모형,}$$

$$=\frac{\ln s'-\ln s_0'}{\ln s_M'-\ln s_0'},\ \text{멱함수 모형,}$$

$$=\frac{s'-s_0'}{s_M'-s_0'},\ \text{지수 모형.}$$

$$t=\frac{s'}{t_M'}.$$

표준화 후 $s_0=0$, $s_M=1$, $t_M=1$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$을 만족하며, 형상모수 $\alpha'(s')t'$ 는 다음과 같이 표준화된 형태 (s,t)로 표현할 수 있다.

$$\alpha'(s')t' = \alpha'(s')t'_M t = \exp(\delta_1 - \delta_2 s) = \alpha(s)t \tag{1}$$

여기서,

$\delta_1 = \ln(\delta_1' t_M') - \delta_2'/s_0'$, $\delta_2 = \delta_2'(1/s_0' - 1/s_M')$ 아레니우스 모형,

$\delta_1 = \ln(\delta_1' t_M') + \delta_2' \ln s_0'$, $\delta_2 = \delta_2'(\ln s_M' - \ln s_0')$ 멱함수 모형,

$\delta_1 = \ln(\delta_1' t_M') + \delta_2' s_0'$, $\delta_2 = \delta_2'(s_M' - s_0')$ 지수 모형이고, δ_2는 항상 양수이다.

2.3 수명 분포

열화특성치가 형상계수 $\alpha(s)$와 척도계수 β를 가지는 감마과정을 따를 때, 고장기준값 y_c에 도달하는 시간으로 정의되는 수명 T는 다음과 같은 분포를 따른다.

$$\begin{aligned} G(t) &= P\{T < t\} \\ &= P\{y(t) > y_c\} \\ &= \int_{y_c}^{\infty} \frac{1}{\Gamma[\alpha(s)t]} \frac{1}{\beta^{\alpha(s)t}} y^{\alpha(s)t-1} e^{-y/\beta} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma[\alpha(s)t]} \int_{y_c/\beta}^{\infty} x^{\alpha(s)t-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{\Gamma[\alpha(s)t, y_c/\beta]}{\Gamma[\alpha(s)t]} \end{aligned} \tag{2}$$

여기서, $\Gamma(a,b)$는 다음과 같이 정의되는 불완전 감마 함수 (incomplete gamma function) 이다.

$$\Gamma(a,b) = \int_b^{\infty} z^{a-1} e^{-z} dz.$$

스트레스 수준 s에서의 수명분포는 t가 클 때 점근적으로 아래와 같은 누적분포함수 (Cumulative Distribution Function, cdf)를 가지는 Birnbaum-Saunders 분포를 따른다 (Park and Padgett 2005).

$$G(t) = \Phi\left\{ \sqrt{\frac{y_c}{\beta}} \left[\sqrt{\frac{\alpha(s)\beta t}{y_c}} - \sqrt{\frac{y_c}{\alpha(s)\beta t}} \right] \right\},\ t > 0 \tag{3}$$

여기서, $\Phi\{\bullet\}$는 표준정규분포의 누적분포함수이다. 스트레스 수준 s에서의 수명분포의 q 분위수 $t_{q,s}$는 근사적으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$t_{q,s} = \frac{1}{4\alpha(s)} \left(z_q + \sqrt{z_q^2 + 4y_c/\beta} \right)^2$$

여기서, z_q는 표준 정규 분포의 q 분위수이다. 식 (1)로부터 $\alpha(s_0) = \alpha(0) = \exp(\delta_1)$가 되고, $\widehat{\delta_1}$과 $\hat{\beta}$을 각각 δ_1과 β의 최우추정량이라 하면 $\widehat{t_{q,0}}$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\widehat{t_{q,0}} = \frac{1}{4\exp(\hat{\delta}_1)}\left(z_q + \sqrt{z_q^2 + 4y_c/\hat{\beta}}\right)^2 \tag{4}$$

3. 계획 문제의 정형화 및 최적화

3.1 가정사항

본 논문에서는 다음과 같은 모형을 가정하였다.

1. 각 스트레스 수준 $s_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 에서 스트레스는 시험시간 동안 일정하게 가해진다.
2. 시험은 총 $N \left(= \sum_{i=1}^{r} n_i\right)$개의 시료에 대해 각 스트레스에 n_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$개의 시료를 할당하여 r 대의 챔버에서 동시에 진행되며, 각 스트레스 수준에서 측정횟수는 m으로 동일하다.
3. 측정시간 간격은 Δt로 동일하며 총 시험시간은 $t_M = \Delta t \cdot m = 1$을 만족한다.

y_{ijk}를 $t_{ijk} (k = 1, 2, \cdots, m)$ 에서 측정된 열화특성치라고 하면 각 열화증분 (degradation increment) $\Delta y_{ijk} = y_{ijk} - y_{ij,(k-1)} (y_{ijk} > y_{ij,(k-1)})$은 다음과 같은 감마 분포를 따른다.

