

압축 센싱 기반의 신호 검출 및 추정 방법

응웬뚜랑녹*, 정홍규*, 신요안°

A Signal Detection and Estimation Method Based on Compressive Sensing

Thu L. N. Nguyen*, Honggyu Jung*, Yoan Shin°

요약

압축 센싱은 신호가 성긴 (Sparse) 특성을 지니며 선형 측정된 값들이 Incoherent 할 때, 나이퀴스트율 이하로 표본화된 신호를 원본 신호로 정확하게 복구할 수 있는 새로운 신호 획득 이론이다. 본 논문에서는 원본 신호의 Sparse한 정도에 따라 성능이 변화하는 압축 센싱을 이용한 효율적인 신호 검출 및 추정 기법을 제안하며, 이론적 분석과 함께 모의 실험 결과를 보여준다.

Key Words : Compressive Sensing, RIP, Sparsity, Detection, Estimation

ABSTRACT

Compressive sensing is a new data acquisition method enabling the reconstruction of sparse or compressible signals from a smaller number of measurements than Nyquist rate, as long as the signal is sparse and the measurement is incoherent. In this paper, we consider a simple hypothesis testing in target detection and estimation problems using compressive sensing, where the performance depends on the sparsity level of the signals being detected. We provide theoretical analysis results along with some experiment results.

1. 압축 센싱 기본 이론

압축 센싱은 선형 측정 행렬 $A \in R^{m \times n}$ 와 원본 신호 $x \in R^n$ 로부터 다음 식과 같이 선형 측정 벡터 $y \in R^m$ 를 얻는 과정을 말한다.

$$y = Ax \tag{1}$$

원본 신호 x 는 식 (2)와 같이 모든 k -sparse 벡터 집합인 $\Sigma_k \subset R^n$ 에 속한다고 가정된다.

$$\Sigma_k(x) = \bigcup_{|T| \leq k} \Sigma_T(x), \tag{2}$$

여기서 $T \subseteq \{1, \dots, n\}$ 에 대하여 $\Sigma_T(x) = \{x \in R^n : x_i = 0, i \notin T\}$ 이다. 이 때, 압축 센싱 이론은 $m \ll n$ 인 경우에 x 를 위한 유일한 해가 존재하지 않는 불량조건 문제 (Ill-posed Problem)를 다음 식 (3)의 ℓ_1 -minimization을 통해 y 로부터 x 를 복구할 수 있음을 보여준다^{1,2)}.

* 본 논문은 2013년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업 (No. 2013R1A1A2059500) 및 2014년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (2014R1A5A1011478).

• First Author : School of Electronic Engineering, Soongsil University, thunguyen@ssu.ac.kr, 학생회원

° Corresponding Author : School of Electronic Engineering, Soongsil University, yashin@ssu.ac.kr, 종신회원

* School of Electronic Engineering, Soongsil University, hkjung00@ssu.ac.kr, 학생회원

논문번호 : KICS2015-03-078, Received March 28, 2015; Revised April 10, 2015; Accepted April 10, 2015

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ such that } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (3)$$

특히, [1]에서는 식 (3)에 대한 해와 그 유일성의 존재를 위해 측정 행렬 \mathbf{A} 가 식 (4)의 k -Restricted Isometry Property (k -RIP)라 불리는 안정성 조건을 만족해야 한다는 것을 보였다.

$$(1-\epsilon) \sqrt{\frac{m}{n}} \leq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{z}\|_2}{\|\mathbf{z}\|_2} \leq (1+\epsilon) \sqrt{\frac{m}{n}}, \quad (4)$$

여기서 $\|\mathbf{z}\|_0 \leq k$ 이다. 더 나아가 [2]에서는 측정 행렬 \mathbf{A} 가 랜덤하게 일정한 m 개의 열을 선택하여 획득한 푸리에 (Fourier) 행렬이며 측정 개수 $m \geq C \cdot k \cdot \ln(n)$ 을 만족한다면, 식 (3)의 ℓ_1 -minimization을 통해 매우 높은 확률로 \mathbf{x} 를 복구할 수 있다는 것을 보였다. 특히, 높은 차원 공간에 있는 n 개의 점들이 매우 높은 확률로 $O(k \cdot \ln(n/k)) \ll n$ 차원으로 투영된다면, 그 점들 사이의 Pairwise Squared Distance는 $(1 \pm \epsilon)$ 보다 크지 않은 값에 의해 변화한다²⁾. 이러한 차원수 축소 관점에서 다음 보조정리 1은 랜덤 벡터를 특정 부공간 (Subspace)으로 투영하는 경우를 고려한다.

