

## LQ-역최적 2차 일치제어에 기반한 이동로봇에 대한 대형·속도일치 프로토콜의 역최적 설계

# Inverse Optimal Design of Formation/Velocity Consensus Protocol for Mobile Robots Based on LQ Inverse Optimal Second-order Consensus

이재영, 최윤호\*  
(Jae Young Lee<sup>1</sup> and Yoon Ho Choi<sup>2,\*</sup>)

<sup>1</sup>Department of Electrical & Electronic Engineering, Yonsei University

<sup>2</sup>Department of Electronic Engineering, Kyonggi University

**Abstract:** In this paper, we propose an inverse optimal distributed protocol for the formation and velocity consensus of non-holonomic mobile robots. The communication among mobile robots is described by a simple undirected graph, and the mobile robots' kinematics are considered. The group of mobile robots driven by the proposed protocols asymptotically achieves the desired formation and group velocity in an inverse optimal fashion. The design of the protocols is based on dynamic feedback linearization and the proposed linear quadratic (LQ) inverse optimal second-order consensus protocol. A numerical simulation is given to verify the effectiveness of the proposed scheme.

**Keywords:** inverse optimal consensus, mobile robots, formation control

### I. 서론

다개체 이동로봇은 단일로봇에 비해 탐색, 구조, 협업 등의 작업에서 많은 장점을 가지고 있으며, 따라서 이들을 제어·운용하기 위한 기술인 군집제어(formation control) 기법에 대한 연구가 현재까지 활발히 이루어지고 있다. 그 결과, 행동기반(behavior-based) 접근법[1], 가상구조(virtual structure) 접근법[2], 선도-추종로봇(leader-follower) 기법[3], 일치제어(consensus) 기반 설계기법[4-11] 등의 다양한 군집제어 알고리즘이 제안되었다. 이들 중, 일치제어 기반 설계기법은 각 로봇간의 통신 네트워크에 대한 제약이 가장 적어 다양한 통신 토폴로지에 대해서도 유연한 설계가 가능하다는 장점이 있다. 여기서 일치제어는 다개체 시스템의 각 개체에 대한 상태변수 혹은 그 일부가 하나의 일치된 값을 갖도록 제어하는 것이다[4].

이동로봇 군집제어를 위한 일치제어 기법은 각 개체가 비선형 혹은 비홀로노믹 연쇄(nonholonomic chained) 시스템으로 표현되거나[4-6], 폐환 선형화(feedback linearization)를 통해 등가 선형 시스템[6-11]으로 변환되는 경우로 크게 나눌 수 있다. 이 중, 선형 시스템에 대한 일치제어 기법은 그 해석과 설계의 용이성으로 인해 현재까지 많은 연구가 수행되었으며[4,6-16], 이동로봇의 경우, 동적 폐환 선형화를

통해 이중 적분기(double integrator)와 같은 선형 시스템으로 변환이 가능하므로[9-11], 선형 일치제어 기법의 한 종류인 2차 일치제어 기법[12,13]을 통해 이동로봇의 대형·속도일치 프로토콜을 설계할 수 있다. 여기서 2차 일치제어 기법은 이동로봇과 같이 이중 적분기로 표현되는 시스템에 대한 설계 방법이다. 그 중, Ren [12]의 2차 일치제어 연구에서는 군속도(group velocity) 개념을 도입하여 모든 개체들의 속도를 주어진 군속도로 일치시키는 방법을 제안하였으며, 이를 다개체 이동로봇에 적용하여 속도에 대한 가제어성(controllability)을 부여할 수 있다.

한편, 대수 리카티 방정식(ARE: Algebraic Riccati Equation)에 기반한 선형이차(LQ: Linear Quadratic) 최적/역최적 일치제어 기법이 [10,14-16]등에서 연구되었다. 이러한 최적제어의 경우,  $\infty$ -이득여유(gain margin)와  $60^\circ$  이상의 위상여유(phase margin) 등의 강인한 특성을 항상 가지며, 대상 성능지표(performance index)가 통신 토폴로지(topology)에 의해 결정되는 역최적 방법 [10,15,16]을 통해 분산 네트워크 구조로 인한 제약사항에 대해 효과적으로 대처하여 유연한 일치제어기 설계 및 최적화가 가능하다. 또한, 본 논문 저자들의 최신 연구 [11]에서는 이러한 연구결과를 다개체 이동로봇의 비선형 역최적 대형일치 기법으로 확장하였다. 하지만 이러한 최적/역최적 일치제어 및 대형일치 기법은 모두 1차 일치제어 및 대형일치 방법에 해당하며, 따라서 군속도 및 속도에 대한 가제어성을 고려할 수 있는 2차 일치제어 및 다개체 이동로봇의 대형·속도일치 기법은 저자가 아는 한, 현재까지 최적/역최적 관점에서는 연구된 바가 전무하다.

선형 시스템에 대한 LQ-역최적 1차 일치제어 프로토콜

\* Corresponding Author

Manuscript received December 2, 2014 / revised January 2, 2015 / accepted January 16, 2015

이재영: 연세대학교 전기전자공학과(jyounglee@yonsei.ac.kr)

최윤호: 경기대학교 전자공학과(yhchoi@kyonggi.ac.kr)

※ 본 논문은 2014년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NRF-2013R1A1A2012851).

[10]과 이동로봇에 대한 비선형 역최적 대형일치 [11]에 관한 상기 연구를 바탕으로, 본 논문에서는 모든 개체들의 속도를 주어진 균속도로 일치시키는 LQ-역최적 2차 일치제어 기법과, 이를 응용한 이동로봇들의 대형·속도일치를 위한 비선형 역최적 프로토콜을 제안한다. 제안되는 프로토콜의 목적은 각 이동로봇들 간에 서로 연결된 개체의 정보만을 이용하여 일정한 대형을 갖춰 주어진 균속도로 주행하는 것이다. 대상 이동로봇들은 단순 비방향성(undirected) 그래프로 표현되는 통신구조와 비홀로노믹 기구학(kinematics)을 가진다. 역최적 대형·속도일치 프로토콜 도출을 위해 기구학 모델의 변환기법을 이용하며, 제안되는 기법의 수학적 분석을 통해, 제안한 프로토콜이 i) 대형 및 속도일치를 지수적으로 달성함과 ii) 통신 토폴로지에 의존적인 성능지표를 최소화시키는 역최적해임을 증명한다. 마지막으로, 모의실험을 수행하여 제안한 프로토콜의 성능을 검증하고자 한다.

## II. 사전지식 및 문제설정

### 1. 그래프 이론 및 수학적 기호

본 논문에서는 각 이동로봇 간 통신 네트워크를 단순 비방향성 그래프  $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 로 나타낸다. 여기서  $\mathcal{N} := \{1, 2, 3, \dots, N\}$ 은 각 이동로봇을 나타내는 노드(node)들의 집합,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 는 노드들의 순서쌍을 원소로 갖는 간선(edge) 집합,  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 는 가중치 인접행렬(weighted adjacency matrix)이다. 또한, “단순 비방향성”이란  $\mathcal{E}$ 가 모든  $i, j \in \mathcal{N}$ 에 대해  $(i, i) \notin \mathcal{E}$ 이며, “ $(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$ ”인 그래프를 지칭하며, 이는  $a_{ii} = 0$ ,  $a_{ij} = a_{ji} \geq 0$ 를 만족함을 나타낸다.  $j$ 번째 이동로봇에서  $i$ 번째 이동로봇으로 직접 정보를 전달하는 경우  $(i, j) \in \mathcal{E}$ 와 같이 나타낼 수 있으며, 이 경우  $a_{ij} > 0$ 인 값으로 가중치 인접행렬  $\mathcal{A}$ 가 주어진다. 본 논문에서는  $i$ 번째 개체로 직접적으로 정보를 전달할 수 있는 이웃 집합  $\mathfrak{N}_i$ 을  $\mathfrak{N}_i := \{j : (j, i) \in \mathcal{E}\}$ 로 표기하며, 주어진 단순 비방향성 그래프  $\mathcal{G}$ 의 라플라시안(Laplacian) 행렬  $\mathbf{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 을  $i \neq j$ 인 경우  $l_{ij} = -a_{ij}$ ,  $i = j$ 인 경우  $l_{ii} = \sum_{j \in \mathfrak{N}_i} a_{ij}$ 와 같이 정의한다. 또한, 단순 비방향성 그래프  $\mathcal{G}$ 에 대해 다음을 가정한다.

