

< 응용논문 >

DOI <http://dx.doi.org/10.3795/KSME-A.2015.39.8.801>

ISSN 1226-4873(Print)
2288-5226(Online)

저널베어링의 이상상태 진단을 위한 데이텀 효용성 평가

전병철* · 정준하* · 윤병동*† · 김연환** · 배용채**

* 서울대학교 기계항공공학부, ** 한국전력 전력연구원 발전연구소

Evaluation of Datum Unit for Diagnostics of Journal-Bearing Systems

Byungchul Jeon*, Joonha Jung*, Byeng D. Youn*†, Yeon-Whan Kim** and Yong-Chae Bae**

* Dept. of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul Nat'l Univ.,

** Power Generation Laboratory, KEPCO Research Institute

(Received November 24, 2014 ; Revised June 19, 2015 ; Accepted June 25, 2015)

Key Words: Journal Bearing(저널베어링), Datum Unit(데이텀), Feature(특성인자), Diagnosis(진단)

초록: 저널베어링은 회전하는 축과 베어링 지지부 사이에 유막을 형성하여 회전체를 지지하는 구조물이며, 고속 및 고하중 조건에서도 안정적이기 때문에 발전소와 같은 대형 시스템에 널리 사용되고 있다. 본 연구에서는 저널베어링 시스템의 신뢰성을 확보하기 위한 감독학습 기반의 상태진단 알고리즘을 연구하였다. 기존에는 진동신호 특성인자들의 정의에 대한 연구가 주로 진행되었으나, 본 연구에서는 정의된 특성인자의 추출단위인 데이텀의 적용 기준에 대한 연구가 수행되었다. 데이텀의 효용성 평가를 통해 저널베어링 회전체 특성인자의 추출기준은 시간영역에서 1 회전, 주파수영역에서 60 회전 기준이 타당하다는 결론을 도출하였다.

Abstract: Journal bearings support rotors using fluid film between the rotor and the stator. Generally, journal bearings are used in large rotor systems such as turbines in a power plant, because even in high-speed and load conditions, journal bearing systems run in a stable condition. To enhance the reliability of journal-bearing systems, in this paper, we study health-diagnosis algorithms that are based on the supervised learning method. Specifically, this paper focused on defining the unit of features, while other previous papers have focused on defining various features of vibration signals. We evaluate the features of various lengths or units on the separable ability basis. From our results, we find that one cycle datum in the time-domain and 60 cycle datum in the frequency domain are the optimal datum units for real-time journal-bearing diagnosis systems.

- 기호설명 -

μ_i : Class i 의 평균

σ_i : Class i 의 표준편차

1. 서론

저널베어링은 회전하는 축과 베어링 지지부 사이에 유막을 형성하여 회전체를 지지하기 때문에 고속, 고하중의 조건에서 안정성이 요구되는 시스템에 적합하다. 저널베어링은 화력발전소의 터빈이나 대형 펌프 등에 널리 사용되고 있으며, 선박

추진부에도 일부 사용되고 있다. 저널베어링을 포함하는 일반적인 기계시스템에서는 이상조건이나 고장이 발생하면 시스템의 성능이 점차 저하된다. 특히 대형 시스템의 경우, 고장 발생 초기에 적절한 조치가 이루어지지 못하면 심각한 시스템의 손상과 함께 막대한 사회적·경제적 손실을 야기할 수 있다. 따라서 시스템의 상태를 실시간으로 평가하고 시스템의 상태에 적합한 조치를 취하여 안전성을 확보해야 한다. 이를 위해서는 강건한 실시간 진단 시스템이 필요하다.

진동신호는 회전체 시스템의 거동을 가장 잘 나타내는 대표적인 데이터로써 다양한 형태의 베어링 진단에 널리 활용되고 있다.⁽¹⁻⁵⁾ 일반적으로 저널베어링은 변위 형태로 측정된 진동데이터로부터

† Corresponding Author, bdyoun@snu.ac.kr

© 2015 The Korean Society of Mechanical Engineers

진동 크기와 함께 주파수 분석 및 위상경향 분석 결과를 활용하여 진단이 이루어진다.^(6,7) 특히 실시간 상태감시에서는 진동크기가 주로 활용되고 있으며, 기준치 이상의 진동이 발생할 경우 시스템은 비정상으로 판별되어 전문가의 추가적인 분석이 요구된다.