보조정리 1 (Johnson-Lindenstrauss [3]): Q 를 \mathcal{R}^n 에서 $|Q|$ 개의 점들을 모은 유한한 집합이라고 하고, \mathbf{A} 를 통해 신호가 \mathcal{R}^n 차원에서 \mathcal{R}^m 차원으로 랜덤하게 적고 투영된다고 하자. $\epsilon \in (0,1)$ 와 $\beta > 0$ 가 주어졌을 때 m_0 가 식 (5)를 만족한다면,

$$m_0 = \frac{4+2\beta}{\epsilon^2/2 - \epsilon^3/3} \ln(|Q|) \quad (5)$$

$m_0 \leq m < n$ 와 모든 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Q, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ 에 대하여 적어도 $1 - (|Q|)^{-\beta}$ 의 확률로 식 (6)이 성립한다.

$$(1-\epsilon) \sqrt{\frac{m}{n}} \leq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2} \leq (1+\epsilon) \sqrt{\frac{m}{n}}. \quad (6)$$

만약 \mathbf{A} 가 위 보조정리 1을 따르는 확률 분포로부터 설계된다면, 적어도 $1 - O(n^{-\beta})$ 의 확률로 \mathbf{A} 는 $m = O(k \cdot \log(n/k))$ 을 통해 RIP를 만족한다. 따라서, 어떤 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ 를 통해서도 식 (7)이 성립된다³⁾.

$$E(\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2) = \frac{m}{n} \|\mathbf{x}\|_2^2. \quad (7)$$

이러한 랜덤 측정 행렬 \mathbf{A} 의 예로, 각 원소들이 $a_{ij} \sim N(0,1/m)$ 의 독립적인 분포를 따르는 가우시안 (Gaussian) 행렬, 푸리에 (Fourier) 행렬, 그리고 각 원소들이 $P(a_{ij} = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}) = \frac{1}{2}$ 의 확률로 베르누이 (Bernoulli) 분포를 따라 독립적으로 표본화된 이진 (Binary) 행렬 등을 들 수 있다²⁻⁵⁾.

기호 정의: 본 논문에서는 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ 를 각 원소가 a_{ij} 인 행렬, \mathbf{I}_n 을 $n \times n$ 단위 행렬, T^c 를 T 의 여집합, $\text{tr}(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$ 를 $n \times n$ 행렬인 $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ 의 Trace, $(\cdot)^T$ 를 전치 행렬, $\|\cdot\|_2$ 를 ℓ_2 -norm, $|S|$ 를 주어진 집합 S 의 원소의 개수, 그리고 $E(\cdot)$ 를 기대값 연산자로 정의한다. 또한, 신호 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ 가 $\|\mathbf{x}\|_0 \leq k$ 을 만족하면 \mathbf{x} 를 k -sparse 벡터라고 부르며, \mathbf{x}_S 를 다음과 같이 정의한다.

$$(\mathbf{x}_S)_i = \begin{cases} x_i & \text{if } i \in S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

더 나아가, $P(X)$ 는 사건 X 가 발생할 확률, $O(\cdot)$ 는 복잡도 연산자, 그리고 $N(\mu, \sigma^2)$ 은 평균이 μ 이고 분산이 σ^2 인 정규 분포를 의미한다. 마지막으로 $w \sim f(w)$ 는 w 가 확률밀도함수 (Probability Density Function) $f(w)$ 에 따라서 분포되는 것을 의미한다.

II. 압축 센싱 기반의 신호 검출 기법

2.1 일반적인 신호 검출 방법

본 논문에서는 식 (8)과 같이 신호 감지를 위한 가설 검정 문제를 고려한다.

$$\begin{aligned} H_0: \mathbf{x} &= \mathbf{w} \\ H_1: \mathbf{x} &= \mathbf{s} + \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $\mathbf{s} \in \mathcal{R}^n$ 와 $\mathbf{w} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ 는 각각 입력 신호와 잡음을 나타낸다. 이 때, 각 가설들은 식 (9)와 같이 확률밀도함수를 통해 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} H_0 : \mathbf{x} &\sim f(\mathbf{x}|H_0) \\ H_1 : \mathbf{x} &\sim f(\mathbf{x}|H_1). \end{aligned} \quad (9)$$

