

A Two Factor Model with Mean Reverting Process for Stochastic Mortality

Kangsoo Lee^a · Jae Hoon Jho^{b,1}

^aKorea Insurance Development Institute

^bSchool of International Economics and Business, Yeungnam University

(Received January 14, 2015; Revised March 9, 2015; Accepted April 28, 2015)

Abstract

We examine how to model mortality risk using the adaptation of the mean-reverting processes for the two factor model proposed by Cairns *et al.* (2006b). Mortality improvements have been recently observed in some countries such as United Kingdom; therefore, we assume long-run mortality converges towards a trend at some unknown time and the mean-reverting processes could therefore be an appropriate stochastic model. We estimate the parameters of the two-factor model incorporated with mean-reverting processes by a Metropolis-Hastings algorithm to fit United Kingdom mortality data from 1991 to 2015. We forecast the evolution of the mortality from 2014 to 2040 based on the estimation results in order to evaluate the issue price of a longevity bond of 25 years maturity. As an application, we propose a method to quantify the speed of mortality improvement by the average mean reverting times of the processes.

Keywords: two factor mortality model, mean reverting stochastic process, mortality improvement, Metropolis algorithm, longevity bond

1. 서론

대한민국의 고령화 속도는 전 세계에서 가장 빨라 앞으로 9년 후인 2024년에 전체 인구대비 65세 이상 인구비율이 20%를 초과하는 초고령사회에 진입할 것으로 예상된다. 이러한 급격한 인구구조 고령화는 세계 최저 수준의 출산율(합계출산율 가입여성 1명당 1.1873명)이 지속되고 있는 것이 1차적인 원인이거나 의학발달과 생활수준의 향상으로 사망률이 급격히 떨어지고 있는 것 또한 중요한 원인이다. 사망률의 급격한 감소는 미래 인구추계를 바탕으로 한 다양한 정부정책 수립에도 영향을 미칠 뿐만 아니라 미래 사망률 변화에 따라 그 가치가 변동하는 다양한 금융제도(국민연금, 특수직역연금, 민영보험사의 중신연금상품, 장수채권 등)에 직접적인 영향을 미치기에 그 중요성이 강조되면서 최근 관련 연구가 활발히 진행 중이다. 보험리스크관리 측면에서는 국내 생명보험회사 및 연금사업자에게 노출되는 거대사망 위험과 장수위험을 반영한 사망률 모형의 중요성에 대한 연구가 진행되었고 장수채권과 생존채권으로 대표되는 신종 유동화증권시장의 리스크관리 방향성 또한 논의되었다 (Sung과 Shin, 2007).

대부분의 확률적 사망률모형은 사망률 개선효과가 미래에도 장기간 지속될 것이라 가정하고 있는데 이러한 사망률 개선의 선형적 모형은 인간 수명의 유한성을 고려했을 때 부정확한 미래 예측의 결과를

¹Corresponding author: School of International Economics and Business, Yeungnam University, 280 Daehak-Ro, Gyeongsan, Gyeongbuk 712-749, Korea. E-mail: jaehoonjho@yu.ac.kr

초래할 수 있다. 본 연구에서는 확률론적 사망률 모형으로서 Cairns 등 (2006b)의 2요인(two factor) 모형을 바탕으로 사망률 개선이 시계열 상에서 일정한 수준에 수렴한다는 가정 하에 평균회귀확률과정(mean-reverting stochastic process)을 적용하여 미래 사망률 예측, 사망률 개선 속도 측정, 그리고 사망률 연계 파생상품인 장수채권의 가격결정을 시도하였다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 제1장의 서론에 이어, 제2장에서는 사망률 예측 모형과 관련된 기존 연구와 동 연구에서 사용하는 2요인 모형을 소개하였다. 제3장에는 2요인의 확률적 변동을 평균회귀 확률과정으로 모형화 하였으며, 제4장에서 메트로폴리스-최대우도추정 혼합기법을 활용한 모수추정 방법을 소개하고 영국의 사망률 자료를 이용한 모수추정과 시뮬레이션을 통한 향후 예측값을 제시하였다. 제5장에서는 동 모형을 활용한 응용으로서 사망률 개선속도 측정과 사망률 연계 파생상품인 장수채권의 가격결정 방법을 다루었다.