가정 1: 그래프  $\mathcal{G}$ 는 연결(connected)되어 있다. 즉, 임의의 두 노드  $i, j \in \mathcal{N}$ 에 대하여 노드  $i$ 로부터 노드  $j$ 까지의 순서쌍 집합

$$\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l) : i_1 = i, i_l = j\} \subseteq \mathcal{E}$$

과 양수  $l \in \mathcal{N}$ 이 항상 존재한다.

임의의 단순 비방향성 그래프  $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 의 라플라시안  $\mathbf{L}$ 은 항상 준양한정(positive semi-definite) 행렬이며, “0”과  $\mathbf{1}_N := [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N$ 을 고유값과 그에 대한 고유벡터로 가지므로, 다음이 성립한다.

$$0 = \lambda_1(\mathbf{L}) \leq \lambda_2(\mathbf{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathbf{L})$$

여기서  $\lambda_j(\mathbf{L})$ 은  $\mathbf{L}$ 의  $j$ 번째 고유값을 나타낸다. 또한,  $\mathcal{G}$ 가 가정 1을 만족시키면, 거쉬고린 디스크 정리(Gershgorin’s disk theorem)에 의해 다음 정리가 성립한다.

정리 1 [4]: 만일  $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 가 가정 1을 만족시키는 연결되어 있는 단순 비방향성 그래프이면,

$$\lambda_2(\mathbf{L}) > 0, \text{rank}(\mathbf{L}) = N - 1$$

이고, 그 역도 또한 성립한다.

본 논문에서는 벡터  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 에 대한 노름(norm)  $\|\mathbf{x}\|$ 으로  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ 과 같이 정의된 유클리드 노름을 사용하며, 벡터  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 와 임의의 부분 공간  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ 에 대한 거리함수(distance function)  $d(\mathbf{x}, \mathcal{S})$ 를

$$d(\mathbf{x}, \mathcal{S}) := \inf \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in \mathcal{S} \}$$

와 같이 정의한다.  $\mathbb{R}^{n \times m}$  공간과  $\mathbb{R}^{n \times n}$  공간상의 영벡터, 단위벡터는 각각  $\mathbf{0}_{n \times m}$ 와  $\mathbf{I}_n$ 와 같이 표기하며, 임의의 두 행렬  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 에 대한 크로넬커 곱(Kronecker product)를  $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ 로 표기하기로 한다. 또한, 본 논문에서는 행렬  $\mathbf{X} = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 와  $n$ 개의 행렬로 이루어진 수열  $\{\mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^{p \times q}\}_{i=1}^n$ 과의 연산인 일반화된 크로넬커 곱  $\mathbf{X} \otimes \{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^n$ 을

$$\mathbf{X} \otimes \{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^n = \begin{bmatrix} x_{11} \mathbf{Y}_1 & x_{12} \mathbf{Y}_1 & \dots & x_{1m} \mathbf{Y}_1 \\ x_{21} \mathbf{Y}_2 & x_{22} \mathbf{Y}_2 & \dots & x_{2m} \mathbf{Y}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} \mathbf{Y}_n & x_{n2} \mathbf{Y}_n & \dots & x_{nm} \mathbf{Y}_n \end{bmatrix}$$

와 같이 정의한다. 이는  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \dots = \mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}$ 인 경우  $\mathbf{X} \otimes \{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^n = \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ 를 만족하는, 크로넬커 곱의 일반화된 형태이며,  $\mathbf{I}_n \otimes \{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^n = \text{blockdiag}\{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n\}$ 가 정의에 의해 성립하므로,  $\mathbf{Y}_i$ 가 가역행렬인 경우,

$$(\mathbf{I}_n \otimes \{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^n)^{-1} = \mathbf{I}_n \otimes \{\mathbf{Y}_i^{-1}\}_{i=1}^n \quad (1)$$

가 성립하고, 임의의  $\{\mathbf{Z}_i \in \mathbb{R}^{q \times r}\}_{i=1}^n$ 에 대해

$$(\mathbf{I}_n \otimes \{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^n)(\mathbf{X} \otimes \{\mathbf{Z}_i\}_{i=1}^n) = \mathbf{X} \otimes \{\mathbf{Y}_i \mathbf{Z}_i\}_{i=1}^n \quad (2)$$

가 만족되는 것을 쉽게 확인할 수 있다.

보조정리 1: 영행렬이 아닌 준양한정 행렬  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 에 대한 벡터함수  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ )에 대해 다음을 만족시키는  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ 가 존재한다.

$$\alpha_1 \cdot d^2(\mathbf{x}, \ker(\mathbf{X})) \leq V(\mathbf{x}) \leq \alpha_2 \cdot d^2(\mathbf{x}, \ker(\mathbf{X}))$$

증명: 부록 A 참조

### 2. 이동로봇 기구학 모델 및 역최적 군집제어 문제 정의

본 논문에서 고려되는 이동로봇 다개체 시스템은  $N$ 개의 비홀로노믹 이동로봇들로 구성되며, 각  $i$ 번째 ( $i \in \mathcal{N}$ ) 이동로봇은 식 (3)과 같은 기구학을 갖는다[5,9-11].

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i = \nu_i \boldsymbol{\rho}(\theta_i) \\ \dot{\theta}_i = w_i \end{cases} \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{q}_i := [x_i \ y_i]^T \in \mathbb{R}^2$ 와  $\theta_i \in \mathbb{R}$ 는 각각  $i$ 번째 이동로봇의  $xy$ -좌표상의 위치와 방위각을,  $\nu_i \in \mathbb{R}$ 와  $w_i \in \mathbb{R}$ 는 각각 이동로봇의 선속도와 각속도를 나타내며,  $\boldsymbol{\rho} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 는

$$\rho(\theta_i) := [\cos \theta_i \quad \sin \theta_i]^T$$

과 같이 정의되는 벡터함수이다. 본 논문의 프로토콜 설계의 기본 목적은 식 (3)과 같은 기구학을 갖는 다개체 이동로봇들이 목표대형을 이루어 일정한 군속도(group velocity)  $\mathbf{v}_g$ 로 이동하는 것이다. 여기서 목표대형은  $\mathbf{v}_g$ 의 일정한 속도로 움직이는  $xy$ -평면상의 위치벡터  $\mathbf{d}_i(t) \in \mathbb{R}^2$  ( $i \in \mathcal{N}$ )로 정의되며, 등속도 운동에 의해 다음을 만족한다.

$$\dot{\mathbf{d}}_i = \mathbf{v}_g, \quad \dot{\nu}_i = 0 \quad (4)$$

본 논문에서는 이동로봇들의 대형·속도일치 프로토콜 설계를 위해 (5)와 같은 동적 제한 선형화 방법을 고려한다.

$$\dot{\nu}_i = u_{i,1}, \quad w_i = u_{i,2} \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{u}_i := [u_{i,1}, u_{i,2}]^T \in \mathbb{R}^2$ 는 식 (3)과 (5)로 표현되는 각 이동로봇 시스템에 대한 제어입력변수로, LQ 역최적 방법에 의해 본 논문 4장에서 최종 주어질 예정이다. 이제, 각 이동로봇의 속도벡터를  $\mathbf{v}_i := [\dot{x}_i \quad \dot{y}_i]^T$ 로 정의하고, 이를 시간에 대하여 미분하면, 식 (3)과 (5)로부터 식 (6)과 같은 동적모델을 얻을 수 있다[9-11].