$$f_{\Delta y}(\Delta y_{ijk}) = \frac{1}{\Gamma[\alpha(s_i)\Delta t]}\frac{1}{\beta^{\alpha(s_i)\Delta t}}(\Delta y_{ijk})^{\alpha(s_i)\Delta t - 1}\exp\left(-\frac{\Delta y_{ijk}}{\beta}\right),\ \Delta y_{ijk} > 0,\ \alpha(s_i),\ \beta > 0$$

3.2 문제의 정형화

가속열화시험을 설계하기 위한 다양한 최적화 기준이 활용되고 있으며 사용조건에서의 수명분포의 q-분위수 수명 또는 평균 수명의 (점근) 분산과 평균 제곱 오차 (Mean Squared Error, MSE)가 가장 널리 활용되고 있다 (Li and Kececioglu 2004, 2006, Liao and Tseng 2006, Park and Yum 1997, Park and Yum 2004, Shi et al. 2009, Tseng et al. 2009). 추가적으로 Boulanger and Escobar (1994)와 Liao and Elsayed (2004)는 일반화 분산 (generalized variance)을, Tang et al.(2004)는 총 시험 비용을 최적화 기준으로 활용하였다. 본 논문에서는 사용조건에서 수명 분포의 q-분위수 추정량의 점근분산이 최소가 되도록 스트레스 수준 및 각 스트레스에 할당하는 시료 수를 결정하고자 한다. 목적함수를 계산하기 위한 N 개 시료의 대수우도함수는 식 (1)과 (2)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ln L = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left[(A_i - 1)\ln\Delta y_{ijk} - \frac{\Delta y_{ijk}}{\beta} - \ln\Gamma(A_i) - A_i\ln\beta\right]$$

여기서, $A_i = \alpha(s_i)\Delta t = [\exp(\delta_1 + \delta_2 s_i)]\Delta t$ 이다. 피셔정보행렬 F 는 $\ln L$를 $\delta_1, \delta_2, \beta$ 에 대하여 이차편미분하여 음의 기댓값을 취하여 다음과 같이 산출할 수 있다 (Lawless 1982, 부록 A).

$$\mathbf{F} = mN \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{r} \pi_i A_i^2 B_i & \sum_{i=1}^{r} \pi_i A_i^2 B_i s_i & \sum_{i=1}^{r} \pi_i \frac{A_i}{\beta} \\ & \sum_{i=1}^{r} \pi_i A_i^2 B_i s_i^2 & \sum_{i=1}^{r} \pi_i \frac{A_i s_i}{\beta} \\ symmetric & & \sum_{i=1}^{r} \pi_i \frac{A_i}{\beta^2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

여기서, B_i는 $\Psi_1(A_i) = \partial \ln \Gamma(A_i) / \partial A_i^2,\ i = 1, 2, \cdots, r$ 로 정의되는 트리감마함수(trigamma function)이다. 이로부터 $\mathbf{F}^{-1}$를 구하고 $\mathbf{h}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{q,0}}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial t_{q,0}}{\partial \delta_2} \\ \frac{\partial t_{q,0}}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4\exp(\delta_1)} \left(z_q + \sqrt{4\beta_c + z_q^2} \right)^2 \\ 0 \\ -\frac{\beta_c^2}{y_c} \left(z_q + \sqrt{4\beta_c + z_q^2} \right) \Big/ \left[\exp(\delta_1) \sqrt{4\beta_c + z_q^2} \right] \end{bmatrix}$$

여기서, $\beta_c = y_c / \beta$ 이다. 그러면, $\widehat{t_{q,0}}$ 의 점근분산은 다음과 같이 구할 수 있다 (부록B).

$$Avar(\widehat{t_{q,0}}) = \mathbf{h}^t \mathbf{F}^{-1} \mathbf{h}$$

여기서, 't'는 전치를 나타낸다. 두 스트레스 수준을 갖는 가속열화시험의 최적화 문제는 척도인자인 $1/(mN)$를 생략하여 다음과 같이 정형화할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad v = \frac{h_1^2 P + 2h_1 h_3 Q + h_3^2 R}{K} \\ &\text{Subject to} \quad 0 \le s_1 < s_2 \le 1 \\ &\qquad\qquad\quad\ 0 \le \pi_1 \le 1 \\ &\qquad\qquad\quad\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} &v = mN \bullet Avar(\widehat{t_{q,0}}), \\ &K = \pi_1 \pi_2 A_1^2 A_2^2 (s_2 - s_1)^2 \left[\pi_1 B_2 (A_1 B_1 - 1 + \pi_2 B_1 (A_2 B_2 - 1) \right], \\ &P = \left(\pi_1 A_1^2 B_1 s_1^2 + \pi_2 A_2^2 B_2 s_2^2 \right) (\pi_1 A_1 + \pi_2 A_2) - (\pi_1 A_1 s_1 + \pi_2 A_2 s_2)^2, \\ &Q = \frac{y_c}{\beta_c} \left[\pi_1 \pi_2 A_1 A_2 (s_2 - s_1)(A_1 B_1 s_1 - A_2 B_2 s_2) \right], \\ &R = \frac{y_c^2}{\beta_c^2} \left[\pi_1 \pi_2 A_1^2 A_2^2 B_1 B_2 (s_2 - s_1)^2 \right] \text{ 이고,} \end{aligned}$$

목적함수 v는 결정변수 s_1, s_2, π_1, π_2 와 δ_1, δ_2, β_c, q, $\Delta t(=1/m)$의 함수이다.