2. 2요인 사망률 모형

최근 여러 국가에서 사망률 개선 현상이 실증자료 분석을 통해 확인되고 있으며 사망률 개선의 속도가 다양하게 나타나고 있는 상황에서 확률적 사망률 예측 모형이 주목을 받고 있다. 최근까지 다양한 확률과정 사망률 모형이 연구되어 왔으며 그 중 Lee와 Carter (1992)와 이의 개선된 형태를 제시한 Renshaw-Haberman (1996), Currie (2006), HP8(Heligman과 Pollard 8 parameter) 그리고 Cairns 등 (2006b)의 연구가 대표적이다. Lee-Carter 모형은 로그사망률을 연령효과와 기간효과를 가진 2개의 위험요소의 함수로 표현한 모형이며, Renshaw-Haberman 모형은 Lee-Carter 모형에 출생연도별 사망률 차이를 반영한 코호트 확장모형이다. Currie 모형은 추정편의를 위해 Renshaw-Haberman 모형에 기간효과계수와 코호트계수를 특정 상수로 설정한 후 P-spline 기법을 이용하여 평활화한 모형이다. 또한 상기 모형과는 다른 관점에서 사망률 예측에 접근한 HP8 모형은 유아연령층의 사망률 감소, 청년층의 상해로 인한 사망률 증가, 그리고 노년층의 급격한 사망률 증가 등 전체 연령에서 나타나는 사망률 변동을 8가지 요인으로 설명하였다. Cairns 등 (2006b)가 제시한 2요인 사망률 모형은 아래와 같이 기간관련 요인 2개를 이용하여 특정 연령 x 가 일정한 시간 이내에 사망하는 확률을 추정하는 모형이다.

$$\bar{q}(t, x) = \frac{e^{A_{t+1}^{(1)} + A_{t+1}^{(2)}(x+t)}}{1 + e^{A_{t+1}^{(1)} + A_{t+1}^{(2)}(x+t)}}. \quad (2.1)$$

위의 모형에서 $A_t^{(1)}$ 는 전 연령에 동일한 영향을 미치는 요인이며 $A_t^{(2)}$ 는 연령 x 에 따라 서로 다른 영향을 미치는 기간요인으로 사망률의 기간관련 2요인(two factor)이라 불린다. $A_t^{(1)}$ 은 전반적인 사망률 개선효과를, 그리고 $A_t^{(2)}$ 는 사망률 개선이 고연령보다 저연령에서 상대적으로 큰 정도를 나타내는데 그림 2.1은 영국의 1990년 2015년 기간 동안 고연령을 대상으로 각 연도별($t = 1991, \dots, 2015$)로 아래와 같이 로짓변환된 사망률에 대하여 최소자승법을 이용한 추정값을 보여주고 있다.

$$\log\left(\frac{q_y}{1 - q_y}\right) = A^{(1)} + A^{(2)}y + \epsilon, \quad (\text{단, } y \text{는 } 60 \sim 89 \text{세 사이의 연령}). \quad (2.2)$$

Figure 2.1 좌측 $A_t^{(1)}$ 의 음의 값과 하향 추세는 전 연령구간에서 사망률이 감소하고 또한 그 감소폭이 기간경과에 따라 점점 커져 사망률 개선이 이루어지고 있음을 보여주고 있으며, 우측 $A_t^{(2)}$ 의 양의 값은 연령과 곱해져 저연령 보다 고연령에서 사망률이 높게 산출되고 이에 따라 저연령의 사망률 개선이 고연령 보다 높게 나타나게 된다. 2요인 사망률 모형은 이후 다양한 수정 모형이 제시되었는데 기존 모형에 코호트효과를 반영한 모형, 연령관련 효과에 이차항을 추가한 모형, 그리고 특정 코호트 효과가 시간변화에 따라 일정하지 않고 감소하는 것을 반영한 모형 등으로 발전하였다 (Cairns 등, 2009). 하지만 모든 모형에서 사망률 개선은 시간의 경과에 따라 지속적으로 이루어짐을 가정하고 있다.

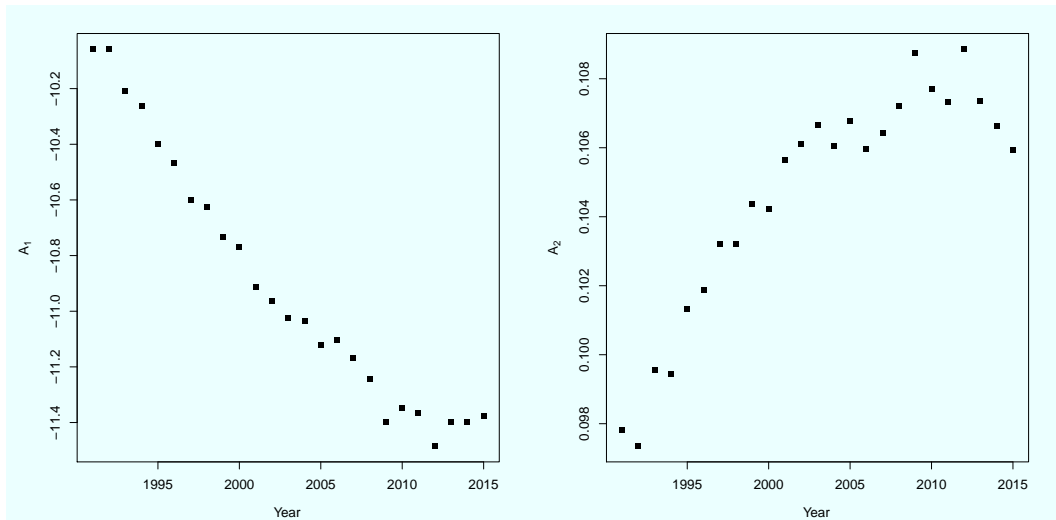


Figure 2.1. Estimated values of $A_t = (A_t^{(1)}, A_t^{(2)})$ from 1991 to 2015 for England and Wales males under two factor model of Cairns *et al.* (2006b).