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\nu}_i = \mathbf{T}(\theta_i, \nu_i) \mathbf{u}_i \end{cases} \quad (6)$$

여기서  $\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 는 입력결합 변환행렬로

$$\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i) := \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\nu_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \nu_i \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

와 같이 정의된다. 본 논문에서는  $\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i)$  및 그 역행렬의 존재성을 위해 다음을 가정한다.

가정 2: 모든  $i \in \mathcal{N}$ 번째 이동로봇과 임의의 시간  $t \geq 0$ 에 대하여  $\nu_i(t) > 0$ 이다.

이제, 각 이동로봇의 대형오차  $\delta_i$ 와 속도오차  $\eta_i$ 를 각각

$$\delta_i := \mathbf{q}_i - \mathbf{d}_i, \quad \eta_i := \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_g$$

와 같이 정의하고 이를 미분하면, 식 (4)와 (6)을 통해 다음과 같은 동역학을 얻는다.

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \eta_i \\ \dot{\eta}_i = \mathbf{T}(\theta_i, \nu_i) \mathbf{u}_i \end{cases} \quad (8)$$

본 논문에서는 상기 오차 동역학 (8)과

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &:= [\delta_i^T \quad \eta_i^T]^T, \quad \mathbf{e} := [\mathbf{e}_1^T \quad \mathbf{e}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{e}_N^T]^T, \\ \boldsymbol{\delta} &:= [\delta_1^T \quad \delta_2^T \quad \dots \quad \delta_N^T]^T, \quad \boldsymbol{\eta} := [\eta_1^T \quad \eta_2^T \quad \dots \quad \eta_N^T]^T, \\ \mathbf{u} &:= [\mathbf{u}_1^T \quad \mathbf{u}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_N^T]^T, \quad \boldsymbol{\theta} := [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_N]^T \end{aligned}$$

와 같이 정의되는 전역(global) 오차벡터  $\boldsymbol{\delta}$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{2N}$ 와  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{4N}$ , 전역 입력벡터  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2N}$  및 전역 방위각 벡터  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^N$ 에 대하여 이동로봇의 역최적 대형·속도일치 문제를 다음과 같이 정의한다.

• 이동로봇의 역최적 대형·속도일치 문제: 각  $i$ 번째 이동로봇이 자신에 대한 상태변수  $(\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i, \theta_i)$ 와 이웃한 로봇의 위치  $\mathbf{q}_{-i} := \{\mathbf{q}_j : j \in \mathfrak{N}_i\}$ 와 속도  $\mathbf{v}_{-i} := \{\mathbf{v}_j : j \in \mathfrak{N}_i\}$ , 그리고 목표대형에 대한 상대거리  $\mathbf{d}_{-i} = \{\mathbf{d}_{ij} : j \in \mathfrak{N}_i\}$ 와 군속도  $\mathbf{v}_g$ 만을 이용하는 다음을 만족시키는 역최적 대형일치 프로토콜  $\mathbf{u}_i^*$  ( $i \in \mathcal{N}$ )를 설계한다.

1) **대형 및 속도일치:** 각 이동로봇이 점근적으로 대형 및 속도일치를 달성한다. 즉, 각 이동로봇 및 이와 근접한 이동로봇 개체들이

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{d}_{ij}\| = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{N} \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_g\| = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (10)$$

와 같은 대형·속도일치 방정식을 만족시킨다.

2) **역최적성:** 최적 프로토콜  $\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^{*T} \quad \mathbf{u}_2^{*T} \quad \dots \quad \mathbf{u}_N^{*T}]^T$ 에 의해 최소화되는 성능지표

$$J(\mathbf{e}(0), \mathbf{u}) := \int_0^\infty (\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{e} + \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}_g) \mathbf{u}) dt$$

의 준양한정 행렬  $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ 과 가정 2하에서 항상 양한정(positive definite)이며 매끄러운(smooth) 행렬함수  $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}_g) \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ 가 존재한다.

### III. LQ-역최적 2차 일치제어 프로토콜

시스템 (8)에 입력변환  $\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{T}(\theta_i, \nu_i) \mathbf{u}_i$ 을 적용하면, 식 (11)과 같은 선형 시스템을 얻는다.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\delta}}_i = \boldsymbol{\eta}_i \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \boldsymbol{\mu}_i \end{cases} \quad (11)$$

II-2절에서 기술된 이동로봇의 역최적 대형·속도일치를 달성하기 위해 본 장에서는, 선형 시스템 (11)에 대한 식 (12)와 같은 LQ-역최적 2차 일치제어 프로토콜을 제안한다.

$$\boldsymbol{\mu}_i = -\mathbf{K} \sum_{j \in \mathfrak{N}_i} a_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j - \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \end{bmatrix} - \gamma^{-1} \mathbf{Q}_v (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_g) \quad (12)$$

여기서  $\gamma > 0$ 는 상수,  $\mathbf{Q}_v \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 는 임의의 양한정 행렬이며,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ 는 이득행렬로, 주어진 양한정 행렬  $\mathbf{Q}_q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 에 대한 ARE

$$\mathbf{A}_c^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_c + \mathbf{Q}_q - \frac{1}{\gamma} \mathbf{P} \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T \mathbf{P} = \mathbf{0}_{4 \times 4} \quad (13)$$

의 해  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 에 대해  $\mathbf{K} = \gamma^{-1} \mathbf{B}_0^T \mathbf{P}$ 와 같이 주어지며, 식 (13)에서의 행렬  $\mathbf{A}_c$ 와  $\mathbf{B}_0$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{A}_0 := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_c := \mathbf{A}_0 - \frac{1}{\gamma} \mathbf{B}_0 \mathbf{Q}_v \mathbf{B}_0^T$$

2차 일치제어 프로토콜 (12)는  $\boldsymbol{\delta}_i, \boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{e}_i$ 의 정의와 라플라스안  $\mathcal{L}$ 의 성질 [4] “ $l_{ij} = -a_{ij}$  ( $i \neq j$ ),  $l_{ii} = \sum_{j \in \mathfrak{N}_i} a_{ij}$ ”에 의해

$$\mu_i = -K \sum_{j=1}^N l_{ij} e_j - \gamma^{-1} Q_v B_0^T e_i$$

와 같이 표현할 수 있고, 이는 다시 라플라시안  $L$ 과 크로넥커 곱의 정의를 통해

$$\mu = -[(L \otimes K) + \gamma^{-1}(I_N \otimes Q_v B_0^T)]e \quad (14)$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서  $\mu \in \mathbb{R}^{2N}$ 는 전역 선형입력으로  $\mu := [\mu_1^T \mu_2^T \cdots \mu_N^T]^T$ 와 같이 정의된다. 또한, 이와 비슷하게, 식 (11)은 전역 일치제어 변수  $e$ 에 대하여

$$\dot{e} = (I_N \otimes A_0)e + (I_N \otimes B_0)\mu \quad (15)$$

와 같이 쓸 수 있고, 따라서 (14)를 대입하고, 크로넥커 곱의 성질  $(X_1 \otimes Y_1)(X_2 \otimes Y_2) = X_1 X_2 \otimes Y_1 Y_2$ 을 이용하면,

$$\dot{e} = [(I_N \otimes A_c) - (L \otimes B_0 K)]e \quad (16)$$

와 같은 페루프 동역학을 얻을 수 있다.