3.3 사전추정

목적함수 v는 미지의 상수 δ_1, δ_2, β_c에 의존하므로 미지의 모수에 대한 사전 추정이 필요하다. Lim and Yum (2011)은 최대 스트레스 수준에서의 예비 시험과 전문가의 판단에 의한 사전 추정 방법을 제시하였다. 먼저 짧은 시간동안 가능한 많은 열화 정보를 확보하기 위하여 최대 스트레스 수준 ($s_2 = 1$) 에서 예비 시험을 수행하고 이로부터 β_c와 $\delta_1+\delta_2$ 형태의 모수를 추정한다. 그리고 p_0를 사용조건에서 특정 시점 (τ)까지의 고장 확률이라고 하면 식 (3)의 Birnbaum-Saunders 분포로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p_0 = \Phi\left\{\sqrt{\beta_c}\left[\sqrt{\frac{\exp(\delta_1)\tau}{\beta_c}} - \sqrt{\frac{\beta_c}{\exp(\delta_1)\tau}}\right]\right\}$$

그러면, δ_1은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta_1 = 2\ln\left(z_0 + \sqrt{z_0^2 + 4\beta_c}\right) - \ln(4\tau)$$

여기서 z_0는 표준정규분포의 p_0 분위수이다. δ_2는 예비 시험으로부터 추정된 $\delta_1+\delta_2$로부터 δ_1의 사전추정치를 뺌으로써 사전 추정할 수 있다.

3.4 최적화

위 문제는 목적함수가 복잡하기 때문에 분석적 (analytic) 방법으로 해를 구하기 어려워 모의 담금질(Simulated Annealing)과 같은 시뮬레이션 방법으로 최적해를 구할 수 있으나, 시간이 오래 걸리는 단점이 있어 본 논문에서는 s_1, s_2, π_1 에 대하여 격자탐색을 이용하여 최적해를 산출하였다. 최적화 결과 높은 스트레스 수준은 항상 최대 스트레스 수준으로 결정되며 (즉, $s_2^* = 1$), 다양한 δ_1, δ_2, β_c, q, m 값들의 조합에 따른 결과는 Table 1a-1b에서 보여주며, 다음과 같은 경향을 보인다. 여기서, '*'는 최적해를 나타낸다.

(1) δ_1 또는 δ_2가 증가할수록, 또는 m이 감소할수록 s_1^*은 증가한다.
(2) q 또는 β_c가 증가할수록 s_1^*은 감소한다.
(3) δ_1이 증가할수록, 또는 m이 감소할수록 π_1^*은 증가한다.
(4) q 또는 β_c 이 증가할수록 일반적으로 π_1^*은 증가한다.

위 (1)의 경향성은 δ_1과 δ_2가 작을 경우, $s_1^* = 0$이 되고 이것은 사용조건과 최대 스트레스 수준에서 가속열화시험을 수행하는 것이 최적이라는 것을 의미한다.

Table 1a. Optimal ADT plans ($s_2^* = 1, q$=0.05)