3. 2요인 평균회귀 확률과정

Cairns 등 (2006b)가 제시한 2요인 사망률 모형은 고연령을 대상으로 $A_t = (A_t^{(1)}, A_t^{(2)})$ 의 확률론적 변동을 아래와 같이 일정한 추세를 지닌 이차원 정규확률보행으로 모형화 하였다.

$$A_{t+1} - A_t = \mu + CZ_{t+1}, \quad Z_{t+1} \sim MVN(0, \Sigma). \tag{3.1}$$

이러한 모형은 시간의 경과에 따라 선형 추세 만큼의 사망률의 개선이 지속적으로 이루어진다는 가정이다. 실제로 Figure 2.1의 좌측은 영국의 사망률 자료를 이용한 $A^{(1)}$ 의 연도별 추세를 보여주고 있는데 시간경과에 따라 $A^{(1)}$ 의 값이 하락하고 있음을 확인할 수 있다. 하지만 미래에도 과거와 같은 속도로 사망률 개선이 지속되리라 희망하기에는 매우 회의적이다. 일례로 영국 통계청에서 발간한 UK office for National Statistics (2013a, 2013b) 보고서에 의하면 미래 사망률 예측 시 연평균 사망률 개선율이 최근 40년간 평균 2% 수준에서 2037년까지 1.2% 수준으로 점차 감소함을 가정하였다. 이는 과거의 높은 사망률 개선이 미래에 영원히 지속되지 않을 수 있음을 반영한 것으로서 의학기술의 발전에도 불구하고 건강에 악영향을 미치는 생활습관과 항생제내성 세균의 유행 등을 예로 들고 있다. Figure 3.1은 영국 통계청에서 예측한 2062년 까지의 주요 고연령의 사망률 값을 보여주고 있는데 이는 과거의 선형추세와 다른 것을 확인할 수 있다.

선형추세 모형은 또한 생물학적으로 비정상적인 문제를 초래할 수 있다. 즉 지속적으로 하락하는 $A^{(1)}$ 으로 인해 먼 미래에는 음수의 사망률이 발생할 수 있으며 지속적으로 상승하는 $A^{(2)}$ 값 역시 저연령과 고연령 간의 사망률 차이를 무한히 늘려나간다. Plat (2009)은 2요인 모형의 개선모형에 $A^{(2)}$ 값 추정시 평균회귀 하는 속성을 반영하였다. 인간의 수명이 유한함을 감안하고, 과학기술 등을 이용한 수명연장의 한계가 존재함을 받아들인다면, 장기간의 사망률 예측시 지속적인 사망률 개선을 가정한 모형(특히 $A^{(1)}$)은 부적절 할 수 있으며 기존 모형 보다 유연한 모형이 개발되어야 한다. 이 때, 새로운 모형은 두 가지 관점에서 기존 모형의 단점을 보완할 수 있어야 한다. 첫 번째는 사망률 개선이 궁극적으로 사라져야 하며, 두 번째는 그 한계에 다다른 시점이 관측 가능해야 한다. 본 연구에서는 이러한 개