보조정리 2: 행렬  $A_0^\otimes \in \mathbb{R}^{4N \times 4N}$ 와  $B_0^\otimes \in \mathbb{R}^{4N \times 2N}$ 를 각각

$$A_0^\otimes := I_N \otimes A_0, \quad B_0^\otimes := I_N \otimes B_0$$

와 같이 정의하면,

$$\begin{cases} \Pi := L \otimes P + I_N \otimes B_0 Q_v B_0^T \\ \Theta := \Phi + (L^2 - L) \otimes P B_0 B_0^T P / \gamma \\ \Phi := (L \otimes Q_q) + \gamma^{-1}(I_N \otimes B_0 Q_v^2 B_0^T) \end{cases}$$

로 정의된  $\Pi, \Theta, \Phi \in \mathbb{R}^{4N \times 4N}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$1) (A_0^\otimes)^T \Pi + \Pi A_0^\otimes + \Theta - \Pi B_0^\otimes (B_0^\otimes)^T \Pi / \gamma = \mathbf{0}_{4 \times 4} \quad (17)$$

$$2) (B_0^\otimes)^T \Pi / \gamma = (L \otimes K) + \gamma^{-1}(I_N \otimes Q_v B_0^T) \quad (18)$$

$$3) \ker \Pi = \ker \Phi = \ker(L \otimes I_4) \cap \ker(I_N \otimes B_0 B_0^T)$$

증명: 먼저 ARE (17)의 경우, ARE (13)과 각 행렬들의 정의, 크로넥커 곱 연산규칙을 이용하여 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} & (A_0^\otimes)^T \Pi + \Pi A_0^\otimes + \Theta - \Pi B_0^\otimes (B_0^\otimes)^T \Pi / \gamma \\ &= L \otimes (A_0^T P + P A_0) + I_N \otimes \underbrace{(A_0^T B_0 Q_v B_0^T + B_0 Q_v B_0^T A_0)}_{= \mathbf{0}_{4 \times 4}} \\ & \quad + \Theta - \Pi (I_N \otimes B_0 B_0^T) \Pi / \gamma \\ &= L \otimes (A_c^T P + P A_c) + I_N \otimes \frac{B_0 Q_v^2 B_0^T}{\gamma} + \Theta - L^2 \otimes \frac{P B_0 B_0^T P}{\gamma} \\ &= L \otimes \underbrace{(A_c^T P + P A_c + Q_q - P B_0 B_0^T P / \gamma)}_{= \mathbf{0}_{4 \times 4} \text{ by the ARE (13)}} \\ &= \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{aligned}$$

또한, " $K = \gamma^{-1} B_0^T P$ "와 각 행렬의 정의, 크로넥커 곱의 연산규칙을 이용하여 식 (18)이 성립함을 아래와 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} (B_0^\otimes)^T \Pi &= \gamma^{-1} [(L \otimes B_0^T P) + (I_N \otimes B_0^T B_0 Q_v B_0^T)] \\ &= (L \otimes K) + \gamma^{-1} (I_N \otimes Q_v B_0^T) \end{aligned}$$

한편, 행렬  $\Pi$ 의 정의와 크로넥커 곱 연산에 의해, 임의의  $x \in \mathbb{R}^{4N}$ 에 대해

$$\Pi x = (I_N \otimes P)(L \otimes I_4)x + (I_N \otimes B_0 Q_v B_0^T)x \quad (19)$$

가 성립함을 알 수 있다. 따라서,  $\Pi x = \mathbf{0}_{4N \times 4N}$ 이면 항상  $x \in \ker(L \otimes I_4)$ 와  $x \in \ker(I_N \otimes B_0 Q_v B_0^T)$ 가 성립하며, 임의의  $k \in \mathbb{N}$ 와 양한정 행렬  $Q_v \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 에 대해  $\ker B_0 Q_v^k B_0^T = \ker B_0 B_0^T$ 가 항상 만족되므로,

$$x \in \ker \Pi \Rightarrow x \in \ker(L \otimes I_4) \cap \ker(I_N \otimes B_0 B_0^T)$$

가 성립하고, (19)와  $\ker B_0 Q_v^k B_0^T = \ker B_0 B_0^T$ 에 의하여 그 역도 또한 참이다. 또한, 행렬  $\Phi$ 와 임의의  $x \in \mathbb{R}^{4N}$ 에 대해

$$\Phi x = (I_N \otimes Q_q)(L \otimes I_4)x + \gamma^{-1}(I_N \otimes B_0 Q_v^2 B_0^T)x$$

가 성립하므로, 상기와 같은 방법으로

$$\ker \Phi = \ker(L \otimes I_4) \cap \ker(I_N \otimes B_0 B_0^T)$$

임을 보일 수 있다. ■

정리 1: 가정 2와 입력변환을 통해 얻는 선형 시스템 (11)과 그에 대한 2차 프로토콜 (12)를 고려하자. 만일, 단순 비방향성 그래프  $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 가 가정 1을 만족시키며, 그 대수적 연결도(algebraic connectivity)  $\lambda_2(L)$ 가

$$\lambda_2(L) \geq 1 \quad (20)$$

를 만족하면 다음이 성립한다.

1) **대형 및 속도일치:** 2차 프로토콜 (12)는 점근적으로 대형일치 (9)와 속도일치 (10)을 달성하며, 그 오차  $e$ 는 초기값에 대해 지수적으로 감소한다. 즉, 양의 상수  $\beta, \kappa > 0$ 가 존재하여

$$d(e(t), \mathbb{S}) \leq \beta e^{-\kappa t} d(e(0), \mathbb{S}) \quad (21)$$

가 성립한다. 여기서  $\mathbb{S}$ 는 대형 및 속도일치가 달성되는  $\mathbb{R}^n$  상의 부분 공간으로  $\mathbb{S} = \ker \Pi$ 와 같이 주어진다.

2) **LQ-역최적성:** 2차 프로토콜 (12)는 보조정리 2에서 정의된  $\Theta$ 에 대해 주어진 다음 전역 성능함수에 대한 LQ-최적해이다.

$$J(e(0), \mu(\cdot)) = \int_0^\infty (e^T \Theta e + \gamma \cdot \mu^T \mu) dt \quad (22)$$

증명: (15)에 (14)를 대입하고, 보조정리 2의 (18)을 이용하면, 페루프 시스템 (16)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{e} = (A_0^\otimes - \gamma^{-1} B_0^\otimes (B_0^\otimes)^T \Pi) e \quad (23)$$

또한, 단순 비방향성 그래프  $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 의 라플라시안  $L$ 은 항상 준양한정 행렬이므로,  $\Pi \otimes I$ 도 그 정의에 의해 항상 준양한정 행렬임을 알 수 있다. 이제 준양한정 함수  $V(e)$ 를  $V(e) := e^T \Pi e$ 와 같이 정의하고, 이를 시스템 (23)에 관하여 미분하고, 식 (17)을 대입하면

