

극점 배치를 이용한 제어기 설계

■ 강 태 삼

(건국대학교 항공우주정보시스템공학과)

극점은 제어시스템의 안정성, 수렴속도를 결정하는 중요한 요소이다. 본고에서는 출력 되먹임을 이용하여 임의의 원하는 극점을 배치하고, 또한 외란을 극복하면서 기준 명령을 추종할 수 있는 제어기를 설계하는 방법을 살펴 보았다. 이를 위해서는 기준 입력 또는 외란의 불안정한 극점들이 제어루프에 포함되도록 한다. 즉, 불안정한 극점들이 마치 플랜트에 첨가된 것처럼 간주하고 제어기를 설계하면 된다. 제어기 차수를 줄이기 위해서는 제어기 설계과정에서 남는 자유도를 이용하여 불안정한 극점들이 제어기에 포함되도록 하면 된다.

I. 단위 되먹임 제어기에서 극점 배치

극점은 시스템의 응답 및 안정성을 결정하는 가장 중요한 요소 중의 하나이다[1,3,4]. 극점을 효과적으로 배치함으로써 성능과 안정성을 동시에 확보할 수 있다. 그림 1은 단위 되먹임(unity-feedback) 제어기의 구조를 보여주고 있다. 여기서 $\hat{g}(s)$ 는 플랜트의 전달함수로 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{g}(s) = N(s)/D(s) \tag{1}$$

여기서, $N(s)$ 와 $D(s)$ 는 서로소(coprime)인 다항식이라 가정한다. $C(s)$ 는 제어기를 나타내며, p 는 출력 y 와 기준 명령 r 사이의 스케일을 조정하기 위한 상수이다.

제어기 $C(s)$ 는 (2)와 같이 표현된다고 하자.

$$C(s) = B(s)/A(s) \tag{2}$$

여기서 대수 루프(Algebraic Loop)를 피하기 위해 (1)의 플랜트와 (2)의 제어기 중 하나는 적합전달함수(proper transfer function)을 가지고, 나머지 하나는 엄격 적합 전달함수(strictly proper transfer function)를 가진다고 가정한다.

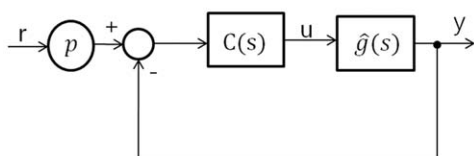


그림 1. 단위 되먹임 제어시스템 구조.

이때 폐루프 전달함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \hat{g}_c(s) &= y(s)/r(s) \\ &= \frac{pN(s)B(s)}{A(s)D(s) + B(s)N(s)} \\ &= \frac{pN(s)B(s)}{F(s)} \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $F(s)$ 는 원하는 극점을 가진 특성방정식을 나타낸다. (3)에서 알 수 있듯이 원래 플랜트의 영점은 영향을 받지 않으며, 제어기의 극점은 전체 전달함수의 영점에 추가되는 것을 알 수 있다. 이에 반해 전체 시스템의 극점은 $D(s)$ 및 $A(s)$ 의 근에서 $A(s)D(s) + B(s)N(s)$ 의 근으로 바뀐다.

원하는 극점이 주어졌을 때, 극점 배치 문제는 결국 다음 다항식을 푸는 문제로 귀결된다.

$$A(s)D(s) + B(s)N(s) = F(s) \tag{4}$$

(4)를 풀기 위해 $D(s), N(s), A(s), B(s), F(s)$ 가 다음과 같이 주어진다고 가정한다.

$$\begin{aligned} D(s) &= D_0 + D_1s + D_2s^2 + \dots + D_n s^n \quad D_n \neq 0 \\ N(s) &= N_0 + N_1s + N_2s^2 + \dots + N_n s^n \\ A(s) &= A_0 + A_1s + A_2s^2 + \dots + A_m s^m \\ B(s) &= B_0 + B_1s + B_2s^2 + \dots + B_m s^m \end{aligned} \tag{5}$$

(5)를 (4)에 대입하고 계수를 비교하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} A_0 D_0 + B_0 N_0 &= F_0 \\ A_0 D_1 + B_0 N_1 + A_1 D_0 + B_1 N_0 &= F_1 \\ &\vdots \\ A_m D_n + B_m N_n &= F_{n+m} \end{aligned}$$