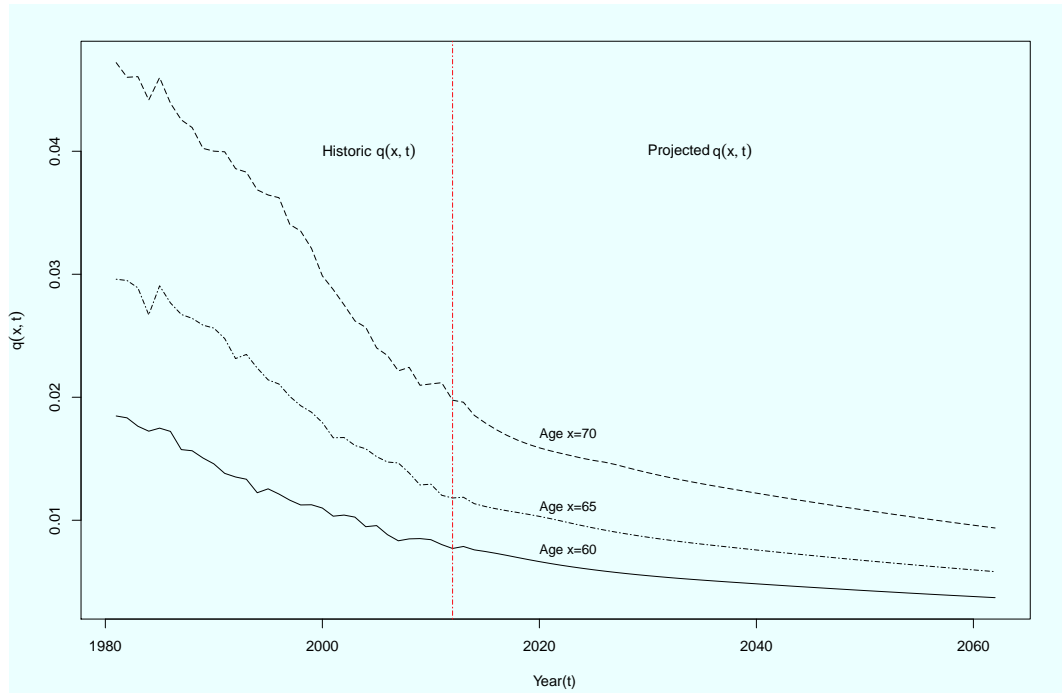


Figure 3.1. Historic mortality rates from 1980 to 2012 and projected mortality rates from 2013 to 2062 for England and Wales males by UK Office for National Statistics.

선 모형으로서 식 (2.1)의 2요인 $A_t = (A_t^{(1)}, A_t^{(2)})$ 에 대하여 아래와 같은 평균회귀확률과정을 고려하였다.

$$A_{t+1} - A_t = \lambda(\mu - A_t) + CZ_{t+1}. \quad (3.2)$$

이 때, Z_{t+1} 은 이항표준정규분포이며, C 는 (2×2) 행렬로서 확률변수벡터 CZ_{t+1} 은 공분산행렬 $\Sigma = CC'$ 를 갖는다. 각각의 벡터를 구성원소로 표시하면 아래와 같다.

$$A_t = \begin{pmatrix} A_t^{(1)} \\ A_t^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

μ 는 사망률 개선이 더 이상 이루어지지 않는 인간 수명의 생물학적 한계가 반영된 장기평균으로, μ_1 은 전체 연령에 영향을 미치는 사망률 개선의 수렴수준, μ_2 는 연령별 사망률 개선의 수렴수준을 나타낸다. λ 는 각각 장기평균인 μ 로 수렴하는 속도를 의미하며 모형에서는 λ_1 과 λ_2 간의 상관관계가 없음을 가정하였다.

평균회귀확률과정 사망률 모형은 사망률 개선의 둔화를 설명하는 큰 장점이 있음에도 불구하고 최근까지 예측모형으로서 주목을 받지 못하였다. Cairns 등 (2006a)은 사망률 모형이 갖추어야 할 좋은 성질을 열거하면서 평균회귀확률과정의 단점을 지적하였는데, 사망률이 크게 개선된 직후 평균회귀성질에 의해 추후 사망률이 악화되는 ‘사망률보상’ 현상이 현실과 잘 부합되지 않음을 주로 언급하였다. 그러나 본 연구는 사망률 $q(t, x)$ 가 평균회귀확률과정을 따르는 모형과는 다르며, 사망률을 구성하는 2요인 $A_t^{(1)}, A_t^{(2)}$ 를 평균회귀확률과정으로 구현한 점에서 차별화 될 수 있다. 특히, 본 연구의 모수추정 결과에 따르면 2요인 $A_t^{(1)}, A_t^{(2)}$ 가 회귀수렴평균값에 도달하기까지는 매우 오랜 시간의 경과가 필요하여 사망

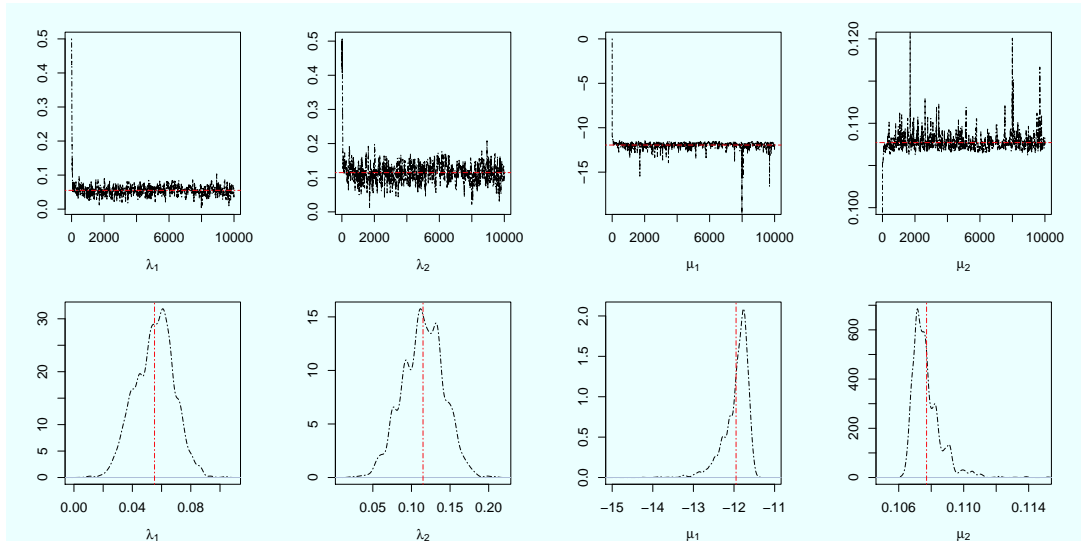


Figure 4.1. Top panel: multiple chain trace plots for $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ from 1991 to 2015 for England and Wales males mortality. Bottom panel: posterior density plots for $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ from 1991 to 2015 for England and Wales males mortality. (2013~2015 mortalities are based on the principal estimate by UK office for National Statistics.).