또한 신호 검출 문제를 위해 결정 함수 $\delta(\mathbf{x})$ 을 통해 구별되는 두 개의 분리된 도메인 R_0 와 R_1 을 다음과 같이 정의하면,

$$R_0 = \{\mathbf{x} : \delta(\mathbf{x}) = 0\} \quad (10)$$

$$R_1 = \{\mathbf{x} : \delta(\mathbf{x}) = 1\}, \quad (11)$$

식 (12)와 같이 Type-I 오류로 불리는 오경보 확률 (False Alarm Probability) P_{FA} 와 Type-II 오류로 불리는 미검출 확률 (Miss Detection Probability) $P_M(\delta) = 1 - P_D(\delta)$ 를 고려할 수 있다. 여기서, $P_D(\delta)$ 는 검출 확률 (Correct Detection Probability)이다.

$$\begin{aligned} P_{FA} &= P(H_1 \text{ was chosen when } H_0 \text{ true}) \\ P_D &= P(H_1 \text{ was chosen when } H_1 \text{ true}). \end{aligned} \quad (12)$$

[6]에서 Neyman-Pearson은 $P_{FA}(\delta)$ 를 주어진 값 α 보다 같거나 작게 만드는 동시에 $P_D(\delta)$ 를 최대화 하거나 $P_M(\delta)$ 을 최소화 하는 δ 를 선택하는 것으로 가설 검정 문제를 수식화하였으며, 이를 위해 식 (13)의 우도비검정 (Likelihood Ratio Test) 문제를 다룬다.

$$L(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{y}|H_1)}{f(\mathbf{y}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \tau. \quad (13)$$

여기서 τ 는 식 (14)를 만족하도록 설계된다.

$$P_{FA} = \int_{L(\mathbf{x}) > \tau} f(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} = \alpha. \quad (14)$$

따라서 가설 H_0 와 H_1 에 대한 PDF는 다음과 같이 표현되고,

$$f(\mathbf{x}|H_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma^2}\right), \quad (15)$$

$$f(\mathbf{x}|H_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|_2^2}{2\sigma^2}\right), \quad (16)$$

식 (13)의 우도비검정은 다음과 같이 정리된다.

$$L(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|_2^2}{2\sigma^2} + \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma^2}\right). \quad (17)$$

식 (17)의 양쪽에 로그함수를 적용하면 다음과 같으며,

$$\ln[L(\mathbf{x})] = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle}{\sigma^2} - \frac{\|\mathbf{s}\|_2^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln(\tau),$$

간략하게 식 (18)과 같이 정리된다.

$$t \triangleq \frac{H_1}{H_0} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma, \quad (18)$$

여기서 $\gamma = \sigma^2 \ln(\tau) + \frac{1}{2} \|\mathbf{s}\|_2^2$ 이다. 결국 식 (9)의 가설 검정 문제는 충분 통계량 (Sufficient Statistic) t 의 관점에서 식 (19)와 같이 새롭게 표현되며,

$$\begin{aligned} H_0 : t &\sim N(0, \sigma^2 \|\mathbf{s}\|_2^2) \\ H_1 : t &\sim N(\|\mathbf{s}\|_2^2, \sigma^2 \|\mathbf{s}\|_2^2), \end{aligned} \quad (19)$$

이로부터 다음과 같이 P_{FA} 와 P_D 를 구할 수 있다.

$$P_{FA} = P(t > \gamma | H_0) = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma \|\mathbf{s}\|_2}\right), \quad (20)$$

$$P_D = P(t < \gamma | H_1) = Q\left(\frac{\gamma - \|\mathbf{s}\|_2^2}{\sigma \|\mathbf{s}\|_2}\right). \quad (21)$$

여기서 $Q(z) \triangleq \int_z^\infty \exp(-\frac{u^2}{2}) du$ 는 Q-function을 의미한다. 또한 $P_{FA} = \alpha$ 로 표현하면 $\gamma = \sigma \|\mathbf{s}\|_2 Q^{-1}(\alpha)$ 임을 알 수 있으며, 여기서 $Q^{-1}(\cdot)$ 은 $Q(\cdot)$ 의 역함수를 의미한다. 만약 신호 대잡음비 (Signal-to-Noise Ratio; SNR)를

$SNR \triangleq \frac{\|\mathbf{s}\|_2^2}{\sigma^2}$ 로 정의하면, 오경보 확률 P_{FA} 는 식 (22)

와 같이 표현된다.