			m=10				m=20			
β_c	δ_1	δ_2	s_1^*	π_1^*	π_2^*	v*	s_1^*	π_1^*	π_2^*	v*
10	-1	3	0	0.352	0.648	2357.9	0	0.303	0.697	3104.8
		5	0	0.383	0.617	1938.3	0	0.366	0.634	2055.6
		7	0.656	0.826	0.174	986.1	0.653	0.816	0.184	1878.6
	0	3	0	0.426	0.574	243.0	0	0.373	0.627	291.1
		5	0.530	0.833	0.167	173.3	0	0.394	0.606	254.5
		7	0.658	0.831	0.169	52.9	0.657	0.828	0.172	100.2
	1	3	0.290	0.839	0.161	21.3	0	0.458	0.542	30.1
		5	0.534	0.849	0.151	9.4	0.532	0.840	0.160	17.7
		7	0.658	0.833	0.167	3.0	0.658	0.832	0.168	5.4
20	-1	3	0	0.367	0.633	11707.6	0	0.316	0.684	15367.7
		5	0	0.398	0.602	9668.1	0	0.380	0.620	10260.6
		7	0.650	0.830	0.170	5067.2	0.646	0.820	0.180	9717.3
	0	3	0	0.444	0.556	1204.6	0	0.388	0.612	1446.1
		5	0.519	0.838	0.162	881.6	0	0.409	0.591	1268.6
		7	0.652	0.835	0.165	265.2	0.651	0.832	0.168	512.1
	1	3	0.268	0.849	0.151	105.4	0	0.478	0.522	149.0
		5	0.522	0.855	0.145	47.0	0.521	0.846	0.154	90.0
		7	0.652	0.837	0.163	14.4	0.652	0.836	0.164	26.9
30	-1	3	0	0.374	0.626	28963.4	0	0.322	0.678	37960.7
		5	0	0.405	0.595	23971.0	0	0.386	0.614	25449.0
		7	0.647	0.832	0.168	12760.7	0	0.394	0.606	24453.5
	0	3	0	0.453	0.547	2978.0	0	0.396	0.604	3578.1
		5	0.513	0.841	0.159	2207.7	0	0.417	0.583	3144.2
		7	0.649	0.837	0.163	661.9	0.648	0.834	0.166	1287.2
	1	3	0.256	0.853	0.147	260.2	0	0.488	0.512	367.8
		5	0.517	0.858	0.142	117.1	0.515	0.849	0.151	225.1
		7	0.649	0.839	0.161	35.1	0.649	0.838	0.162	66.9

Table 1b. Optimal ADT plans ($s_2^* = 1, q$=0.1)

			m=10				m=20			
β_c	δ_1	δ_2	s_1^*	π_1^*	π_2^*	v^*	s_1^*	π_1^*	π_2^*	v^*
10	-1	3	0	0.363	0.637	2776.0	0	0.312	0.688	3646.8
		5	0	0.394	0.606	2289.7	0	0.376	0.624	2429.6
		7	0.652	0.828	0.172	1190.5	0.648	0.819	0.181	2279.8
	0	3	0	0.439	0.561	285.7	0	0.384	0.616	342.8
		5	0.522	0.837	0.163	207.7	0	0.405	0.595	300.5
		7	0.653	0.834	0.166	62.7	0.652	0.831	0.169	120.5
	1	3	0.273	0.846	0.154	25.0	0	0.473	0.527	35.4
		5	0.525	0.854	0.146	11.1	0.524	0.844	0.156	21.2
		7	0.654	0.836	0.164	3.4	0.654	0.834	0.166	6.4
20	-1	3	0	0.376	0.624	13122.7	0	0.323	0.677	17193.7
		5	0	0.407	0.593	10865.8	0	0.388	0.612	11536.6
		7	0.646	0.832	0.168	5803.8	0	0.395	0.605	11086.4
	0	3	0	0.454	0.546	1349.1	0	0.397	0.603	1621.2
		5	0.512	0.842	0.158	1002.9	0	0.418	0.582	1425.1
		7	0.648	0.838	0.162	300.6	0.647	0.834	0.166	585.2
	1	3	0.254	0.854	0.146	117.8	0	0.490	0.510	166.6
		5	0.516	0.858	0.142	53.1	0.514	0.849	0.151	102.2
		7	0.649	0.839	0.161	15.8	0.649	0.838	0.162	30.3
30	-1	3	0	0.381	0.619	31772.8	0	0.329	0.671	41577.5
		5	0	0.413	0.587	26356.7	0	0.394	0.606	27991.9
		7	0.644	0.834	0.166	14268.6	0	0.401	0.599	26909.4
	0	3	0	0.462	0.538	3264.5	0	0.404	0.596	3926.0
		5	0.507	0.844	0.156	2453.3	0	0.425	0.575	3455.7
		7	0.646	0.839	0.161	734.7	0.645	0.836	0.164	1437.1
	1	3	0.245	0.858	0.142	284.6	0	0.498	0.502	402.7
		5	0.511	0.861	0.139	129.5	0.509	0.852	0.148	249.9
		7	0.646	0.841	0.159	38.1	0.646	0.840	0.160	73.9

3.5 총 시료수 결정

가속열화시험에서 중요한 사항 중 하나인 시료수는 다음과 같은 조건을 만족하는 최소의 N 으로 결정할 수 있다.

$$P\left\{(1-\epsilon)t_{q,0} \le \widehat{t_{q,0}} \le (1+\epsilon)t_{q,0}\right\} \ge \phi \tag{6}$$

여기서, ϵ, ϕ 는 미리 주어지는 양의 상수이다. 식 (6)은 다시 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P\left\{-\epsilon \le \frac{\widehat{t_{q,0}}}{t_{q,0}} - 1 \le \epsilon\right\} \ge \phi \tag{7}$$

그러면, 식 (7)를 만족하는 N의 최소값은 근사적으로 다음과 같다 (Meeker and Escobar 1998).

$$N^* \approx \frac{\left[z_{(1+\phi)/2}\right]^2 v^*}{m\epsilon^2 t_{q,0}^2} \tag{8}$$

여기서, $z_{(1+\phi)/2}$ 는 표준정규분포의 $(1+\phi)/2$ 분위수이다.