본 논문에서는 실시간 진단 시스템을 개발하기 위한 과정으로, 감독학습 기반의 진단과정 중 특성인자 추출 기준 연구를 진행하였다. 특성인자 추출은 시스템의 상태 정보를 정량화하는 단계로써 진단관점에서 매우 중요하다.

논문의 2 장에서는 감독학습 기반의 진단과정을 설명하고, 3 장에서는 연구에 사용된 데이터와 신호처리 기법을 기술하였다. 4 장에서는 특성인자 추출을 위한 데이터 정의 및 효율성 방법을 설명하였고, 5 장에 결과 및 분석내용을 정리하였다. 6 장에서는 연구요약과 함께 향후 연구방향을 논하였다.

2. 진단 시스템에서의 특성인자 추출

일반적인 감독학습 기반의 상태 분류과정은 Fig. 1 과 같다. 감독학습에서의 진단 절차는 분류기의 학습과정과 학습된 분류기를 적용한 진단과정으로 구분된다. 먼저 학습과정은 학습 데이터 획득, 신호처리, 특성인자 추출, 최적인자 선별, 분류기 설계 과정으로 이루어진다. 데이터 획득 과정에서는 시스템의 상태를 대표하는 정보를 획득하는데, 본 연구에서는 진동데이터가 사용되었다. 진동 데이터에 적합한 신호처리 과정을 거쳐, 시간 및 주파수영역의 특성인자를 추출하고, 분류능력이 우수한 특성인자를 선별한다. 최종적으로 선별된 특성인자는 artificial neural network(ANN)나 support vector machine(SVM) 등의 알고리즘으로 분류기를 학습하는데 이용된다. 진단과정에서는 학습과정에서 적용된 방법들을 이용하여 특성인자를 추출하고, 기 학습된 분류기를 이용해 시스템의 상태를 진단한다.^(5,8-10)

본 연구에서는 감독학습 기반의 진단과정 중 특성인자 추출 과정을 집중적으로 다루고자 한다. 앞서 언급했듯이 특성인자는 대상 시스템의 상태를 두드러지게 표현해주는 정량적인 지표이다. 따라서 효과적인 특성인자는 물리적 관점에서 상태 분석을 가능하게 하고 궁극적으로 진단 시스템의 성능 향상에 기여한다. 현재까지 진행된 연구들은 주로 어떠한 인자를 특성인자로 적용할 것인지에