위 식은 미지수가 $2(m+1)$ 개이고, 식이 $(n+m+1)$ 개가 있는 연립 방정식이며, 다음과 같이 행렬 형태로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 & A_1 & B_1 & \cdots & A_m & B_m \end{bmatrix} S_m = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_{n+m} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$S_m = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & \cdots & D_n & 0 & \cdots & 0 \\ N_0 & N_1 & \cdots & N_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_0 & \cdots & D_{n-1} & D_n & \cdots & 0 \\ 0 & N_0 & \cdots & N_{n-1} & N_n & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D_0 & \cdots & D_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & N_0 & \cdots & N_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

(6)이 임의의 $F(s)$ 에 대하여 해를 가지기 위한 필요충분 조건은 S_m 의 열벡터들이 서로 독립이 되는 것이다(full column rank). 열벡터들이 서로 독립이 되기 위해서는 최소한 열의 갯수가 행의 갯수보다 크거나 같아야 하므로 $2(m+1) \geq n+m+1$ 즉,

$$m \geq n-1 \quad (8)$$

이 만족되는 것이 필요하다.

만약 $m < n-1$ 인 경우는 $F(s)$ 에 따라 해가 있는 경우도 있고 없는 경우도 있으며, 따라서 해의 존재가 보장되지 않는다. $m = n-1$ 인 경우 S_m 는 $2n \times 2n$ 의 정방행렬이 되며, 이때 S_m 의 열들이 독립일 필요충분 조건은 $N(s)$ 와 $D(s)$ 가 서로 소가 되는 것이다. 따라서, $N(s)$ 와 $D(s)$ 가 서로소이면, S_{n-1} 은 서로 독립인 열벡터들로 이루어진다. 만일 m 을 1 증가시키면, 열의 갯수는 1이 증가하지만, 행의 갯수는 2가 증가한다. 그리고 $D_n \neq 0$ 이므로 새로 추가되는 D로 이루어지는 행은 이전 행들과 독립이다. 따라서 $2(n+1) \times (2n+1)$ 행렬 S_n 은 $(2n+1)$ 개의 독립인 열 벡터 들로 이루어진다. 이와 같은 논리를 계속하면, $N(s)$ 와 $D(s)$ 가 서로소이고, $m \geq n-1$ 이면, S_m 은 독립인 열벡터들로 이루어지는 행렬이 된다. 즉, 임의의

특성방정식 $F(s)$ 에 대하여 (4)를 만족시키는 $A(s)$ 와 $B(s)$ 가 존재하며, 따라서 (5)를 만족하는 해가 존재한다. 만일 $N(s)/D(s)$ 가 엄격 적합전달함수인 경우, 얻어지는 제어기 $A(s)/B(s)$ 는 적합 전달함수가 된다. 즉 $A_m \neq 0$ 가 된다. 이것은 (6)에서 마지막 원소 관련된 식이 $A_m D_n + B_m N_n = F_{n+m}$ 과 같이 주어지고, $N_n = 0$ 이고, $F_{n+m} \neq 0$ 이므로, $A_m \neq 0$ 이다. 즉 제어기 $A(s)/B(s)$ 는 적합 전달함수로 이루어지는 시스템이 된다. $m = n-1$ 인 경우 제어기는 유일하게 주어지며, $m > n-1$ 인 경우, 제어기는 유일하지 않으며, 남은 자유도는 제어기의 다른 목적을 성취하는데 쓸 수 있다.

II. 레귤레이션(Regulation)과 추종(Tracking)

극점 배치를 이용하여 레귤레이션과 추종 기능을가지는 제어기들을 설계할 수 있다. 레귤레이션 문제는 그림 1에서 기준 명령 r 이 0일때, 출력이 0이 되도록 제어하는 것이다. 이때 출력은 교란과 초기치에 의해 나타나는 것이고, 제어기는 이때의 출력을 측정하고 이를 이용하여 출력이 0이 되도록 제어한다. $\hat{g}_c(s) = y(s)/r(s)$ 의 영점이 모두 음의 실수부를 가지도록 극점을 배치하면, 레귤레이션 문제는 해결 된다. 얼마나 빠르게, 어떤 과도 상태를 가지느냐는 극점과 영점의 위치에 따라 달라진다.