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{e}) &= \mathbf{e}^T[(\mathbf{A}_0^\otimes)^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{A}_0^\otimes - 2 \mathbf{\Pi} \mathbf{B}_0^\otimes (\mathbf{B}_0^\otimes)^T \mathbf{\Pi} / \gamma] \mathbf{e} \\ &= -\mathbf{e}^T[\mathbf{\Theta} + \mathbf{\Pi} \mathbf{B}_0^\otimes (\mathbf{B}_0^\otimes)^T \mathbf{\Pi} / \gamma] \mathbf{e}\end{aligned}\quad (24)$$

를 얻는다. 또한, 가정 1과 정리 1, 조건 (20)에 의해  $\mathbf{L}^2 - \mathbf{L} \geq 0$ 가 성립하므로  $(\mathbf{L}^2 - \mathbf{L}) \otimes \mathbf{P} \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T \mathbf{P} / \gamma$ 는 준양한정 행렬이며, 따라서  $\mathbf{\Theta}$ ,  $\mathbf{\Phi}$ 의 정의와 “ $\ker \mathbf{\Pi} = \ker \mathbf{\Phi}$ ” (보조정리 2 참조), 보조정리 1에 의해 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{e}) &\leq -\mathbf{e}^T(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{B}_0^\otimes (\mathbf{B}_0^\otimes)^T \mathbf{\Pi} / \gamma) \mathbf{e} \leq -\mathbf{e}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{e} \\ &\leq -\alpha V(\mathbf{e})\end{aligned}\quad (25)$$

여기서  $\alpha > 0$ 는

$$\begin{aligned}\alpha_1 d^2(\mathbf{e}, \ker \mathbf{\Phi}) &\leq \mathbf{e}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{e} \leq \alpha_2 d^2(\mathbf{e}, \ker \mathbf{\Phi}) \\ \beta_1 d^2(\mathbf{e}, \ker \mathbf{\Pi}) &\leq V(\mathbf{e}) \leq \beta_2 d^2(\mathbf{e}, \ker \mathbf{\Pi})\end{aligned}\quad (26)$$

를 만족시키는  $\alpha_j, \beta_j > 0$  ( $j=1,2$ )에 대해  $\alpha := \alpha_1 / \beta_2$ 와 같이 정의된다. 따라서 비교정리(comparison lemma) [17, Lemma 3.4]를 (25)에 적용하면,  $V(\mathbf{e}(t)) \leq V(\mathbf{e}(0))e^{-\alpha t}$ 를 얻을 수 있고, 결과 부등식과 식 (26)을 통해

$$\beta_1 d^2(\mathbf{e}(t), \ker \mathbf{\Pi}) \leq \beta_2 e^{-\alpha t} d^2(\mathbf{e}(0), \ker \mathbf{\Pi})$$

가 유도되어,  $\beta = \sqrt{\beta_2 / \beta_1}$ ,  $\kappa = \alpha / 2$ ,  $\mathbb{S} = \ker \mathbf{\Pi}$ 에 대하여 식 (21)이 성립하며,  $t \rightarrow \infty$  함에 따라  $\mathbf{e}(t)$ 가 영공간  $\ker \mathbf{\Pi}$ 로 수렴한다. 또한, 보조정리 2에 의해  $\mathbf{e}_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t)$ 와 같이 정의되는 수렴벡터  $\mathbf{e}_\infty$ 가

$$\mathbf{e}_\infty \in \ker(\mathbf{\Pi}) = \ker(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_4) \cap \ker(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T) \quad (27)$$

를 만족함을 알 수 있다. 가정 1과 정리 1에 의해  $\mathbf{L}$ 의 고유값 ‘0’에 해당하는 고유벡터는  $\mathbf{1}_N$ 외에는 없으므로, 임의의 벡터  $\mathbf{z}_N \in \mathbb{R}^N$ 와  $\delta_\infty, \boldsymbol{\eta}_\infty \in \mathbb{R}^2$ 로 구성된 벡터

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \mathbf{z}_N \otimes [\delta_\infty^T \ \boldsymbol{\eta}_\infty^T]^T$$

가  $\boldsymbol{\nu}_1 \in \ker \mathbf{\Pi}$ 를 만족시킨다면, (27)에 의하여  $\mathbf{z}_N = \mathbf{1}_N$ 과  $\boldsymbol{\eta}_\infty = \mathbf{0}_2$ 가 동시에 성립되는 것을 알 수 있고, 따라서  $\mathbf{e}$ 의 정의와  $\mathbf{e}_\infty \in \ker(\mathbf{\Pi})$ 에 의해  $t \rightarrow \infty$  함에 따라

$$\begin{cases} \delta_1(t) = \delta_2(t) = \dots = \delta_N(t) = \delta_\infty \\ \boldsymbol{\eta}_1(t) = \boldsymbol{\eta}_2(t) = \dots = \boldsymbol{\eta}_N(t) = \boldsymbol{\eta}_\infty = \mathbf{0}_2 \end{cases}$$

가 성립한다. 이는 모든  $i, j \in \mathcal{N}$ 에 대해

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} (\delta_i(t) - \delta_j(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{d}_{ij}) = \mathbf{0}_2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_g \end{cases}$$

임을 의미하므로, 대형일치 (9)와 속도일치 (10)을 달성함이 증명된다.

다음으로, 역최적성을 보이기 위해 (14)와 보조정리 2의 (18)을 (24)에 대입하면,  $\dot{V}(\mathbf{e})$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-\dot{V}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \mathbf{\Theta} \mathbf{e} + \gamma \cdot \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu} \quad (28)$$

또한,  $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{e}_\infty \in \ker(\mathbf{\Pi})$ 와  $V(\mathbf{e})$ 의 정의 “ $V(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{e}$ ”에 의해서  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{e}(t)) = 0$ 가 만족됨을 알 수 있으며,

따라서, (28)를 시간에 대해 “0”부터 “ $\infty$ ”까지 적분하여 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}V(\mathbf{e}(0)) &= -[\lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{e}(t)) - V(\mathbf{e}(0))] \\ &= \int_0^\infty (\mathbf{e}^T \mathbf{\Theta} \mathbf{e} + \gamma \cdot \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}) dt\end{aligned}$$

여기서  $\mathbf{\Theta}$ 는 조건 (20)에 따라 준양한정 행렬이며, (14)와 같이 주어지는  $\boldsymbol{\mu}$ 는 보조정리 2의 (18)에 의해 시스템 (15)와 성능지표 (22)의 최적해  $\boldsymbol{\mu}^* = -(\mathbf{B}_0^\otimes)^T \mathbf{\Pi} / \gamma$ 와 등가이다. 또한, 준양한정 함수  $V(\mathbf{e}) (= \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{e})$ 는 ARE (17)에 의해 최적해  $\boldsymbol{\mu}^*$ 에 대한 가치함수이므로, 식 (14)와 같이 주어지는  $\boldsymbol{\mu}$ 는 비용함수 (22)를 최소화시키는 최적해이다. ■

#### IV. 이동로봇군의 역최적 대형·속도일치 프로토콜

III장에서 설계된 LQ-역최적 2차 일치제어 프로토콜 (12)를 입력변환식  $\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{T}(\theta_i, \nu_i) \mathbf{u}_i$ 에 대입하면, 식 (29)와 같은 대형·속도일치 프로토콜을 최종적으로 얻을 수 있다.

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{T}^{-1}(\theta_i, \nu_i) \cdot \left[ \mathbf{K} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j - \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_v (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_g) \right] \quad (29)$$

본 장에서는 III장의 결과를 바탕으로, 식 (29)와 같이 주어지는 프로토콜의 대형일치 및 속도일치, 역최적성을 증명한다. 이는 변환행렬  $\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i)$ 과 선속도  $\nu_i$ , 그리고

$$\boldsymbol{\Gamma}(\nu_i) := \gamma \cdot \text{diag}\{1, \nu_i^2\} \quad (30)$$

와 같이 정의되는 이득행렬  $\boldsymbol{\Gamma}(\nu_i) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 의 다음과 같은 수학적 성질을 통해 이루어진다.