4. 예제 및 민감도 분석

발광 다이오드 (Light Emitting Diode, LED)는 광섬유 전송 시스템 및 TV와 모니터 등의 전자제품에 널리 사용되고 있다. 본 예제에서는 고장과 밀접한 관련이 있는 열화특성치를 시간에 따른 LED 밝기의 감소라 하고 사용조건에서 발광 다이오드의 0.1 분위수 수명을 추정하기 위한 가속열화시험을 계획하고자 한다. 초기 대비 50% 이하로 떨어지면 고장으로 정의되며 ($y_c = 0.5$), 온도는 가속 스트레스 변수로 고려되고 최대 스트레스 수준과 사용 조건은 각각 150°C(=423°K)과 50°C(=323°K)로 주어진다. 최대 시험 시간은 1500 시간 (약 2개월)이며 각 시료에 대하여 20회 열화특성치를 측정한다 ($m = 20$ or $\Delta t = 1/20$). 열확특성치는 감마과정을 따르며, 가속 관계는 아레니우스 모형을 만족한다.미지의 모수를 사전추정하기 위하여 최대 스트레스 수준 (150°C)에서 100시간동안 10개의 시료에 대하여 예비 시험을 수행한 결과 다음과 같은 열화데이터를 획득하였다.

32, 24, 39, 35, 45, 31, 25, 15, 35, 47 (%).

위 데이터로부터 $\delta_1+\delta_2$와 β_c은 각각 5.1과 19.1로 추정되었다. 또한, 사용조건에서 6개월 동안의 불량률을 1×10-6 이라고 예측하고 δ_1의 사전추정치를 0.6, δ_2의 사전추정치를 $4.5(=(\delta_2+\delta_2)-\delta_2 = 5.1-0.6)$로 산출하였다. 이에 따른 최적 시험 계획은 다음과 같다.

$$s_1^* = 0,\ s_2^* = 1, \pi_1^* = 0.452,\ \pi_2^* = 0.548 \tag{9}$$

최적 시험 계획을 수립하는데 δ_1, δ_2와 β_c의 사전추정치가 이용되기 때문에 δ_1, δ_2와 σ의 실제값에 대한 최적 계획과는 다를 수 있으므로 δ_1, δ_2와 β_c 에 대한 민감도 분석이 필요하다. 각 미지의 상수에 대한 가능 영역을 아래와 같다고 가정하고, 각 상수의 최소, 중간, 최대값 27개의 조합에 대하여 민감도 분석을 수행하였다.

$$17.1 \le \beta_c \le 21.1$$
$$0.5 \le \delta_1 \le 0.7$$
$$4.0 \le \delta_2 \le 5.0$$

민감도 분석 결과는 Table 2에서 보여주며, v_0와 v^*는 각각 식 (9)에서의 계획과 δ_1, δ_2와 β_c의 참값을 사용하여 얻어진 최적 계획에 대한 v값이다. Table 2 에서 Ratio v_0/v^* 값은 δ_1, δ_2와 β_c의 사전추정 시 발생할 수 있는 오차에 대하여 민감하지 않다는 것을 의미한다.

Table 2. Sensitivity Analysis of the optimal plan for the example.

β_c	δ_1	δ_2	v_0	v^*	Ratio
17.1	0.5	4.0	351.40	351.26	1.000384
		4.5	347.92	347.82	1.000294
		5.0	345.98	309.40	1.118213
	0.6	4.0	281.97	281.96	1.000037
		4.5	279.54	279.54	1.000016
		5.0	278.17	231.55	1.201352
	0.7	4.0	226.00	225.98	1.000070
		4.5	224.30	218.25	1.027728
		5.0	223.33	173.12	1.290049
19.1	0.5	4.0	448.76	448.65	1.000255
		4.5	444.35	444.27	1.000182
		5.0	441.88	396.40	1.114730
	0.6	4.0	360.11	360.11	1.000005
		4.5	357.02	357.02	1.000000
		5.0	355.28	296.64	1.197675
	0.7	4.0	288.63	288.59	1.000146
		4.5	286.48	279.42	1.025235
		5.0	285.25	221.78	1.286190
21.1	0.5	4.0	558.70	558.61	1.000164
		4.5	553.23	553.17	1.000107
		5.0	550.18	494.87	1.111746
	0.6	4.0	448.34	448.34	1.000000
		4.5	444.51	444.51	1.000008
		5.0	442.36	370.32	1.194524
	0.7	4.0	359.36	359.27	1.000234
		4.5	356.68	348.63	1.023107
		5.0	355.17	276.85	1.282877

총 시료수는 사전추정에 대한 오차를 고려하여 보수적으로 결정된다. 식 (4)로부터 사용조건에서 수명분포의 0.1 분위수의 사전 추정치는 7.83으로 산출되며 $\phi = 0.9$, $\epsilon = 0.2$로 고려하여 Table 2에서 가장 큰 v_0 값이 558.70을 적용하면 식 (8)로부터 보수적인 최소 총시료수는 31개이다. 최적시험 계획은 총 31개 시료에 대하여 14개 (45.2%)는 사용조건 50°C, 나머지 17개 (54.8%)는 최대 스트레스 수준 150°C에서 평가하는 것이다.