추종기는 기준 명령이 특히 계단 형태로 주어질때 출력이 이를 따라가게한다. 즉, r 이 크기 a 를 가지는 계단 입력일 때, $\hat{r}(s) = a/s$ 일 때 출력 $\hat{y}(s)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{y}(s) = \hat{g}_c(s)\hat{r}(s) = \hat{g}_c(s)\frac{a}{s}$$

만약 $\hat{g}_c(s)$ 가 제한된 입력에 대하여 제한된 출력을 보이는 BIBO(Bounded Input Bounded Output) 안정하다면, Laplace 변환의 최종치 정리를 이용하면,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{y}(s) = \hat{g}_c(0)a$$

따라서, 계단입력을 점근적으로 따라가기 위해서는, $\hat{g}_c(s)$ 가 BIBO 안정하고, $\hat{g}_c(0) = 1$ 이어야 한다. 그리고 r 에서 y 로의 전달함수는 (3)에서 $\hat{g}_c(s) = y(s)/r(s) = \frac{pN(s)B(s)}{F(s)}$ 이고, 따라서,

$$\hat{g}_c(0) = p \frac{N(0)B(0)}{F(0)} = p \frac{B_0 N_0}{F_0} = 1 \text{ 즉, } p = \frac{F_0}{B_0 N_0} \text{ 이면 된다.}$$

따라서, 기준 계단 명령을 따라가기 위해서는 $B_0 N_0 \neq 0$ 이

어야 한다. 여기서 B_0 는 제어기의 인자이므로 0이 안되도록 설정할 수 있다. 그리고 N_0 는 플랜트의 분자 부분의 상수이다. 따라서 플랜트의 전달함수가 $s=0$ 에 하나 또는 그 이상의 영점을 가진다면, 계단 명령에 대한 추종기는 설계할 수 없다. 이것은 플랜트의 출력이 출력의 미분들로만 구성되는 경우이며, 출력 오차가 있어도 계단 입력에 대해서 정상상태의 오차에 대한 미분은 입력이 없는 것처럼 동작되기 때문이다.

기준 입력이 경사입력(ramp function) 일 때, 즉 $r(t) = at$ 일 때, 같은 논리로 분석을 해 보면, $\hat{g}_c(s)$ 가 BIBO 안정하고, $\hat{g}_c(0) = 1$ 이고, $\hat{g}_c'(0) = 0$ 이면 됨을 보일 수 있다.

III. 강인 추종 및 외란 제거

이제까지 설계한 제어기는 외란이 없고, 플랜트의 패러미터가 정확히 알려져 있고 변하지 않는 경우에만 유효하다. 플랜트 패러미터가 변하면 성능이 변한다. 예를 들어 $p = \frac{F_0}{B_0 N_0}$ 가 만족되도록 p 값과 B_0 , F_0 값을 설계하였다고 하더라도, N_0 의 실제 값이 알려진 것과 차이가 있거나, 아니면 다른 요인 때문에 N_0 변하였을 경우, 더 이상 $p = \frac{F_0}{B_0 N_0}$ 는 성립하지 않을 것이고, 따라서, 출력은 기준 계단 명령을 충실하게 추종하지 못한다.

이러한 문제를 해결하기 위해서는 제어기가 입력과 교란에 대하여 강인한 추종 성능 및 외란 제거 성능을 가지게 하는 것이 필요하다[2,4]. 이를 살펴보기 위해 먼저 기준 명령과 외란은 다음과 같이 주어진다고 가정한다.

$$\hat{r}(s) = \frac{N_r(s)}{D_r(s)} \quad \hat{w}(s) = \frac{N_w(s)}{D_w(s)} \quad (9)$$

여기서, $D_r(s)$, $D_w(s)$ 는 알려져 있는 다항식이고, $N_r(s)$, $N_w(s)$ 는 알려져 있지 않다고 가정한다. 이것은 입력과 교란의 모드 정도는 알고 있지만, 그것이 어떤 모양으로 어떤 조합으로 나타나는지는 모르는 것과 같으며, 제어기를 설계할 때 제어기 설계자에게 주어지는 정도의 정보라 볼 수 있다.

예를 들어 $r(t)$ 는 크기 a 를 모르는 계단입력일 수 있으며, 이 경우 $\hat{r}(s) = a/s$ 가 된다. 교란이 $w(t) = b + c\sin(\omega_0 t + d)$ 형태이면서, 바이어스 b 와 정현파의 진폭 c 및 위상 d 는 알려지지 않은 경우, $\hat{w}(s) = \frac{N_w(s)}{s(s^2 + \omega_0^2)}$ 와 같이 둘 수 있다.

이때, $\phi(s)$ 를 $D_r(s)$ 과 $D_w(s)$ 의 불안정한 부분의 최소 공배수라 하자. 여기서 안정한 부분은 정상상태에서 영향을 주지 않기 때문에 배제해도 된다. 이때 기준 명령과 외란이 전술한 바와 같을 경우, $\phi(s) = s(s^2 + \omega_0^2)$ 이 된다.