보조정리 3: 각 이동로봇이 가정 2를 만족하면, 변환행렬  $\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i)$ 와 이득행렬  $\boldsymbol{\Gamma}(\nu_i)$ , 선속도  $\nu_i$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$1) \ \nu_i(t) = \|\boldsymbol{\eta}_i(t) + \mathbf{v}_g\| \ \forall t \geq 0. \quad (31)$$

$$2) \ \mathbf{T}(\theta_i, \nu_i) \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\nu_i) \mathbf{T}^T(\theta_i, \nu_i) = \gamma^{-1} \cdot \mathbf{I}_2. \quad (32)$$

$$3) \ \nu_i = \|\boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{v}_g\| > 0 \text{ 인 모든 점에서 정의되며 } \boldsymbol{\eta}_i \text{에 대해 미분 가능한 행렬함수 } \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{가 존재하여}$$

$$\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g) \quad (33)$$

를 만족시킨다. 즉,  $\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i)$ 는  $\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g$ 에 관한 함수이다.

증명: 관계식  $\boldsymbol{\rho}^T(\theta_i) \boldsymbol{\rho}(\theta_i) = 1$ 과  $\dot{\mathbf{q}}_i = \boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{v}_g$ ,  $\mathbf{q}_i$ 에 대한 동역학 (3)을 이용하면,  $\nu_i = \boldsymbol{\rho}^T(\theta_i) (\boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{v}_g)$ 와

$$\boldsymbol{\rho}(\theta_i) = (\boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{v}_g) / \nu_i \quad (34)$$

를 유도할 수 있으며, 이를 통해  $\nu_i^2 = \|\boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{v}_g\|^2$ 임을 알 수 있다. 따라서 가정 2에 의해  $\nu_i(t) > 0$ 이므로 (31)이 증명된다. 또한,  $\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i)$ 의 정의 (7)과 식 (31), (34)를 통해  $\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i)$ 를  $\boldsymbol{\eta}_i$ 와  $\mathbf{v}_g$ 의 함수로 나타낼 수 있음을 알 수 있

으며, 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\theta_i, \nu_i) &= \begin{bmatrix} (\eta_{i,1} + v_{g,1}) / \|\boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{v}_g\| & -(\eta_{i,2} + v_{g,2}) \\ (\eta_{2,1} + v_{g,2}) / \|\boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{v}_g\| & \eta_{i,1} + v_{g,1} \end{bmatrix} \\ &\equiv \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g) \end{aligned}$$

여기서  $\boldsymbol{\eta}_i$ 와  $\mathbf{v}_g$ 의 원소를  $\boldsymbol{\eta}_i = [\eta_{i,1} \ \eta_{i,2}]^T$ ,  $\mathbf{v}_g = [v_{g,1} \ v_{g,2}]^T$ 와 같이 표기했으며, 따라서  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)$ 는  $\|\boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{v}_g\| > 0$ 인 모든 점에서 정의되며,  $\boldsymbol{\eta}_i$ 에 대해 미분 가능함을 알 수 있다. 끝으로 (32)가 성립함은  $\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i)$ 와  $\Gamma(\nu_i)$ 의 정의 (7)과 (30)을 대입하여 쉽게 확인할 수 있다. ■

정리 3: 주어진 단순 비방향성 그래프  $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 에 대해 가정 1과 식 (20)이 성립하고, 각 이동로봇들이 가정 2를 만족시키면, (29)와 같이 제안되는 프로토콜  $\mathbf{u}_i$ 는 이동로봇에 대한 대형일치 (9)와 속도일치 (10)을 지속적으로 달성하며, 또한 시스템 (8)과

$$J(\mathbf{e}(0), \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^\infty \left( \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{e} + \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^T \Gamma(\nu_i) \mathbf{u}_i \right) dt \quad (35)$$

와 같이 정의되는 전역 성능함수에 대한 최적 프로토콜 “ $\mathbf{u}_i^*$ ”와 등가이다.

증명: 가정 2에 의해  $\mathbf{T}(\theta_i, \nu_i)$ 의 역행렬이 항상 존재하며, 따라서 정리 2에 의하여, 식 (29)와 같이 주어지는 프로토콜  $\mathbf{u}_i$ 는 대형일치 (9)와 속도일치 (10)을 지속적으로 달성함을 쉽게 보일 수 있다. 역최적성을 보이기 위해 보조정리 3과 식 (2)를 시스템 (8)에 적용하면,

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_0^\otimes \mathbf{e} + \mathbf{B}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \mathbf{u} \quad (36)$$

와 같은 상태변수  $\mathbf{e}$ 에 대한 동적방정식을 얻을 수 있으며, 여기서  $\mathbf{B}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes$ 는  $\mathbf{B}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes := \mathbf{I}_N \otimes \{\mathbf{B}_0 \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)\}_{i=1}^N$ 와 같이 정의되는 입력 결합항(input-coupling term)이다. 또한, 보조정리 3을 통해 관계식  $\mathbf{u}_i = \mathbf{T}^{-1}(\theta_i, \nu_i) \boldsymbol{\mu}_i$ 을

$$\mathbf{u} = \left( \mathbf{I}_N \otimes \{\mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)\}_{i=1}^N \right) \boldsymbol{\mu} \quad (37)$$

와 같이 표현할 수 있다. 보조정리 3의 (32)와 (33)에 의해  $\gamma^{-1} \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g) = \Gamma^{-1}(\nu_i) \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)$ 인 것과, (14)와 보조정리 2의 (18)에 의해  $\boldsymbol{\mu} = -\gamma^{-1} (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_0^T) \boldsymbol{\Pi} \mathbf{e}$ 임을 이용하면, (37)을 (1)과 (2)를 통해 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left( \mathbf{I}_N \otimes \{\mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)\}_{i=1}^N \right) (\mathbf{I}_N \otimes \gamma^{-1} \mathbf{B}_0^T) \boldsymbol{\Pi} \mathbf{e} \\ &= \left( \mathbf{I}_N \otimes \{\Gamma^{-1}(\nu_i) \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g) \mathbf{B}_0^T\}_{i=1}^N \right) \boldsymbol{\Pi} \mathbf{e} \\ &= \left( \mathbf{I}_N \otimes \{\Gamma(\nu_i)\}_{i=1}^N \right)^{-1} \left( \mathbf{I}_N \otimes \{\mathbf{B}_0 \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)\}_{i=1}^N \right)^T \boldsymbol{\Pi} \mathbf{e} \\ &= \left( \boldsymbol{\Gamma}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \right)^{-1} \left( \mathbf{B}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \right)^T \boldsymbol{\Pi} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (38)$$

여기서  $\boldsymbol{\Gamma}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes$ 는  $\boldsymbol{\Gamma}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes := \mathbf{I}_N \otimes \{\Gamma(\nu_i)\}_{i=1}^N$ 와 같이 정의되며, 보조정리 3의 (31)과  $\Gamma(\nu_i)$ 의 정의에 의해  $\gamma$ ,  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $\mathbf{v}_g$ 에