$$P_{FA} = Q(Q^{-1}(\alpha) - \sqrt{SNR}). \quad (22)$$

2.2 압축 센싱 기반의 신호 검출 방법

압축 센싱을 이용한 신호 검출을 위해, 측정 벡터 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 를 기반으로 다음과 같이 가설 검정 문제를 새롭게 정의 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \widehat{H}_0: \mathbf{y} &= \mathbf{A}\mathbf{w} \\ \widehat{H}_1: \mathbf{y} &= \mathbf{A}(\mathbf{s} + \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 \mathbf{A} 는 RIP를 만족하는 측정 행렬이며 수신측에서 알고 있다고 가정한다. 이 때, 가설 \widehat{H}_0 와 \widehat{H}_1 을 기반으로 \mathbf{y} 를 위한 확률밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$f(\mathbf{y}|\widehat{H}_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\sigma^2 \mathbf{A}\mathbf{A}^T|^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\sigma^2 \mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{y}\right], \quad (24)$$

$$f(\mathbf{y}|\widehat{H}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\sigma^2 \mathbf{A}\mathbf{A}^T|^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s})^T (\sigma^2 \mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s})\right]. \quad (25)$$

더 나아가, 가설 \widehat{H}_0 와 \widehat{H}_1 를 이용하여 식 (13)의 우도 비검정 문제에 로그함수를 적용하면 식 (26)과 같고,

$$\begin{aligned} \ln L(\mathbf{y}) &= \mathbf{y}^T (\sigma^2 \mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s} \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{A}^T (\sigma^2 \mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s} \geq \ln(\tau), \end{aligned} \quad (26)$$

이 수식을 정리하면 식 (27)과 같이 표현된다.

$$\hat{t} \triangleq \mathbf{y} (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s} \geq \hat{\gamma}, \quad (27)$$

여기서 $\hat{\gamma} \triangleq \sigma^2 \ln(\tau) + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}$ 이다. 새롭

게 정의된 \hat{t} 을 이용한 \widehat{H}_0 와 \widehat{H}_1 의 확률밀도함수는 식 (28)과 같다.

$$\begin{aligned} \widehat{H}_0: \hat{t} &\sim N(0, \sigma^2 \mathbf{s}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}) \\ \widehat{H}_1: \hat{t} &\sim N(\mathbf{s}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}, \sigma^2 \mathbf{s}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (28)$$

따라서, 검출 확률 P_D 와 오경보 확률 P_{FA} 는 Q-function을 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$P_D = P(\hat{t} < \hat{\gamma} | \widehat{H}_1) = Q\left(\frac{\hat{\gamma} - \mathbf{s}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}}{\sigma [\mathbf{s}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}]^{\frac{1}{2}}}\right), \quad (29)$$

$$P_{FA} = P(\hat{t} < \hat{\gamma} | \widehat{H}_0) = Q\left(\frac{\hat{\gamma}}{\sigma [\mathbf{s}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}]^{\frac{1}{2}}}\right). \quad (30)$$

만약 $P_{FA} = \alpha$ 로 정의 한다면 $\hat{\gamma} = \sigma [\mathbf{s}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}]^{1/2} Q^{-1}(\alpha)$ 로 표현 할 수 있고, 다음과 같이 ROC (Receiver Operating Characteristic)를 위한 식을 구할 수 있다.

$$P_D(\alpha) = Q\left(Q^{-1}(\alpha) - \frac{[\mathbf{s}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}]^{1/2}}{\sigma}\right). \quad (31)$$

더 나아가, 만약 \mathbf{A} 가 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_m$ 을 만족하는 직교 행렬이라면 식 (27)은 다음과 같이 정리된다.

$$\hat{t} \triangleq \mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{s} \geq \hat{\gamma}. \quad (32)$$

특히 랜덤 행렬 \mathbf{A} 가 충분히 작은 ϵ 과 함께 RIP를 만족하는 경우와 같이 Isotropic 랜덤 측정 행렬이라면, $E(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \approx \mathbf{I}_m$ 으로 근사화 될 수 있다. 따라서, 식 (32)는 다음과 같이 간략화된다.

$$P_D(\alpha) = Q\left(Q^{-1}(\alpha) - \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{s}\|_2}{\sigma}\right). \quad (33)$$

또한 $\delta \in (0,1)$ 와 $\epsilon < \frac{\sqrt{12 \log(2/\delta)}}{m}$ 이 주어졌을 때

$$P\left(\left\|\mathbf{A}\mathbf{s}\right\|_2^2 - \sqrt{\frac{m}{n}}\left\|\mathbf{s}\right\|_2^2 \leq \epsilon \sqrt{\frac{m}{n}}\left\|\mathbf{s}\right\|_2^2 \geq 1 - \delta\right) \quad \text{이므로} \quad (38)$$

로^[7], 다음과 같이 압축 센싱을 통해 감지된 신호를 위한 최종적인 검출 확률 P_D 를 구할 수 있다.

$$P_D(\alpha) \approx Q\left(Q^{-1}(\alpha) - \sqrt{\frac{m}{n}}\sqrt{SNR}\right). \quad (34)$$

여기서 SNR은 $SNR = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2}{\sigma^2}$ 으로 정의된다.