Table 4.1. Estimated posterior summary statistics from 1991 to 2015 for England and Wales males mortality

모수	평균	표준편차	5%백분위수	95%백분위수
λ_1	0.05597	0.01457	0.03246	0.08019
λ_2	0.11666	0.02907	0.07135	0.16550
μ_1	-11.9475	0.38811	-12.5705	-11.5650
μ_2	0.10769	0.00094	0.10662	0.10932
v_{11}	0.003484	0.000072	0.0034304	0.003626
v_{12}	-0.0000512	0.000001	-0.0000533	-0.0000505
v_{22}	0.000000795	0.000155	0.000000783	0.000000826

률이 개선되면 다시 악화되는 사망률보상 현상은 60년 이상의 시간이 지난 후에 나타날 것으로 예상되었다. 이러한 관점에서 2요인 평균회귀확률과정 사망률 모형은 기존의 선형모형이 설명하지 못하는 최근의 사망률 개선현상을 보완해줄 수 있으며, 단점으로 지적된 사망률 보상의 문제점은 이론적으로 존재하지만 향후 60년간 현실에서는 경험되지 않을 것으로 판단된다.

4. 모수 추정

베이저언 추정법으로 깁스샘플링(Gibbs Sampling)이 효율적인 기법으로 잘 알려져 있으나 추정대상 모수의 조건부확률밀도함수를 유도하기 어려운 경우 메트로폴리스-헤이스팅스(Metropolis-Hastings) 알고리즘이 그 대안으로 선택될 수 있다. 두 기법은 장단점을 내포하고 있으며 두 가지의 혼합기법으로 장점을 취하여 효율적인 추정알고리즘을 설계할 수 있다. 조건부확률밀도함수의 유도가 가능한 모수에 대하여 깁스샘플링 기법을 적용하고 그 외 모수에 대하여 메트로폴리스-헤이스팅스 기법을 적용하여 상대적으로 빠른 시뮬레이션을 통해 모수추정이 가능하다. 본 연구에서도 Cheon과 Lee (2012)과 Lynch (2007)을 참조하여 이러한 혼합기법을 사용하였다.

Table 4.2. Covariance estimates of mean-reverting two-factor model and Cairns *et al.* (2006b) two-factor model from 1991 to 2015 for England and Wales males mortality

모수	평균회귀모형 Σ 추정값	CBD 선형모형 Σ 추정값
v_{11}	0.003484	0.004235
v_{12}	-0.0000512	-0.0000628
v_{22}	0.000000795	0.000000977

n 개년 간의 과거 영국 사망률 자료를 이용하여 계산된 $\{A_t = (A_t^{(1)}, A_t^{(2)}); t = 1, 2, \dots, n\}$ 에 대하여 식 (3.2)와 같은 평균회귀 확률과정 모형을 고려할 때 추정 대상 모수는 (λ, μ, Σ) 이다. 식 (3.2)는 모형의 모수에 λ 가 포함되어 있어 Cairns 등 (2006b)의 기존 모형처럼 일반적인 최대우도 추정법을 적용하기 쉽지 않으나, 고정된 λ 값에 대한 조건부 모수추정은 가능하다. 즉, λ 가 상수로 주어진 경우, 시계열자료의 증감분을 다음과 같이 정의하면,

$$\Delta_\lambda A_{t+1} := A_{t+1} - (I - \lambda)A_t. \tag{4.1}$$

식 (3.2)에 의하여 $\Delta_\lambda A_{t+1}$ 는 다음과 같이 이항정규분포를 따르게 되므로

$$\Delta_\lambda A_{t+1} \sim MVN(\lambda\mu, \Sigma). \tag{4.2}$$

최대우도 모수추정방법으로 나머지 모수 μ 와 λ 를 쉽게 추정할 수 있다.

$$(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}) = \operatorname{argmax}_{(\mu, \Sigma)} L(\lambda\mu, \Sigma; A_1, \dots, A_n, \lambda). \tag{4.3}$$

모수 λ 의 추정은 확률보행 메트로폴리스 알고리즘을 이용하여 λ 의 사후분포를 찾을 수 있기에 사후분포평균을 추정값으로 선택할 수 있다. 또한, λ 의 사후분포 생성값에 대응하는 이항정규분포 최대우도 추정치를 식 (3.2)의 관계에서 계산함으로써 λ 와 Σ 의 사후분포를 얻을 수 있다. 이와 같은 메트로폴리스-최대우도추정 혼합기법의 단계별 알고리즘을 요약하면 다음과 같다.