만 의존하는 행렬임을 알 수 있다. 또한, (1), (2)를 통해

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}_0^\otimes (\mathbf{B}_0^\otimes)^T / \gamma \\ &= \mathbf{I}_N \otimes \left\{ \mathbf{B}_0 (\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g) \Gamma^{-1}(\nu_i) \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)) \mathbf{B}_0^T \right\}_{i=1}^N \\ &= \left( \mathbf{I}_N \otimes \{\mathbf{B}_0 \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)\}_{i=1}^N \right) \left( \boldsymbol{\Gamma}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \right)^{-1} \left( \mathbf{I}_N \otimes \{\mathbf{B}_0 \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)\}_{i=1}^N \right)^T \\ &= \mathbf{B}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \left( \boldsymbol{\Gamma}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \right)^{-1} \left( \mathbf{B}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \right)^T \end{aligned}$$

임을 알 수 있으므로 (38)과 보조정리 2의 식 (17)을 통해

$$\left( \mathbf{A}_0^\otimes \right)^T \boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\Pi} \mathbf{A}_0^\otimes + \boldsymbol{\Theta} - \boldsymbol{\Pi} \mathbf{B}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \left( \boldsymbol{\Gamma}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \right)^{-1} \left( \mathbf{B}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \right)^T \boldsymbol{\Pi} = \mathbf{0}_{4 \times 4} \quad (39)$$

를 얻을 수 있다. 여기서 식 (39)는 시스템 (36)과 성능함수

$$\mathcal{J}(\mathbf{e}(0), \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^\infty \left( \mathbf{e}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{e} + \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Gamma}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \mathbf{u} \right) dt \quad (40)$$

에 대한 행렬형태의 Hamilton-Jacobi-Bellman 방정식임을 확인할 수 있으며, 따라서  $\mathbf{u}$ 에 관한 식 (38)을 통해, (29)가 성능함수 (40)과 시스템 (36)에 대한 최적해임을 알 수 있다. 또한, 성능함수 (40)의  $\mathbf{u}^T \boldsymbol{\Gamma}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \mathbf{u}$ 는 그 정의에 의해

$$\mathbf{u}^T \boldsymbol{\Gamma}_{(\boldsymbol{\eta}_i, \mathbf{v}_g)}^\otimes \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \left( \mathbf{I}_N \otimes \{\Gamma(\nu_i)\}_{i=1}^N \right) \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^T \Gamma(\nu_i) \mathbf{u}_i$$

와 같이 쓸 수 있으므로, (29)는 (35)를 최소화시키는 최적해가 된다. 따라서 본 정리의 증명이 완료되었다. ■

## V. 모의실험

제안된 역최적 대형·속도일치 프로토콜 (29)의 성능검증하기 위해 5대의 이동로봇과 (41)과 같은 라플라시안  $\mathbf{L}$ 로 표현되는 통신 토폴로지를 갖는 이동로봇 다개체 시스템에 대한 모의실험을 수행하였다(그림 1 참조).

$$\mathbf{L} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

여기서  $c > 0$ 는 상수로서 역최적성 조건 (20)을 만족시키

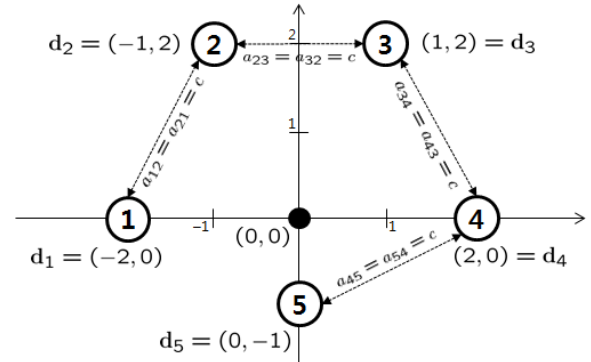
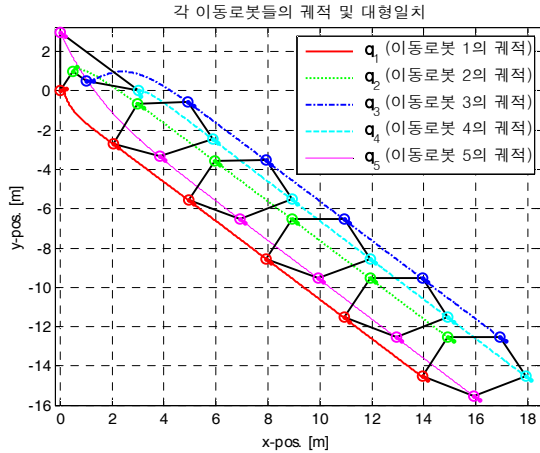
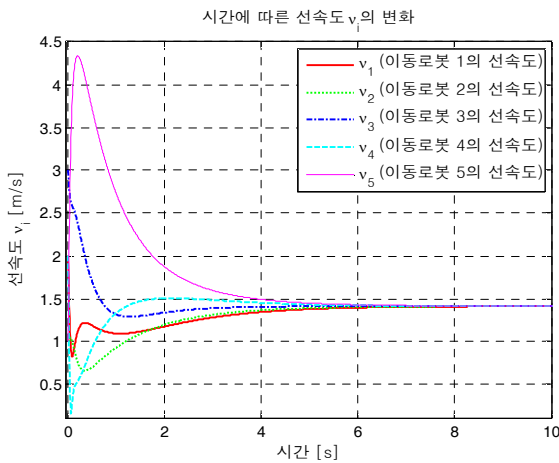


그림 1. 다개체 이동로봇의 통신 토폴로지와 목표대형.

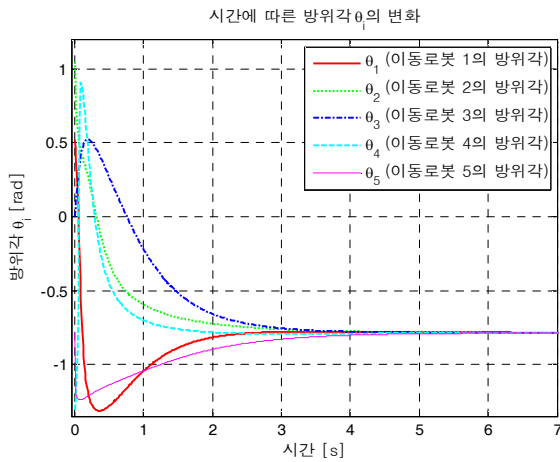
Fig. 1. Communication topology and the desired formation of multiple mobile robots.



(a) Trajectories of mobile robots in xy-plane and their formation consensus.



(b) The variations of  $v_i$  for each mobile robot.



(c) The variations of  $\theta_i$  for each mobile robot.

그림 2. 이동로봇의 대형·속도일치에 대한 모의실험 결과.  
Fig. 2. The simulation results for the formation/velocity consensus of mobile robots.