5. 결 론

신뢰성이 매우 높은 제품에 대하여 가혹한 조건에서 시험하여 열화특성치를 측정하고 이로부터 짧은 시간 내에 정상 사용조건에서의 수명 정보를 얻고자 하는 가속열화시험이 자주 이용되고 있다. 열화특성치의 경우 일반적으로 단조 증가하는 형태를 보이며, 이를 잘 설명할 수 있는 모형이 감마과정이다. 본 논문에서는 열화특성치가 감마과정을 따른다는 가정 하에서 사용조건에서 수명분포의 q 분위수 추정량의 점근분산이 최소가 되도록 스트레스 수준, 각 스트레스 수준에 할당하는 시료수를 결정하는 가속열화시험의 최적 계획을 개발하였다. 또한, 총 시료수 결정하는 방법을 제시하였으며, 미지의 모수의 불확실성에 대한 효과를 평가하기 위해 민감도 분석을 수행하였다.

기존의 일반열화경로 모형을 가정한 가속열화시험의 계획과 다르게 본 연구에서의 추계적과정 모형은 시간에 따른 열화 측정 사이의 상관관계에 대하여 설명할 수 있으며, 특히 감마과정의 경우 단조 증가하는 열화 특성을 잘 설명할 수 있다.

추후 연구과제로 두 가지 스트레스가 가해지는 경우 짧은 시간 내에 제품의 수명에 대한 많은 양의 정보를 획득할 수 있으므로 두 가지 스트레스가 가해지는 경우의 가속열화시험의 계획에 대한 연구가 있으며, 모든 시험에서는 비용 제약이 존재하므로 비용 제약 하에서의 가속열화시험의 계획에 대한 연구가 필요하다.

부 록

부록 A. 피셔정보행렬 (Fisher Information Matrix)의 유도

대수우도함수 $\ln L$을 $\delta_1, \delta_2, \beta$ 에 대해 일차 편미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_1} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left[A_i \ln \Delta y_{ijk} - A_i \ln \beta - A_i \Psi_0\left(A_i\right)\right] ,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_2} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left[A_i s_i \ln \Delta y_{ijk} - A_i s_i \ln \beta - A_i \Psi_0\left(A_i\right) s_i\right] ,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{A_i}{\beta} + \frac{\Delta y_{ijk}}{\beta^2}\right)$$

여기서, $\Psi_0(A_i)$는 $\Psi_0(A_i) = \partial \ln \Gamma(A_i)/\partial A_i = \Gamma'(A_i)/\Gamma(A_i)$ 로 정의되는 디감마 함수 (Digamma function)이다. 대수우도함수 $\ln L$을 $\delta_1, \delta_2, \beta$ 에 대해 이차 편미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \delta_1^2} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left[A_i \ln \Delta y_{ijk} - A_i \ln \beta - A_i \Psi_0\left(A_i\right) - A_i^2 B_i\right] ,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \delta_1 \partial \delta_2} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left[A_i s_i \ln \Delta y_{ijk} - A_i s_i \ln \beta - A_i \Psi_0\left(A_i\right) s_i - A_i^2 B_i s_i\right] ,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\delta_1\partial\beta}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{A_i}{\beta}\right) ,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\delta_2^2}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left[A_i s_i^2\ln\Delta y_{ijk}-A_i s_i^2\ln\beta-A_i\Psi_0\left(A_i\right)s_i^2-A_i^2B_i s_i^2\right] ,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\delta_2\partial\beta}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{A_i s_i}{\beta}\right) ,$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta^2}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{A_i}{\beta^2}-\frac{2\Delta y_{ijk}}{\beta^3}\right)$$

피셔정보행렬을 산출하기 위한 $E(\ln\Delta y_{ijk})$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}E\left(\ln\Delta y_{ijk}\right)&=\int_0^\infty \ln\Delta y_{ijk}\frac{1}{\Gamma\left(A_i\right)}\frac{1}{\beta^{A_i}}\Delta y_{ijk}{}^{A_i-1}e^{-\Delta y_{ijk}/\beta}d\Delta y_{ijk}\\&=\frac{1}{\Gamma\left(A_i\right)}\int_0^\infty \ln\left(\beta x\right)\cdot x^{A_i-1}e^{-x}dx\\&=\frac{1}{\Gamma\left(A_i\right)}\left(\int_0^\infty \ln\beta\cdot x^{A_i-1}e^{-x}dx+\int_0^\infty \ln x\cdot x^{A_i-1}e^{-x}dx\right)\\&=\frac{1}{\Gamma\left(A_i\right)}\left[\ln\beta\cdot\Gamma\left(A_i\right)+\Gamma'\left(A_i\right)\right]\\&=\ln\beta+\Psi_0\left(A_i\right)\end{aligned}$$