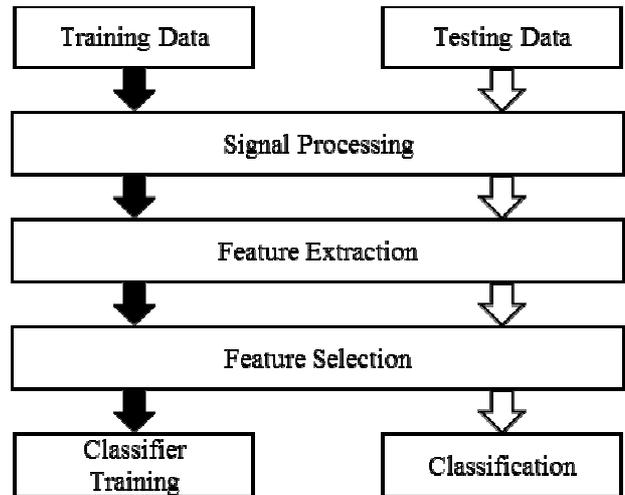


Fig. 1 Machine Learning Process

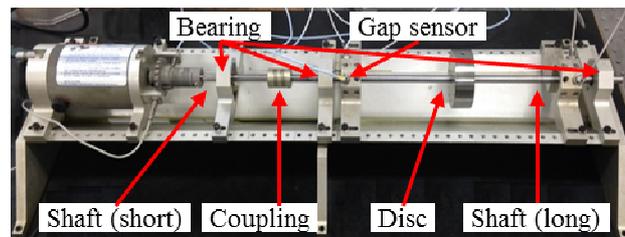


Fig. 2 RK4 Test-bed

초점을 두었지만, 특성인자 추출 시 데이터 길이의 기준을 선정하는 연구는 미비하였다. 따라서 본 논문에서는 최적의 특성인자를 추출하기 위한 방법을 다루고자 한다. 특성인자의 추출 기본 단위인 데이터가 어떻게 정의되는지에 따라 효율성에 차이가 있고, 나아가 진단 시스템의 성능도 달라진다.

3. 데이터 및 신호처리

3.1 데이터

본 연구에서는 Bently Nevada 사의 RK4 저널베어링 실험장치에서 획득한 5 가지 상태 조건의 진동신호와 Matlab 을 통해 시뮬레이션된 3 종류의 진동신호를 이용하였다. 먼저 RK4 의 실험장치의 구성은 Fig. 2 와 같다. 커플링으로 연결된 두 축을 3 개의 베어링이 지지하고 있고, 긴 축에는 800g 의 디스크가 장착되어 있다. 회전속도 3,600 RPM 의 운행조건에서 정상조건과 4 가지 이상상태—질량불평형, 마찰, 오정렬, 오일휠—실험을 진행하였다. 베어링 부근에 장착된 갭 센서를 이용해 60 초 동안의 변위 진동데이터를 측정하였다. 진동 신호는 NI DAQ 4432 를 통해 8,500Hz 의 샘플링 주기

로 획득되었다.

Matlab 을 이용해 시뮬레이션된 신호에서는 정상조건과 실험에 포함되어 있지 않은 2 가지 이상상태를 고려하였다. 정상조건은 60Hz 의 회전성분만 존재하도록 설정하였다. 이상상태 1 은 정상상태 신호에 60Hz 의 절반인 30Hz 주파수 성분을 추가하였고, 이상상태 2 는 정상상태 신호에 60Hz 의 조화주파수 (2, 3,..., 10X) 성분을 추가하였다. 또한 실제 실험데이터에서 주파수 성분의 크기가 바뀌는 특징을 반영하여 조화주파수 성분의 변화폭을 평균값의 10%로 정하여 불확실성을 고려하였다.

3.2. 신호처리

저널베어링은 회전축과 베어링 지지부 사이에 유막이 형성되어 구동되기 때문에 정상적인 조건에서는 정현파에 가까운 진동이 발생한다. 이상상태에서는 파형이 변형되면서 정상조건과 정현파와 다른 형태를 나타내게 되며, 각 상태에서의 파형의 특성을 평가하기 위해서는 각 회전을 기준으로 데이터를 분석하는 것이 효과적이다. 본 연구에서는 각 회전 성분의 데이터를 획득하기 위해 회전각 기반 리샘플링(angular resampling)을 적용하였다. 동일한 회전각 기준으로 데이터를 리샘플링하기 때문에 RPM 이 변하더라도 각 회전당 동일한 갯수의 데이터를 가진다.

4. 데이터 정의에 따른 특성인자 평가

4.1 특성인자 정의

회전체 진단분야에서 주로 사용되는 특성인자들 중 저널베어링에 적합한 인자들을 Table 1 과 2 에 나타내었다. 시간영역의 특성인자에는 동역학적 에너지와 관련된 인자와 진동파형과 관련된 인자 등 총 6 개의 인자가 포함되어 있다.⁽¹⁾ 진동의 파형이 변형되거나 찌그러지는 경우, 그 효과는 시간영역 특성인자에 반영된다. Table 2 의 주파수영역에서 정의된 5 개 특성인자는 중심 주파수와 관련된 인자와 특정 주파수영역 성분의 크기와 관련된 인자로 분류될 수 있다.⁽⁴⁾ 주파수영역의 특성인자는 회전체 진단에 널리 적용되고 있다.