- 1단계: 초기값 $\lambda^{(0)}$ 를 선택하고 $\{\lambda = \lambda^{(0)}\}$, 조건부 최대우도추정치 $\hat{\mu}^{(0)}, \hat{\Sigma}^{(0)}$ 계산.
- 2단계: 후보자 생성. $\lambda^{(c)} \leftarrow \lambda^{(i)} + \epsilon$, 이 때 ϵ 은 독립인 이항정규분포를 따름.
- 3단계: 로그우도함수의 비교를 통해 후보자 $\lambda^{(c)}$ 를 $\lambda^{(i+1)}$ 로 채택 또는 기각. 균일분포 무작위 생성값 $u \sim U(0, 1)$ 에 대하여

$$\begin{cases} \lambda^{(i+1)} = \lambda^{(c)}, & L(\lambda^{(c)}\mu^{(c)}, \Sigma^{(c)}; A_1, \dots, \lambda^{(c)}) - L(\lambda^{(i)}\mu^{(i)}, \Sigma^{(i)}; A_1, \dots, \lambda^{(i)}) > u \text{인 경우,} \\ \lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)}, & \text{그 외의 경우.} \end{cases}$$

- 4단계: 1단계~3단계를 충분히 m 번 반복하여 생성된 $\{\lambda^{(i)}, \mu^{(i)}, \Sigma^{(i)}; i = 0, 1, \dots, m\}$ 를 이용하여 각 모수의 사후분포 평균을 계산.

메트로폴리스-최대우도 혼합방식으로 생성된 평균회귀 확률과정 모형의 모수들을 10,000번 시뮬레이션 하여 생성값들을 얻었으며 이 때 설정한 시뮬레이션 모수 초기값들은 아래와 같이 설정하였다.

$$\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = 0.5, \quad \epsilon \sim MVN(0, V), \quad V = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad c = 0.001. \tag{4.4}$$

Figure 4.1의 상단 그래프들은 모수 시뮬레이션 생성값의 결과로서 초기값의 설정과 독립적으로 일정한 값으로 수렴함을 알 수 있으며, 시뮬레이션 생성값의 채택율은 13.6%이다. 식 (4.4)의 c 값을 감소시키

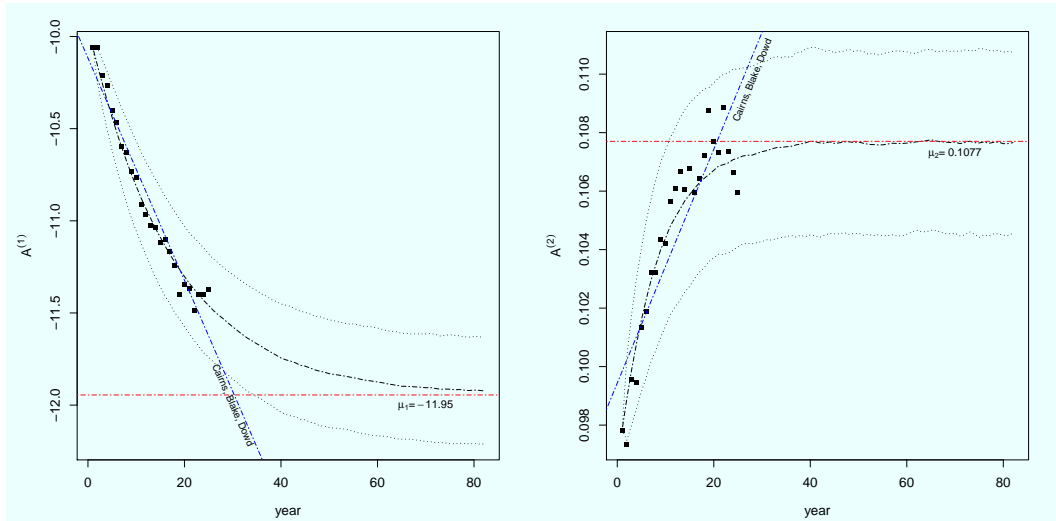


Figure 4.2. Fitted values of mean-reverting $A^{(1)}, A^{(2)}$ under the posterior means, $\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\Sigma}, \hat{\rho}$ (solid curve: expected value, dotted curves: 95% confidence interval) and fitted values of $A^{(1)}, A^{(2)}$ under CBD model (straight line) and historic values of $A^{(1)}, A^{(2)}$ (points).

면 정규확률보행의 폭이 좁아지므로 채택율을 높일 수 있다. 또한, 처음 2,000개(총 생성값의 1/5에 해당)의 생성값은 초기값의 임의적 선택 영향을 배제하기 위하여 제외하였다(2,000 burn-in). Figure 4.1의 하단 그래프는 10,000개의 생성값 중 처음 2,000개를 제외한 생성값의 사후밀도함수 그래프이며 각각의 그래프에 나타나는 수직선은 사후분포의 평균으로서 2요인 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 평균회귀 확률과정 모형의 추정모수로서 사용하였다. Table 4.1은 처음 2,000개를 제외한 시뮬레이션 생성값 8,000개의 요약통계이다.