그리고, $E(ly_{ijk})=A_i\beta$ 이므로 $\ln L$의 이차편미분의 음의 기댓값을 취하여 다음과 같고 식 (5)의 피셔정보행렬을 구할 수 있다.

$$E\left(-\frac{\partial^2\ln L}{\partial\delta_1^2}\right)=mN\sum_{i=1}^{r}\pi_iA_i^2B_i ,\quad E\left(-\frac{\partial^2\ln L}{\partial\delta_1\partial\delta_2}\right)=mN\sum_{i=1}^{r}\pi_iA_i^2B_is_i ,$$

$$E\left(-\frac{\partial^2\ln L}{\partial\delta_1\partial\beta}\right)=mN\sum_{i=1}^{r}\pi_i\frac{A_i}{\beta} ,\quad E\left(-\frac{\partial^2\ln L}{\partial\delta_2^2}\right)=mN\sum_{i=1}^{r}\pi_iA_i^2B_is_i^2 ,$$

$$E\left(-\frac{\partial^2\ln L}{\partial\delta_2\partial\beta}\right)=mN\sum_{i=1}^{r}\pi_i\frac{A_is_i}{\beta} ,\quad E\left(-\frac{\partial^2\ln L}{\partial\beta^2}\right)=mN\sum_{i=1}^{r}\pi_i\frac{A_i}{\beta^2} .$$

부록 B. 사용조건에서 수명분포의 q 분위수 추정량의 점근분산 유도

두 스트레스 수준을 갖는 경우 피셔정보행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{F} = mN\begin{bmatrix} \pi_1 A_1^2 B_1 + \pi_2 A_2^2 B_2 & \pi_1 A_1^2 B_1 s_1 + \pi_2 A_2^2 B_2 s_2 & \pi_1 \dfrac{A_1}{\beta} + \pi_2 \dfrac{A_2}{\beta} \\ & \pi_1 A_1^2 B_1 s_1^2 + \pi_2 A_2^2 B_2 s_2^2 & \pi_1 \dfrac{A_1 s_1}{\beta} + \pi_2 \dfrac{A_2 s_2}{\beta} \\ symmetric & & \pi_1 \dfrac{A_1}{\beta^2} + \pi_2 \dfrac{A_2}{\beta^2} \end{bmatrix}$$

$$= mN\mathbf{F}' \quad .$$

$\mathbf{F}^{-1}$을 다음과 같이 정의되는 피셔정보행렬의 역행렬이라고 하면,

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{mN}\begin{bmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{12} & \tilde{f}_{13} \\ & \tilde{f}_{22} & \tilde{f}_{23} \\ symmetric & & \tilde{f}_{33} \end{bmatrix} \quad .$$

사용조건에서 수명분포의 q 분위수 추정량의 점근분산은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathrm{Avar}\left(\hat{t}_{q,0}\right) &= \mathbf{h}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{h} \\ &= \frac{1}{mN}\left(h_1^2 \tilde{f}_{11} + 2h_1 h_3 \tilde{f}_{13} + h_3^2 \tilde{f}_{33}\right) \end{aligned}$$

여기서

$$\tilde{f}_{11} = \frac{f_{22}f_{33} - f_{23}^2}{|\mathbf{F}'|} = \frac{1}{|\mathbf{F}'|}\frac{\beta_c^2}{y_c^2}\left[\left(\pi_1 A_1^2 B_1 s_1^2 + \pi_2 A_2^2 B_2 s_2^2\right)\left(\pi_1 A_1 + \pi_2 A_2\right) - \left(\pi_1 A_1 s_1 + \pi_2 A_2 s_2\right)^2\right],$$

$$\tilde{f}_{13} = \frac{f_{12}f_{23} - f_{13}f_{22}}{|\mathbf{F}'|} = \frac{1}{|\mathbf{F}'|}\frac{\beta_c}{y_c}\pi_1\pi_2 A_1 A_2\left(s_2 - s_1\right)\left(A_1 B_1 s_1 - A_2 B_2 s_2\right),$$

$$\tilde{f}_{33} = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{|\mathbf{F}'|} = \frac{1}{|\mathbf{F}'|}\pi_1\pi_2 A_1^2 A_2^2 B_1 B_2\left(s_2 - s_1\right)^2,$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}'| &= \left(f_{11}f_{22}f_{33} + 2f_{12}f_{13}f_{23} - f_{13}^2 f_{22} - f_{12}^2 f_{33} - f_{11}f_{23}^2\right) \\ &= \frac{\beta_c^2}{y_c^2}\left\{\pi_1\pi_2 A_1^2 A_2^2\left(s_2 - s_1\right)^2\left[\pi_1 B_2\left(A_1 B_1 - 1\right) + \pi_2 B_1\left(A_2 B_2 - 1\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