4.2 데이터 정의

본 연구에서 논의하고자 하는 데이터는 특성인자 추출의 기준이 되는 데이터의 길이를 의미한다. 특성인자를 추출하는 데이터 기준에 따라 특성인

Table 1 Time-domain features

Time-domain Features	T1	Root Mean Square (RMS)
	T2	Skewness
	T3	Kurtosis
	T4	Crest Factor
	T5	Shape Factor
	T6	Impulse Factor

Table 2 Frequency-domain features

Freq-domain Features	F1	Frequency Center
	F2	RMS Frequency
	F3	Root Variance Frequency
	F4	[0~1X] / 1X
	F5	[2, 3, 4,..., 10X] / 1X

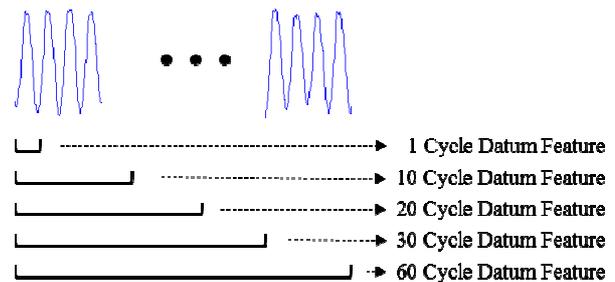


Fig. 3 Datum units for feature extraction

자의 분류 성능이 달라질 수 있다. 본 연구에서는 1 초 길이의 신호에 해당하는 60 회전(3,600 RPM)을 기준으로 데이터를 달리하면서 효율성을 비교 분석하였다.

Fig. 3 과 같이 진동데이터로부터 데이터 단위를 변경하면서 4.1 에서 선정한 11 개 특성인자를 추출하였다. 동일한 데이터에서 추출한 특성인자를 비교하기 위해 60 회전의 진동신호를 기준으로 1·10·20·30·60 회전의 데이터를 적용하였다. 추출한 특성인자들의 수를 동일하게 하기 위해 1·10·20·30 회전 기준 특성인자들은 각각 60·6·3·2 개씩 평균을 내었고, 60 회전 기준 특성인자는 평균을 내지 않았다. 총 5 개의 데이터 중 가장 효율성이 높은 특성인자 추출방법을 선별하기 위해 4.3 절에서 각각의 데이터를 평가하였다.

4.3 데이터 효율성 평가 기준

진단의 관점에서 데이터의 효율성은 특성인자의 분류능력을 기준으로 평가할 수 있다. 분류능력이 높은 인자일수록 더 정확한 진단이 이루어질 수

있기 때문이다. 분류능력을 평가하는 척도로는 Fisher Discriminant Ratio (FDR)를 사용하였다. 2 class 기준 FDR은 각 class의 평균과 분산 만을 사용한 값으로 식 (1)처럼 간단하면서도 직관적인 분류능력을 나타낸다.⁽¹²⁾ 본 연구에서처럼 데이터의 class 가 M (M>2)개일 경우에는 식 (2)처럼 일반화된 식으로 특징인자의 분류능력을 구한다.

$$FDR_{2_class} = \frac{(\mu_i - \mu_j)^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \quad (1)$$

$$FDR_{M_class} = \sum_i^M \sum_{j \neq i}^M \frac{(\mu_i - \mu_j)^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \quad (2)$$

식 (1)과 (2) 모두 class내의 분산이 작고, class간의 거리가 멀수록 FDR은 큰 값을 나타낸다. 즉 특징인자의 분류능력이 크다는 것이다. Fig. 4의 예시는 (a)보다 (b)가 시각적으로 분류가 잘 되는 것을 보여주고 있으며, FDR값도 같은 결과를 나타낸다.