Table 4.2는 2요인의 확률과정이 평균회귀모형일 경우 공분산 추정값과 Cairns 등 (2006b) 선형모형의 공분산 추정값을 보여주고 있다. 공분산 Σ 는 선형모형일 경우 변동성이 약간 커졌을 뿐 두 방법 모두 매우 작은 수준임을 알 수 있는데 이는 재난적 사고 또는 획기적인 신의학기술 발달 등과 같이 특별한 사건이 없는 한 매년 크게 변동하지 않는 고연령의 사망률 특성이 반영된 것으로 보인다.

2요인 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 의 평균회귀 모형이 실제 관측치와 적절히 부합하는지 알아보기 위하여 Table 4.1의 추정결과를 대입한 아래의 추정모형으로

$$\begin{pmatrix} A_{t+1}^{(1)} - A_t^{(1)} \\ A_{t+1}^{(2)} - A_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 - A_t^{(1)} \\ \hat{\mu}_2 - A_t^{(2)} \end{pmatrix} + \hat{C}Z_{t+1}, \quad \hat{C}Z_{t+1} \sim MVN(0, \hat{\Sigma}). \quad (4.5)$$

1991년~2060년 기간 동안의 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 값을 1000번 시뮬레이션 생성하였으며 그 결과를 Figure 4.2에 보여주었다. 의료기술의 발전이나 적극적인 건강관리에 의해 꾸준히 개선되어왔던 사망률이 2012년 이후부터 그 개선의 속도가 둔감해질 것으로 예상할 때 평균회귀 모형은 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 값이 궁극적으로 수렴하여 사망률의 개선 효과가 사라질 것임을 의미한다. Figure 4.2의 선형 증가 또는 감소하는 직선은 Cairns 등 (2006b)의 선형모형을 활용하여 계산한 값으로 그림과 같이 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 가 지속적으로 선형증가 또는 감소하기 때문에 장기간의 사망률 예측모형으로는 적합하지 않은 것으로 판단되며 이러한 관점에서 평균회귀 모형은 사망률개선의 속도가 감소하는 현상이 발견된 집단(국가, 사회)의 장기간 사망률 예측방법으로 사용되어 단기간 예측 기법을 보완하는 기능을 수행 할 수 있을 것이다. Figure 4.3은 추

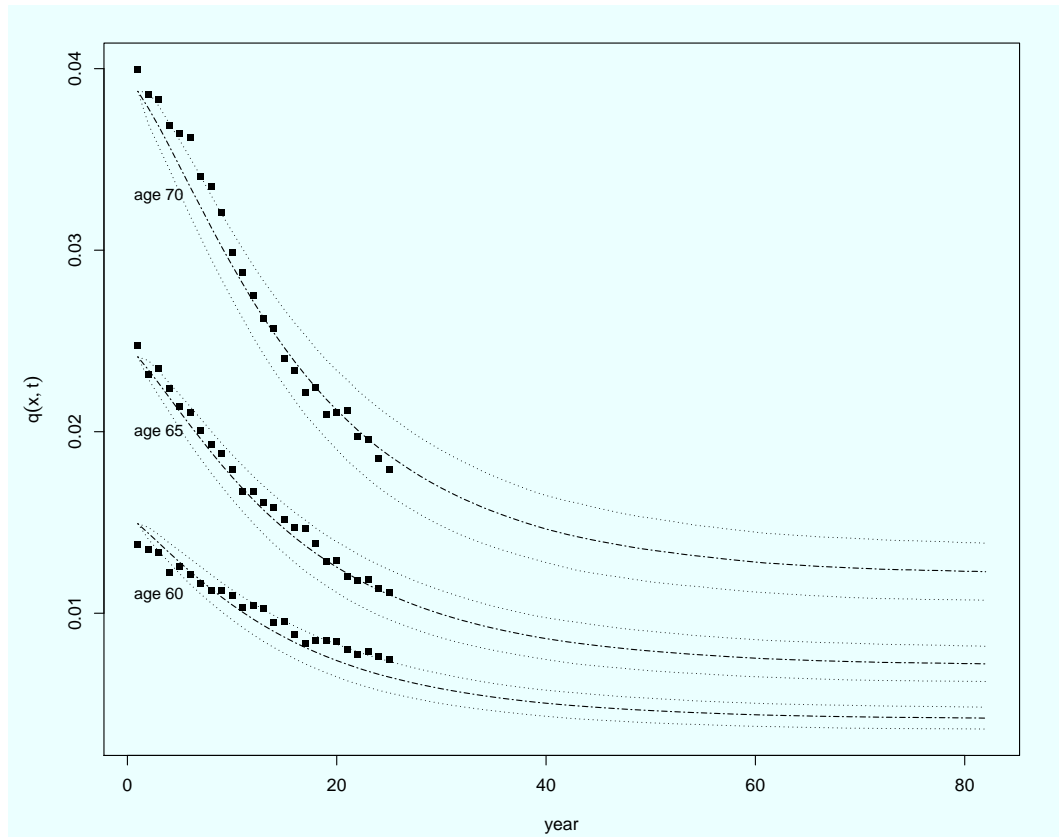


Figure 4.3. Mortality rates prediction from 1991 to 2072, $q(t, x)$, $t = 1991, \dots, 2072$ (solid curve: expected value, dotted curves: 95% confidence interval) and historic mortality rates from 1980 to 2012 for England and Wales males(points).