III. 압축 센싱 기반의 신호 추정 기법

앞 절에서는 두 가지 가설로 이루어진 가설 검정 문제를 다루었으며, 본 절에서는 다중 가설의 경우로 문제를 확장한다. 실질적으로 이러한 종류의 문제들은 $S = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_S\}$ 에 속한 $|S|$ 개의 서로 다른 신호 \mathbf{s}_i ($i = 1, \dots, |S|$)를 구별하고자 할 때 발생한다. 다중 가설 검정 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \hat{H}_1: & \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{w}) \\ & \vdots \\ \hat{H}_{|S|}: & \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{s}_{|S|} + \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (35)$$

여기서 \mathbf{s}_i ($i = 1, \dots, |S|$)는 입력 신호이며, \mathbf{A} 는 $m \times n$ 측정 행렬, 그리고 $\mathbf{w} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ 는 잡음을 의미한다. 만일 각 가설들의 발생 확률이 동일하다면, 다중 가설 검정 문제는 식 (36)을 최소화 하는 \hat{H}_i 를 선택하는 문제로 볼 수 있다.

$$t_i \triangleq (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}_i)^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}_i). \quad (36)$$

특히 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 에 대해 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 로 가정하면, t_i 는 식 (37)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} t_i &= (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}_i)^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}_i) \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{s}_i)^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{s}_i) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{s}_i)^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{s}_i), \end{aligned} \quad (37)$$

여기서 $\Pi_{\mathbf{A}} \triangleq \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}$ 로 정의하면, 식 (38)과 같이 t_i 를 정리할 수 있다.

$$t_i = \|\Pi_{\mathbf{A}^T} \mathbf{x} - \Pi_{\mathbf{A}^T} \mathbf{s}_i\|_2^2. \quad (38)$$

하지만 일반적으로 이러한 다중 가설 검정 문제에 대한 오류 확률의 Closed Form을 구하는 것은 쉽지 않으며, 때로는 신호의 검출보다 측정된 데이터와 관련된 정보를 추정하는 것에 더 큰 관심이 있는 경우가 있다. 따라서, 본 절에서는 선형 측정된 \mathbf{y} 를 기반으로 미지의 파라미터 $\langle \mathbf{s}_i, \mathbf{x} \rangle$ 를 추정하는 기법에 대해 고려한다.

이를 위해 [7]에서는 잡음이 없는 환경에서 선형 측정된 \mathbf{y} 를 위한 추정기를 식 (39)와 같이 제안하였다.

$$q_i(\mathbf{y}) = \frac{n}{m} \langle \mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{s}_i \rangle, \quad i = 1, \dots, |I|. \quad (39)$$

이 때 \mathbf{A} 의 각 원소가 $a_{ij} \sim N\left(0, \frac{1}{m}\right)$ 을 만족하는 가우시안 행렬이라면, $\gamma > 0$ 인 조건 하에서 $1 - O(e^{-m})$ 보다 큰 확률로서 식 (40)을 만족한다.

$$\left| \frac{n}{m} \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{s}_i \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i \rangle \right| \leq \rho^* \frac{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{s}_i\|_2}{\sqrt{m}}, \quad (40)$$

여기서 $i = 1, \dots, |I|$ 이고 ρ^* 는 γ 에 의존하는 요소이다.