$\hat{g}(s)$ 의 영점과 $\phi(s) = 0$ 의 근이 중복되는 경우가 없을 경우, 엄격 접합 시스템 $\hat{g}(s) = N(s)/D(s)$ 의 $N(s)$ 와 $D(s)$ 가 서로소인 경우 외란 $w(t)$ 를 제거하면서 기준 명령 $r(t)$ 를 따라가게 할 수 있는 적합한 제어기가 존재한다.

이 제어기는 다음과 같은 과정을 통하여 구할 수 있다. 즉, $\phi(s)$ 의 근과 $\hat{g}(s) = N(s)/D(s)$ 의 영점이 같은 것이 없으므로 $\phi(s)D(s)$ 와 $N(s)$ 는 서로소이다. 따라서, 임의의 요구되는 근을 가지는 $F(s)$ 에 대하여,

$$A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s) = F(s) \quad (10)$$

를 만족하는 적합제어기 $A(s)/B(s)$ 가 존재한다. 따라서, 이때 최종적인 제어기를 다음과 같이 둘 수 있으며, 그림 2에 나타낸 바와 같다.

$$C(s) = \frac{B(s)}{A(s)\phi(s)}$$

이때, w 에서 y 로의 전달함수는

$$\begin{aligned} \hat{g}_{yw}(s) &= \frac{N(s)B(s)}{1 + B(s)/(A(s)\phi(s))(N(s)/D(s))} \\ &= \frac{N(s)A(s)B(s)}{A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s)} \\ &= \frac{N(s)A(s)B(s)}{F(s)} \end{aligned}$$

따라서, 외란 $w(t)$ 로 인한 출력은

$$\hat{y}_w(s) = \frac{N(s)A(s)\phi(s)}{F(s)} \frac{N_w(s)}{D_w(s)} \quad (11)$$

(11)에서 외란의 모든 불안정한 극점들은 $\phi(s)$ 에 의해 지워지고, 따라서 $\hat{y}_w(s)$ 의 모든 극점들은 음의 실수부를 가지며, 따라서, 시간이 지남에 따라 $y_w(t) \rightarrow 0$ 가 된다. 즉, 외란 $w(t)$

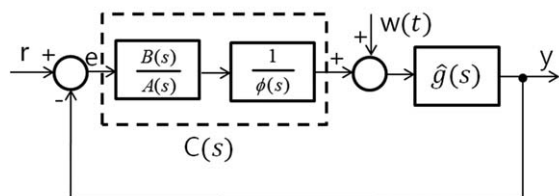


그림 2. 강인 제어기 설계 구조.

로 인한 영향은 시간이 지남에 따라 출력에서 제거된다.

한편, 기준 입력 $\hat{r}(s)$ 에 의한 출력 $\hat{y}_w(s)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{y}_r(s) = \frac{B(s)N(s)}{A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s)} \hat{r}(s)$$

따라서, 명령추종 오차는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \hat{e}(s) &= \hat{r}(s) - \hat{y}_r(s) = (1 - \hat{g}_{yr}(s))\hat{r}(s) \\ &= \frac{A(s)D(s)\phi(s)}{A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s)} \frac{N_r(s)}{D_r(s)} \end{aligned} \quad (12)$$

(11)에서 마찬가지로, $D_r(s)$ 의 모든 불안정한 근이 $\phi(s)$ 에 포함되어 있고, 따라서 영점-극점 상쇄가 일어나며, 따라서 (12)은 BIBO 안정된 시스템이고, 따라서 시간이 증가함에 따라 $r(t) - y_r(t) \rightarrow 0$ 임을 알 수 있다. 한편 기준입력과 외란이 동시에 작용할 때, 선형시스템이므로 최종 출력은 $y(t) = y_w(t) + y_r(t)$ 이고 따라서 시간이 증가함에 따라 $r(t) - y(t) \rightarrow 0$ 가 된다.

따라서, 강인한 추종성능과 교란제거 기능을 가진 제어기를 설계하기 위한 과정은 다음과 같이 요약될 수 있다:

1. 기준 명령 및 교란의 성질을 고찰하고, 이들의 불안정한 극점을 근으로 모두 포함하는 최소차수의 다항식 $\phi(s)$ 를 구한다.
2. 요구되는 극점을 근으로 가진 다항식 $F(s)$ 를 구한다.
3. 구해진 $\phi(s)$ 와 $F(s)$ 를 (10)에 대입하고, (6) 및 (7)로 주어지는 행렬식을 풀어, 필요한 $A(s)$, $B(s)$ 의 계수를 구한다.
4. 최종적인 제어기는 그림 2에서와 같이 $A(s)/(B(s)\phi(s))$ 가 된다.