위 식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathrm{Avar}\left(\hat{t}_{q,0}\right) = \frac{1}{mN}\frac{h_1^2 P + 2h_1 h_3 Q + h_3^2 R}{K} \quad .$$

여기서,

$$K = \pi_1\pi_2 A_1^2 A_2^2\left(s_2 - s_1\right)^2\left[\pi_1 B_2\left(A_1 B_1 - 1\right) + \pi_2 B_1\left(A_2 B_2 - 1\right)\right] \quad ,$$

$$P=\left(\pi_1 A_1^2 B_1 s_1^2+\pi_2 A_2^2 B_2 s_2^2\right)\left(\pi_1 A_1+\pi_2 A_2\right)-\left(\pi_1 A_1 s_1+\pi_2 A_2 s_2\right)^2 ,$$

$$Q=\frac{y_c}{\beta_c}\left[\pi_1\pi_2 A_1 A_2\left(s_2-s_1\right)\left(A_1 B_1 s_1-A_2 B_2 s_2\right)\right] ,$$

$$R=\frac{y_c^2}{\beta_c^2}\left[\pi_1\pi_2 A_1^2 A_2^2 B_1 B_2\left(s_2-s_1\right)^2\right] .$$

REFERENCES

Boulanger, Michele, and Escobar, Luis A. 1994. “Experimental Design for a Class of Accelerated Degradation Tests.” Technometrics 36(3):260-272.

Lawless, Jerald F. 1982. Statistical Models and Methods for Life Data, 1st ed. New York: Wiley.

Li, Qishan, and Kececioglu, Dimitri B. 2004. “Optimal Design of Accelerated Degradation Tests.” International Journal of Materials and Product Technology 20(1-3):73-90.

Li, Qishan, and Kececioglu, Dimitri B. 2006. “Design of an Optimal Plan for an Accelerated Degradation Test: A Case Study.” International Journal of Quality and Reliability Management 23(4):426-440.

Liao, Chen-Mao, and Tseng, Sheng Tsaing. 2006. “Optimal Design for Step-Stress Accelerated Degradation Tests.” IEEE Transactions on Reliability 55(1):59-66.

Liao, Haitao, and Elsayed, E. A. 2004. “Reliability Prediction and Testing Plan on an Accelerated Degradation Rate Model.” International Journal of Materials Product Technology 21(5):402-422.

Lim, Heonsang. 2012. "Optimal Design of Accelerated Degradation Tests under the Constraint of Total Experimental Cost in the Case that the Degradation Characteristic Follows a Wiener Process." Journal of the Korean society for quality management 40(2):117-126.

Lim, Heonsang, and Yum, Bong-Jin. 2011. “Optimal Design of Accelerated Degradation Tests based on Wiener Process Models.” Journal of Applied Statistics 38(2):309-325.

Meeker, William Q., and Escobar, Luis A. 1998. Statistical Methods for Reliability Data. New York: John Wiley & Sons.

Nelson, W. 1990. Accelerating Test: Statistical Models, Test Plans and Data Analysis. New York: John Wiley & Sons.

Pan, Zhengqiang, and Sun, Quan. 2014. “Optimal Design for Step-Stress Accelerated Degradation Test with Multiple Performance Characteristics Based on Gamma Processes.” Communication in Statistics- Simulation and Computation 43(2):298-314.

Park, Chanseok, and Padgett, W. J. 2005. “Accelerated Degradation Models for Failure based on Geometric Brownian Motion and Gamma Processes.” Lifetime Data Analysis 11(4):511-527.

Park, Jong-In, and Yum, Bong-Jin. 1997. “Optimal Design of Accelerated Degradation Tests for Estimating Mean Lifetime at the Use Condition.” Engineering Optimization 28(3):199-230.

Park, Sang-Jun, and Yum, Bong-Jin. 2004. “Optimal Design of Step-Stress Degradation Tests in the Case of Destructive Measurement.” Quality Technology and Quantitative Management 1(1):105-124.

Shi, Ying, Escobar, Luis A., and Meeker, William Q. 2009. “Accelerated Destructive Degradation Test Planning.” Technometrics 51(1):1-13.

Tang, Loon-Ching, Yang, G. Y., and Xie, Min. 2004. “Planning of Step-Stress Accelerated Degradation Test.” Proceedings of the 50th Annual Reliability and Maintainability Symposium, Los Angeles, CA.

Tseng, Sheng-Tsaing, Balakrishnan, Narayanaswamy, and Tsai, Chih-Chun. 2009. “Optimal Design Step-Stress Accelerated Degradation Test Plan for Gamma Degradation Processes.” IEEE Transactions on Reliability 58(4):611-618.