하지만, 본 논문에서는 다음과 같이 잡음을 포함한 측정 시스템을 고려한다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (41)$$

여기서 \mathbf{A} 는 측정 행렬, \mathbf{x} 는 추정될 파라미터, $\mathbf{n} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ 은 측정 잡음이다. 이 때, 수신 신호 \mathbf{y} 를 기반으로 파라미터 \mathbf{x} 를 추정하는 방법은 일반적으로 추정 오류를 위한 특정한 손실 함수를 정의하며, 이러한 손실 함수는 어떤 종류의 오류를 최소화 할지 구체화한다. 특히, 손실 함수가 자승 오차 또는 절대 오차의 최소화를 목표로 한다면 \mathbf{x} 를 추정하기 위해 MMSE (Minimum Mean Square Error) 추정기 혹은 MMAE (Minimum Mean-Absolute Error) 추정기를 고려할 수 있다^[6]. 한편, 앞서 언급한 손실 함수들은 모두 오류 관점에서 Convex Function을 형성하는 반면, Infinity Norm을 이루는 잡음과 같은 Notch 손실 함수는 Convex Function을 형성하지 않는다. 이러한 함수는 특정 임계값을 통해 모든 오류에 대해 동등하

게 페널티를 가하게 되며 이러한 방식을 MAP (Maximum a Posteriori) 추정기로 정의한다⁶⁾.

3.1 MMSE 추정기

본 논문에서는 식 (42)와 같이 $\hat{\mathbf{x}}_S$ 로 집합 S 에 제한된 최소 자승 추정 (Least Square Estimation)을 고려한다.

$$\hat{\mathbf{x}}_S = (\mathbf{A}_S^T \mathbf{A}_S)^{-1} \mathbf{A}_S^T \mathbf{y}. \quad (42)$$

이 때, $\hat{\mathbf{x}}_S$ 는 집합 S 밖에서 값을 갖지 않으므로 식 (43)과 같이 MMSE를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_S\|_2^2) &= E(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_S\|_2^2 + \sum_{i \notin S} |x_i|^2) \\ &= E(\|(\mathbf{A}_S^T \mathbf{A}_S)^{-1} \mathbf{A}_S^T \mathbf{u}\|_2^2 + \|(\mathbf{A}_S^T \mathbf{A}_S)^{-1} \mathbf{A}_S^T \mathbf{n}\|_2^2) \\ &= \|(\mathbf{A}_S^T \mathbf{A}_S)^{-1} \mathbf{A}_S^T \mathbf{u}\|_2^2 + \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{A}_S^T \mathbf{A}_S)^{-1} \mathbf{A}_S^T), \quad (43) \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{u} = \mathbf{A}_{S^c} \mathbf{x}_{S^c}$ 이다. 따라서 추정값은 식 (44)를 통해 얻을 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{MMSE} = \arg \min_{S \subset \{1, \dots, n\}} E(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_S\|_2^2). \quad (44)$$

한편, 추정값 $\hat{\mathbf{x}}$ 는 측정값 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{y}$ 에 기반한 선형 변환 행렬 \mathbf{G} 에 의해 추정될 수도 있다⁸⁾. 자승 오차 손실 함수를 위해서 $\hat{\mathbf{x}}_{MSE}(\mathbf{y})$ 는 $E\{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2\}$ 를 최소화한다. 따라서 MSE는 식 (45)와 같이 표현 할 수 있으며,

$$\begin{aligned} E\{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2\} &= E\{[(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{n}]^T [(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{n}]\} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A})^T (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A}) \mathbf{x} + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T), \quad (45) \end{aligned}$$

MMSE 해는 식 (46)과 같이 ℓ_1 -norm Regularization을 푸는 것에 의해 구할 수 있다.

$$\min_{\mathbf{G}\mathbf{x}} \{\mathbf{x}^T (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A})^T (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{A}) \mathbf{x} + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T) + \|\mathbf{x}\|_1\}. \quad (46)$$

3.2 MMAE 추정기

신호 $\mathbf{x} \sim f_X(\mathbf{x})$ 가 있다고 가정할 때, $\hat{\mathbf{x}}_{MMAE}(\mathbf{y})$ 는 식 (47)과 같은 목적 함수를 최소화한다.

$$\begin{aligned} E(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_1 | \mathbf{y}) &= \mathcal{J}(\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y}) \\ &= \int \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_1 f_{X|Y}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) d\mathbf{x}, \quad (47) \end{aligned}$$

여기서 $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - \hat{x}_i|$ 이다. 식 (47)을 기반으로 $\hat{\mathbf{x}}_{MMAE}(\mathbf{y}) = [\hat{x}_{1,MMAE} \cdots \hat{x}_{n,MMAE}]^T$ 를 얻기 위해 다음 식과 같이 J 에 편미분을 취하고 0과 같도록 수식화하며,

$$\left. \frac{dE(|\hat{x}_i - x_i| | y_i)}{d\hat{x}_i} \right|_{\hat{x}_i = \hat{x}_{i,MMAE}} = 0, \quad (48)$$