는 값 " $c=3$ "( $\lambda_2(\mathbf{L})=1.1459$ )으로 설정하였으며, ARE (13)의 각 파라미터는  $\mathbf{Q}_q=20\mathbf{I}_4$ ,  $\mathbf{Q}_v=5\mathbf{I}_2$ ,  $\gamma=1$ 와 같이 주어졌다. 또한, 균속도  $\mathbf{v}_g$ [m/s]는  $\mathbf{v}_g=[1 \ -1]^T$ 와 같이,

각 이동로봇의 목표대형  $\mathbf{d}_{ij}$ [m]은 그림 1와 같이 주어졌으며, 모의실험 결과가 그림 2(a)~(c)에 나타나 있다. 그림 2(a)을 통해 프로토콜 (29) 하에 각 이동로봇이 목표대형을 형성하여 계속 주행함을 확인할 수 있으며, 그림 2(b)와 같이 각 이동로봇이 균속도  $\mathbf{v}_g$ 와 일치되어 주행하게 됨을 알 수 있다( $\|\mathbf{v}_g\|=\sqrt{2}$ ). 한편, 각 이동로봇의 방위각  $\theta_i$ 의 경우에도, 그림 2(a), (c)와 같이 프로토콜 (29)에 의해  $\mathbf{v}_g$ 의 방향 ( $\theta_g=-\pi/4$ )으로 모두 수렴하게 되어, 모든 이동로봇들이  $\mathbf{v}_g$ 와 동일한 방향으로 이동하는 것을 확인할 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 비홀로노믹 이동로봇들의 역최적 대형·속도일치 프로토콜을 제안하였다. 제안된 기법은 단순 비방향성 그래프로 표현되는 통신구조와 각 이동로봇의 기구학을 고려하였으며, 각 이동로봇들 간에 서로 연결된 개체의 정보만을 이용하여 일정한 대형과 주어진 균속도로 주행하도록 설계되었다. 또한, 역최적 대형·속도일치 프로토콜 도출을 위해 LQ-역최적 2차 일치제어 프로토콜 설계법을 제안하였으며, 기구학 모델의 변환기법을 접목하였다. 설계된 LQ-역최적 2차 일치제어 프로토콜과 역최적 대형·속도일치 프로토콜은 그 수학적 분석을 통해 대형 및 속도일치를 지속적으로 달성함과, 그래프 구조에 따라 결정되는 성능지표를 최소화시키는 역최적해임을 증명하였다. 마지막으로, 모의실험을 통해 제안된 프로토콜의 성능을 검증하였다.

REFERENCES

- [1] T. Balch and R. C. Arkin, "Behavior-based formation control for multirobot teams," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 14, no. 6, pp. 926-939, 1998.
- [2] K. D. Do, "Formation tracking control of unicycle-type mobile robots with limited sensing ranges," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 16, no. 3, pp. 527-538, 2008.
- [3] B. S. Park, J. B. Park, and Y. H. Choi, "Adaptive formation control of electrically driven nonholonomic mobile robots with limited information," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: B. Cybernetics*, vol. 41, no. 4, pp. 1061-1075, 2011.
- [4] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins, "Information consensus in multi-vehicle cooperative control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 27, no. 2, pp. 71-82, 2007.
- [5] W. Dong, "Flocking of multiple mobile robots based on backstepping," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: B. Cybernetics*, vol. 41, no. 2, pp. 414-424, 2011.
- [6] H. Zhang, F. L. Lewis, and Z. Qu, "Lyapunov, adaptive, and optimal design techniques for cooperative systems on directed communication graphs," *IEEE Transactions*



on *Industrial Electronics*, vol. 59, no. 7, pp. 3026-3041, 2012.

- [7] Z. Qu, J. Wang, and R. A. Hull, "Cooperative control of dynamical systems with application to autonomous vehicles," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 4, pp. 894-911, 2008.
- [8] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465-1476, 2004.
- [9] H. Kim, H. Shim, J. H. Seo, and J. Back, "Formation control algorithm for coupled unicycle-type mobile robots through switching interconnection topology," *Journal of Institute of Control, Robotics, and Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 5, pp. 439-444, 2012.
- [10] J. Y. Lee and Y. H. Choi, "LQ inverse optimal consensus protocol for continuous-time multi-agent systems and its application to formation control," *Journal of Institute of Control, Robotics, and Systems (in Korean)*, vol. 20, no. 5, pp. 526-532, 2014.
- [11] J. Y. Lee, Y. H. Choi, and J. B. Park, "Inverse optimal design of the distributed consensus protocol for formation control of multiple mobile robots," In: *Proc. of 53<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 2222-2227, Dec. 2014.
- [12] Y. Ren, "On consensus algorithms for double-integrator dynamics," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1503-1509, 2008.
- [13] W. Yu, G. Chen, M. Cao, and J. Kurths, "Second-order consensus for multi-agent systems with directed topologies and nonlinear dynamics," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: B. Cybernetics*, vol. 40, no. 3, pp. 881-891, 2010.
- [14] F. Borrelli and T. Keviczky, "Distributed LQR design for identical dynamically decoupled systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 8, pp. 1901-1912, 2008.
- [15] Y. Cao and W. Ren, "Optimal linear-consensus algorithms: an LQR perspective," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: B. Cybernetics*, vol. 40, no. 3, pp. 819-830, 2010.
- [16] K. H. Movric and F. L. Lewis, "Cooperative optimal control for multiagent systems on directed graph topologies," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 3, pp. 769-774, 2014.
- [17] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall Upper Saddle River, 2002.

#### 부 록 A. 보조정리 1의 증명

먼저,  $\mathbf{x}$ 를  $\mathbf{X}$ 의 행공간(row space) 성분  $\mathbf{x}_r$ 과 영공간 성분  $\mathbf{x}_n$ 으로  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$ 와 같이 분해하면, 행공간과 영공간

은 항상 직교하므로, 임의의  $\mathbf{y} \in \ker \mathbf{X}$ 에 대하여

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\|\mathbf{x}_r\|^2 + \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\|^2}$$

가 항상 성립하고, 따라서  $d(\mathbf{x}, \mathcal{S})$ 의 정의에 의해

$$d(\mathbf{x}, \ker(\mathbf{X})) = \|\mathbf{x}_r\| \quad (\text{A1})$$

를 얻는다. 한편,  $\mathbf{x}_r^T \mathbf{X} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n^T \mathbf{X} \mathbf{x}_n = 0$ 가 항상 만족하므로,  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_r^T \mathbf{X} \mathbf{x}_r$ 가 성립한다. 또한  $\mathbf{X}$ 가 준양한정 행렬이며,  $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}_{n \times n}$ 이므로, 양수  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ 가 존재하여 모든  $j \in \{p, p+1, \dots, n\}$ 에 대해서  $\lambda_j(\mathbf{X}) > 0$ 를 만족시킨다. 따라서  $\mathbf{X}$ 의 특이값 분해(singular value decomposition)에 의해  $\mathbf{X} = \mathbf{Q}_c \text{diag}\{\lambda_p(\mathbf{X}), \dots, \lambda_n(\mathbf{X})\} \mathbf{Q}_c^T$ 가 성립하며, 여기서  $\mathbf{Q}_c \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$ 는 열공간(column space)의 직교 단위벡터로 구성된 직교행렬(orthogonal matrix)이다. 이제,  $\mathbf{z}_r := \mathbf{Q}_c^T \mathbf{x}_r$ 로 정의하면,  $\lambda_p(\mathbf{X}) \|\mathbf{z}_r\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_n(\mathbf{X}) \|\mathbf{z}_r\|^2$ 가 성립함을 알 수 있고,  $\|\mathbf{x}_r\| = \|\mathbf{z}_r\|$ 와 (A1)에 의해 본 증명이 완료된다.



#### 이재영

2006년 광운대학교 정보제어공학과(공학사). 2007년~현재 연세대학교 전기전자공학과 박사과정. 관심분야는 적응형 최적제어, 강화학습, 근사 동적 계획법, 비선형 제어, 다개체 시스템, 로봇 제어, 무인 자동차 및 전력 시스템 응용.



#### 최윤호

1980년 연세대학교 전기공학과(공학사). 1982년 연세대학교 전기공학과(공학석사). 1991년 연세대학교 전기공학과(공학박사). 1993년~현재 경기대학교 전자공학과 교수. 관심분야는 비선형 적응 제어, 지능 제어, 다개체 군집 제어, 로봇틱스, 웨이블릿 변환 및 응용, ADP 기반 최적 제어.