이와 같이 제어루프 내부에 외란의 모델을 포함시키는 것을 내부모델원리(internal model principle)이라 한다. $1/\phi(s)$ 모델이 r 에서 e 에 이르는 순방향 경로에 없고, 또한 w 에서 y 에 이르는 순방향 경로에 포함되어 있지 않으면서, 폐루프에 포함되어 있는 경우 $\hat{g}_{yw}(s)$ 와 $\hat{g}_{er}(s)$ 의 분자에 $\phi(s)$ 가 포함되고, 이는 영점-극점 상쇄를 일으켜서, 출력에 불안정한 극점의 효과가 나타나지 않도록 한다. 극점 배치시 제어기(인위적으로 삽입된 불안정한 극점 포함)와 플랜트 자체에서의 영점-극점 상쇄는 없으므로 전체적인 제어루프는 안정하다는 것을 주목할 필요가 있다.

제어기 설계시 먼저 $1/\phi(s)$ 을 루프에 포함시키고 적합한 제

어기를 설계하는 경우 전체 제어기는 $A(s)/(B(s)\phi(s))$ 항상 엄격 적합시스템이 되며, 제어기 차수가 커지는 단점이 있다. 이를 극복하기 위해서는 극점배치 제어기를 설계하는 과정에서 남은 자유도를 이용하여 불안정한 극점이 포함되도록 하여, 제어기의 차수를 줄일 수 있다.

IV. 강인 추종 및 외란 제거기 설계 예(4)

플랜트의 전달함수가 $\hat{g}(s) = (s-2)/(s^2-1)$ 이고, 계단형 태의 기준입력을 추종할 수 있는 제어기를 설계해보자. $D(s)$ 의 차수가 2차이므로 $A(s)$ 의 차수를 1차로 하면, 해는 유일하고, 더이사의 자유도가 없다. 자유도를 추가하기 위해 $A(s)$ 의 차수가 2가 되도록 하자. 이때 $F(s)$ 는 4차가 되어야 하고, 다음과 같이 선택할 수 있다.

$$\begin{aligned} F(s) &= (s^2 + 4s + 5)(s^2 + 2s + 5) \\ &= s^4 + 6s^3 + 18s^2 + 30s + 25 \end{aligned}$$

따라서 극점배치를 위한 행렬식 (6)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} &[A_0 \ B_0 \ A_1 \ B_1 \ \cdots \ A_m \ B_m] \times \\ &\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [25 \ 30 \ 18 \ 6 \ 1] \end{aligned} \quad (13)$$

양방향 적합(biproper) 제어기 $C(s) = \frac{B_0 + B_1s + B_2s^2}{A_0 + A_1s + A_2s^2}$ 가

$1/s$ 를 포함하도록 하기 위해서, $A_0 = 0$ 인 것이 필요하다. 위 행렬식은 6개의 미지수에 5개의 식을 가지고 있으므로 1개의 자유도가 있으며, 따라서 $A_0 = 0$ 로 고정하고 (13)을 풀면 된다. 이때 (13)의 해를 구할 수 있으며, 최종적으로 구해진 제어기의 인자들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &[A_0 \ B_0 \ A_1 \ B_1 \ \cdots \ A_m \ B_m] \\ &= [0 \ -12.5 \ 34.8 \ -38.7 \ 1 \ -28.8] \end{aligned}$$

즉 제어기는 다음과 같이 주어진다.

$$C(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{-28.8s^2 - 38.7s - 12.5}{s^2 + 34.8s}$$

V. 결론

본 소고에서는 극점배치를 이용하여 간단하게 기준 입력을 추종하면서 교란을 제거하는 강인한 제어기 설계 방법을 살펴 보았다. 제어기 설계시 기준 입력 또는 교란의 불안정한 극점들이 제어루프에 포함되도록 설계함으로써, 정상상태의 오차가 0이 되도록 할 수 있다. 극점배치 방법은 간단하기는 하나, 전체적인 응답을 검토하기 위해서는 주파수 분석 및 시간 영역 시뮬레이션 및 해석이 추가되어야 할 것이다.

참고문헌

- [1] B.C.KUO, *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall International Editions, 1991.
- [2] K. Zhou, and J.C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, 1998.
- [3] 김종식, 선형제어시스템 공학, 청문각, 1992.
- [4] Chi-Tsong Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, 1999.

저자약력



강태식

- 1986년, 1988년, 1992년 서울대학교 제어계측공학과 학사, 석사, 박사졸업.
- 1999년~2001년 호서대학교 제어계측공학과 교수,
- 2001년~현재 건국대학교 항공우주정보시스템공학과 교수.

· 관심분야 : 자동제어 및 비행제어 응용, 관성 센서 및 응용.