$E(|\hat{x}_i - x_i| | y_i) = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} P(|\hat{x}_i - x_i| > t | y_i) dt$ 를 활용하면 다음과 같이 $E(|\hat{x}_i - x_i| | y_i)$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E(|\hat{x}_i - x_i| | y_i) &= \int_0^\infty P(|\hat{x}_i - x_i| > t | y_i) dt \\ &= \int_0^\infty P(\hat{x}_i - x_i > t | y_i) dt \\ &\quad + \int_0^\infty P(\hat{x}_i - x_i < -t | y_i) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\hat{x}_i} P(x_i < t_1 | y_i) dt_1 \\ &\quad + \int_{\hat{x}_i}^\infty P(x_i > t_2 | y_i) dt_2, \quad (49) \end{aligned}$$

여기서 $t_1 = \hat{x}_i - t$ 이고 $t_2 = \hat{x}_i + t$ 이다. 이를 기반으로 식 (48)을 풀면 다음 식을 얻을 수 있으며,

$$P(x_i < \widehat{x}_{i,MMAE} | y_i) - P(x_i > \widehat{x}_{i,MMAE} | y_i) = 0, \quad (50)$$

식 (51)과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\hat{x}_{i,MMAE}} f_{X|Y_i}(x_i | y_i) dx_i &= \int_{\hat{x}_{i,MMAE}}^\infty f_{X|Y_i}(x_i | y_i) dx_i \\ &= \frac{1}{2} \quad (51) \end{aligned}$$

따라서, $\hat{x}_{i,MMAE}$ 는 조건부 확률밀도함수 $f_{X|Y_i}(x_i | y_i)$ 의 중앙값이다. 더 나아가, MMAE는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 & E[\hat{x}_{i,MMAE} - x_i | y_i] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{x}_{i,MMAE} - x_i] f_{X_i|Y_i}(x_i|y_i) dx_i \\
 &= \int_{-\infty}^{\hat{x}_{i,MMAE}} (\hat{x}_{i,MMAE} - x_i) f_{X_i|Y_i}(x_i|y_i) dx_i \\
 &\quad + \int_{\hat{x}_{i,MMAE}}^{\infty} (x_i - \hat{x}_{i,MMAE}) f_{X_i|Y_i}(x_i|y_i) dx_i \\
 &= \int_{-\infty}^{\hat{x}_{i,MMAE}} (-x_i) f_{X_i|Y_i}(x_i|y_i) dx_i \\
 &\quad + \int_{\hat{x}_{i,MMAE}}^{\infty} (x_i) f_{X_i|Y_i}(x_i|y_i) dx_i.
 \end{aligned}$$

또한 $e_i(f_{X_i}, \sigma^2) = E[|\hat{x}_{i,MMAE} - x_i|]$ 를 정의하고 \mathbf{x} 가 독립 항등 분포를 따른다고 가정하면, 추정값 $\hat{\mathbf{x}}$ 의 오류에 대한 평균은 $e(f_{\mathbf{X}}, \sigma^2) = n \cdot e_i(f_{X_i}, \sigma^2)$ 을 통해 구할 수 있다.

3.3 MAP 추정기

신호 $\mathbf{x} \sim f_X(\mathbf{x})$ 를 가정하고 측정 행렬 \mathbf{A} 가 $a_{ij} \sim N(0, \frac{1}{m})$ 와 같이 독립적으로 분포된 가우시안 원소로 구성될 때, 측정값 \mathbf{y} 에 대하여 \mathbf{x} 를 위한 MAP 추정기는 식 (52)를 통해 얻을 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{z}} f_X(\mathbf{z}) f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{z}). \quad (52)$$

여기서 $\mathbf{n} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ 임을 가정하므로, $f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{z})$ 는 식 (53)과 같다.

$$f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2^2\right\}. \quad (53)$$

더 나아가, 식 (53)을 식 (52)에 대입하고 로그함수를 취하면 식 (54)과 같이 정리할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\{-\ln f_X(\mathbf{z}) + \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2^2\right\}. \quad (54)$$

IV. 모의 실험 결과

본 절에서는 식 (34)를 기반으로 압축 센싱 기반의 신호 검출 성능에 대한 모의 실험 결과를 제시한다. 그림 1은 SNR이 25 dB일 때 다양한 압축률 m/n 에 따른 ROC 성능을 보여주며, 압축 센싱을 이용한 신호 검출 알고리즘은 압축률이 낮을수록 검출 확률이