5. 결과 및 고찰

본 연구에서는 데이터 크기 변화에 따른 효율성을 평가하기 위해 RK4 실험데이터와 Matlab 으로 시뮬레이션된 데이터가 사용되었다. 5.1 과 5.2 에서 실험 데이터와 시뮬레이션 신호의 FDR 결과를 나타내었으며, 5.3에서는 데이터 효율성에 대한 종합 결과를 다루었다.

5.1 RK4 실험 데이터의 FDR 결과

RK4 실험 데이터를 이용한 FDR 산출 결과는 Table 3과 4에 나타나 있다. 각 Table에서 음영으로 표시된 부분이 각 특징인자별 가장 높은 FDR 값의 데이터 기준을 표시하고 있다. Table 3은 시간영역의 특징인자에 대한 FDR 결과를 나타내고 있으며, T5(shape factor)를 제외한 모든 인자가 1회전 데이터 기준이 다른 데이터 기준보다 높은 FDR

값을 나타내고 있다. 특히 T4(crest factor)와 T6(impulse factor)는 1회전과 다른 데이터 기준간 비교시, 1회전 데이터에서 현격히 높은 FDR 값을 보여준다. 시간영역에서 1회전 데이터의 FDR 값이 높게 나타나는 이유는 각 회전의 특징인자를 추출하여 60개 평균을 적용하기 때문에 특징인자의 표준편차를 줄여주기 때문이다.

주파수영역의 특징인자에 대한 FDR 결과는 Table 4에 나타나 있다. 주파수영역의 인자는 모두 주파수 분석(spectral analysis) 결과를 토대로 생성되는데, 1회전 데이터는 1X 미만 주파수 성분 표현이 불가능하여 F4([0~1X]/1X) 인자를 생성할 수 없다. 주파수영역에서는 20회전의 데이터 기준이 대체로 높은 FDR 값을 나타내지만, 경향이 두드러지지 않다. 특히 1X 미만의 주파수 성분은 데이터 기준에 따라 spectral leakage의 영향을 받을 수 있다.⁽¹³⁾ Spectral leakage는 주파수 분해능이 충분하지 않거나, 데이터에 따라 결정되는 분해능이 실험현상을 표현할 수 없을 때 왜곡된 주파수 분석 결과가 발생하는 현상이다. 본 실험 데이터에서는 1X 미만 주파수 성분으로 oil whirl의 0.45X 성분이 있으며, 20회전과 60회전의 데이터는 0.45X 주파수 성분 표현이 가능하여 상대적으로 높은 FDR 값을 나타내고 있다. 해당 주파수 성분의 표현이 가능한 경우는 식 (2)의 σ_i (표준편차) 값을 줄여 주어 상대적으로 FDR 값이 증가된다. 1회전 데이터에서 현저히 낮은 FDR 값이 나타나는 이유는 spectral leakage 현상에 의해 왜곡된 주파수 분석 결과가 반영되었기 때문이다.

Table 3 FDR of RK4 time features

Time-domain	T1	T2	T3	T4	T5	T6
1 Cycle	92660	18525	15031	40509	5790	37861
10 Cycle	90373	17831	13602	2239	6196	2681
20 Cycle	90263	17760	13768	1501	6273	1870
30 Cycle	90261	17742	13570	1155	6260	1450
60 Cycle	90346	17779	13487	777	6177	996

Table 4 FDR of RK4 freq. features

Freq.-domain	F1	F2	F3	F4	F5
1 Cycle	15831	13116	13723	N/A	16624
10 Cycle	16454	17846	19341	3730	32389
20 Cycle	26654	21722	23296	3844	35115
30 Cycle	19095	19140	21657	4034	34970
60 Cycle	21525	20125	24497	3833	35041

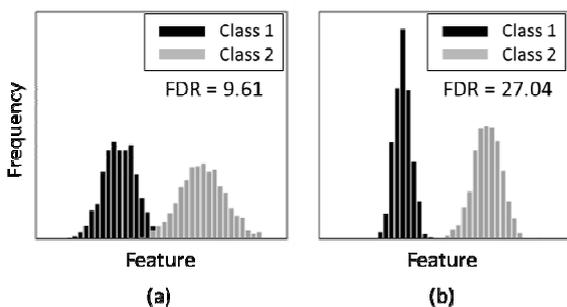


Fig. 4 Example of (a) Small and (b) Large FDR Case

5.2 시뮬레이션 신호의 FDR 결과

시뮬레이션 신호의 특성인자에 대한 FDR 결과는 Table 5 와 6 에 나타나 있다. 시간영역에서는 RK4 실험 데이터와 유사하게 1 회전 기준 데이터 특성인자가 대부분 가장 높은 FDR 값을 보이고 있다. RK4 와 마찬가지로 시간영역에서는 1 회전 데이터가 상대적으로 낮은 표준편차를 갖기 때문에 분류능력이 높게 나타난다. 주파수영역에서는 1 회전 기준을 제외하고, 데이터 기준에 따른 FDR 값의 차이가 크지 않은 것으로 나타났다. 3.1 에서 언급된 시뮬레이션 이상상태 1 의 신호는 0.5X 성분이 존재하며, 해당 주파수 성분은 1 회전을 제외한 모든 데이터 기준(10-20-30-60 회전)에서 정확히 표현이 가능하기 때문에 FDR 값이 유사하게 나타난다. 반면 1 회전 데이터에서는 0.5X 주파수 성분이 spectral leakage 현상에 의해 왜곡되어 일부 특성인자에 영향을 미치게 된다. 이런 영향은 FDR 결과에도 영향을 주는데 시뮬레이션에서는 실험과 달리 왜곡된 특성인자의 결과가 일부 특성인자(F1, F2)의 FDR 값을 증가시키는 결과를 초래하였다.

5.3 데이터 효율성 평가 결과 고찰

실험과 시뮬레이션 데이터를 이용하여 FDR 효율성을 평가한 결과 시간영역의 특성인자는 1 회전 데이터 기준에서 높은 분류능력을 나타내고 있다. 반면 주파수영역의 특성인자는 데이터 기준에 따른 분류능력이 뚜렷한 경향을 띠지 않으며, spectral leakage 에 따라 FDR 값이 영향을 받고 있다. 본 연구에서는 spectral leakage 의 영향으로 인해 실험과 시뮬레이션에서 상반되는 결과가 도출

되었다. 실험에서는 1 회전 기준의 FDR 값이 떨어진 반면, 시뮬레이션에서는 일부 1 회전 데이터 특성인자의 FDR 값이 증가되었다. 두 결과 모두 왜곡된 특성인자 값에 기인한 것으로 유효하지 못한 결과로 평가된다. 대신 주파수영역에서는 60 회전의 데이터 기준이 가장 높은 주파수 분해능을 가지기 때문에 다른 데이터 기준에 비해 임의의 1X 미만 주파수 성분을 상대적으로 정확히 표현할 수 있다. 따라서 spectral leakage 현상이 감소되고, 상대적으로 높은 FDR 값을 일정하게 얻을 수 있다.

6. 결론

기존 연구에서는 일정시간의 신호로부터 추출하는 특성인자를 주로 사용하였으나, 본 연구에서는 회전수 기준의 특성인자 사용을 제안하였다. RK4 실험데이터와 Matlab 생성데이터로부터 회전수 기반 데이터의 효율성을 평가하였다. 시간영역의 특성인자는 1 회전 기준 데이터의 분류능력이 우수하였으며, 주파수영역에서는 spectral leakage 현상을 고려하여 60 회전 기준 데이터가 적합함을 확인하였다.

본 연구에서 활용한 FDR 분류능력 평가 척도는 간단한 통계량인 평균과 분산값을 이용하기 때문에 널리 사용되고 있다. 하지만 상한과 하한의 제한 값이 없어 특성인자간 또는 다른 데이터 조합간의 절대적 비교가 어렵다. 따라서 추후 연구로 FDR 의 단점을 보완할 수 있는 다른 평가방법을 도입하여 본 연구와 비교 연구를 수행할 예정이다. 또한 본 연구에서 얻은 결론을 바탕으로 실제 진단을 수행하는 연구도 진행할 예정이다.