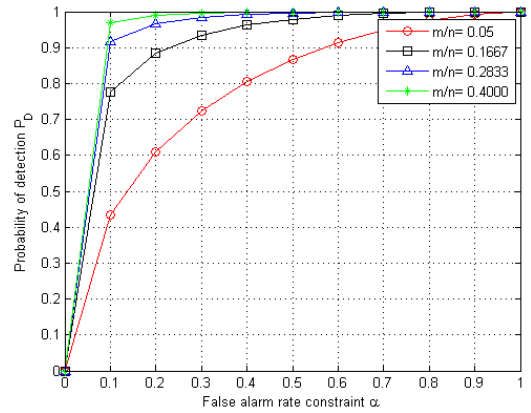


그림 1. SNR=25dB와 다양한 압축률 m/n 에 대해 오경보 확률 α 에 따른 검출 확률 $P_D(\alpha)$
 Fig. 1. $P_D(\alpha)$ versus α with SNR=25dB and various values of sparsity m/n

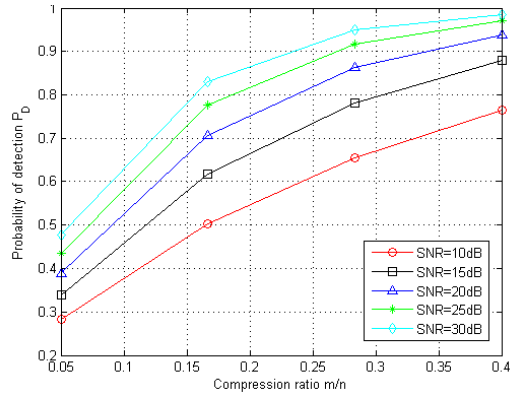


그림 2. $\alpha=0.1$ 와 다양한 SNR에 대해 압축률 m/n 에 따른 검출 확률 $P_D(\alpha)$
 Fig. 2. $P_D(\alpha)$ versus sparsity m/n with $\alpha=0.1$ and various values of SNR

좋아지는 것을 알 수 있다. 그림 2는 오경보 확률이 0.1일 때, 다양한 압축율과 SNR에 따른 검출 성능을 보여 준다. 실험 결과를 통해 압축율이 낮고 SNR이 커질수록 검출 확률이 높아지는 것을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 압축 센싱의 기본 이론을 제시하고, 이를 바탕으로 압축 센싱을 응용한 신호 검출과 추정 기법에 대해 제안하였다. 또한, 제안된 압축 센싱 기반의 신호 검출과 추정 기법을 통해 비교적 적은 수의 측정값으로도 신호의 효율적 추정이 가능함을 보였다.

References

- [1] D. L. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, Apr. 2006.
- [2] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 2, pp. 489-509, Feb. 2006.
- [3] S. Dasgupta and A. Gupta, *An elementary proof of the Johnson-Lindenstrauss lemma*, Tech. Rep. TR-99-006, Berkeley, USA, 1999.
- [4] P. Indyk, "Explicit constructions for compressed sensing matrices," in *Proc. ACM-SIAM SODA 2008*, pp. 30-33, San Francisco, USA, Jan. 2008.
- [5] E. Candes, "Compressive sampling," in *Proc. Int. Congress Math.*, vol. 3, pp. 1433-1452, Madrid, Spain, Aug. 2006.
- [6] B. C. Levy, *Principles of Signal Detection and Parameter Estimation*, Ch. 2, Springer Science & Business Media, 2008.
- [7] M. A. Davenport, P. T. Boufounos, M. B. Wakin, and R. G. Baraniuk, "Signal processing with compressive measurements," *IEEE J. Sel. Topics in Signal Proc.*, vol. 4, no. 2, pp. 445-460, Apr. 2010.
- [8] G. Reeves and D. Donoho, "The minimax noise sensitivity in compressed sensing," in *Proc. IEEE ISIT 2013*, pp. 116-120, Istanbul, Turkey, Jul. 2013.

응웬뚜랑녹 (Thu L. N. Nguyen)



2011년 : 베트남 HCMUS
Mathematics and Computer
Science 학사

2014년 2월 : 숭실대학교 정보
통신전자공학부 석사

2014년 3월~현재 : 숭실대학교
정보통신전자공학부 박사과정

<관심분야> Compressed Sensing, 무선측위

정홍규 (Honggyu Jung)

한국통신학회논문지 Vol. 38, No .9 참조

신요안 (Yoan Shin)

한국통신학회논문지 Vol. 34, No. 1 참조