후 기

본 연구는 2014년도 미래창조과학부 재원으로 한국연구재단[NRF-2013R1A2A2A01068627], 산업통상자원부 재원으로 한국에너지기술평가원(KETEP) [No. 2012202010001C], 서울대학교 정밀기계설계공동연구소의 지원을 받아 수행되었습니다.

참고문헌
(References)

(1) Yu, Y., Yu, D. and Junsheng, C., 2006, "A Roller Bearing Fault Diagnosis Method Based on EMD Energy Entropy and ANN," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, No. 1-2, pp. 269-277.
(2) Ocak, H. and Loparo, K. A., 2001, "A New Bearing Fault Detection and Diagnosis Scheme Based on

Table 5 FDR of generated signal time features

Time-domain	T1	T2	T3	T4	T5	T6
1 Cycle	42	7	103	116	76	89
10 Cycle	42	0	54	59	76	64
20 Cycle	42	0	54	40	76	53
30 Cycle	42	0	54	33	76	47
60 Cycle	42	0	54	21	76	35

Table 6 FDR of generated signal freq. features

Freq.-domain	F1	F2	F3	F4	F5
1 Cycle	174	193	231	NaN	52
10 Cycle	140	184	437	68	52
20 Cycle	140	184	436	68	53
30 Cycle	140	184	435	68	52
60 Cycle	140	184	436	68	52

- Hidden Markov Modeling of Vibration Signals," *IEEE International Conference Proceedings on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 5, pp. 3141~3144.
- (3) Li, B., Mo-Yuen, C., Tipsuwan, Y. and Hung, J. C., 2000, "Neural-Network-Based Motor Rolling Bearing Fault Diagnosis," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 47, No. 5, pp. 1060~1069.
- (4) Yang, B. S. and Kim, K. J., 2006, "Application of Dempster-Shafer Theory in Fault Diagnosis of Induction Motors Using Vibration and Current Signals," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, No. 2, pp. 403~420.
- (5) Kowalski, C. T. and Orłowska-Kowalska, T., 2003, "Neural Networks Application for Induction Motor Faults Diagnosis," *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 63, Issues 3~5, pp. 435~448.
- (6) Zeidan, F. Y. and Herbage, B. S., 1991, "Fluid Film Bearing Fundamentals and Failure Analysis," *Proceedings of the Twentieth Turbomachinery Symposium*, pp. 161~186.
- (7) He, M., Cloud, C. H. and Byrne, J. M., 2005, "Fundamentals of Fluid Film Journal Bearing Operation and Modeling," *Proceedings of the Thirty-Fourth Turbomachinery Symposium*, pp. 155~175.
- (8) Widodo, A. and Yang, B. S., 2007, "Support Vector Machine in Machine Condition Monitoring and Fault Diagnosis," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, No. 6, pp. 2560~2574.
- (9) Kankar, P. K., Sharma, S. C. and Harsha, S. P., 2011, "Fault Diagnosis of Ball Bearings Using Machine Learning Methods," *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, No. 3, pp. 1876~1886.
- (10) Chiang, L. H., Kotanchek, M. E. and Kordon, A. K., 2004, "Fault Diagnosis Based on Fisher Discriminant Analysis and Support Vector Machines," *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 28, No. 8, pp. 1389~1401.
- (11) Sreejith, B., Verma, A. K. and Srividya, A., 2008, "Fault Diagnosis of Rolling Element Bearing Using Time-domain Features and Neural Networks," *IEEE Region 10 and the Third International Conference on Industrial and Information Systems*, pp. 1~6.
- (12) Theodoridis, S. and Koutroumbas, K., 2008, *Pattern Recognition*, Academic Press, Burlington, pp. 261-310.
- (13) Friswell, M. I., Penny, J. E. T., Garvey, S. D. and Lees, A. W., 2010, *Dynamics of Rotating Machines*, Cambridge, New York, pp. 60~64.