정된 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 를 이용하여 주요 연령별 사망률 예측값 $\hat{q}(t, x)$ 를 1991년~2072년 기간 동안 계산한 결과이다.

5. 2요인 평균회귀 모형의 응용

5.1. 사망률 개선의 척도

평균회귀 모형은 사망률의 예측을 위한 도구일뿐만 아니라 시간에 따라 변하는 사망률 개선의 정도를 측정하는 방법을 제공한다. 이 연구에서 2요인 모형의 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 가 사망률을 결정하는 인수이므로, $A^{(1)}, A^{(2)}$ 가 일정기간에 감소 또는 증가하는 정도를 측정할 필요가 있다. 평균회귀 모형의 (λ_1, λ_2) 는 극한 수렴값 (μ_1, μ_2) 로 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 확률과정이 얼마나 빨리 수렴하는가를 나타내기 때문에 사망률 개선 척도로서 적절한 선택으로 판단된다. 예를 들어 1991년~2000년 10년간 영국 사망률 자료에 의한 추정값은 $(\lambda_1, \lambda_2)_{1991}^{2000} = (0.1160, 0.2211)$ 이고 2001년~2010년 10년간 자료에 의한 추정값은 $(\lambda_1, \lambda_2)_{2001}^{2010} = (0.0817, 0.2083)$ 로서 서로 다른 시점의 10년 기간 동안의 사망률 개선이 측정의 시기(이 경우에 측정시기는 2000년과 2010년)에 따라서 달라지는 것을 알 수 있다. Figure 5.1은 $(1981 + k)$ 년~ $(1990 + k)$ 년

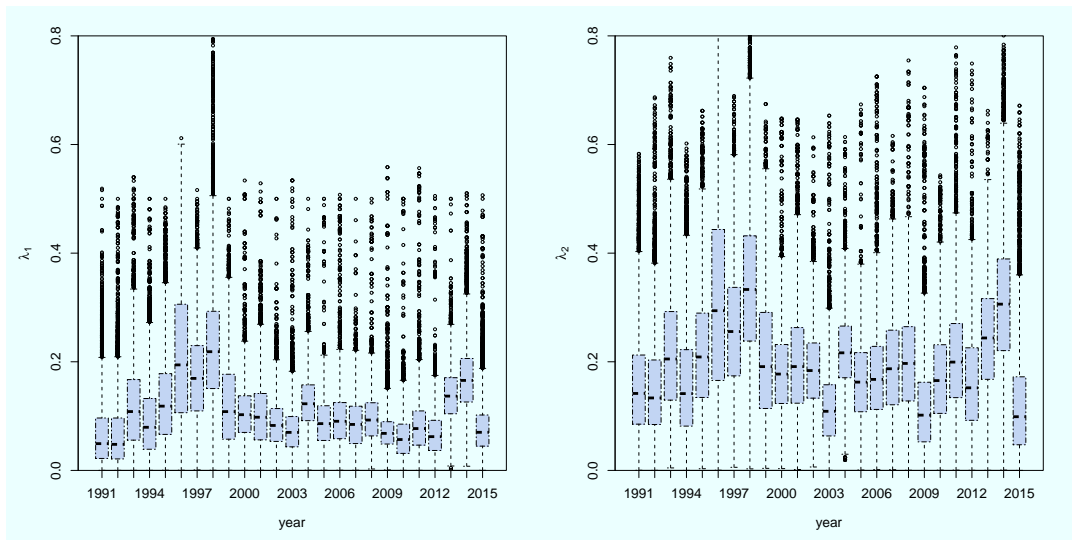


Figure 5.1. Box-whisker plots of λ_1 and λ_2 at each year of $(1981 + k)$ based on 10-year mortality data from $(1981 + k)$ to $(1990 + k)$, $k = 1, 2, \dots, 25$.

의 각각의 10년 동안의 자료에서 λ 를 각각 추정하여($k = 1, 2, \dots, 25$) 계산한 결과를 보여준 그래프이다. Figure 5.1의 왼쪽 그래프를 살펴보면 1991년~2000년의 결과와 2001년~2012년 사이의 추정결과가 상이함을 알 수 있다. 이것은 일반적 사망률 개선을 나타내는 $A^{(1)}$ 이 과거에 비해 최근 그 감소효과가 둔해졌음을 의미한다. 다만, 상대적 저연령의 사망률개선효과를 나타내는 $A^{(2)}$ 는 이 연구의 분석결과로서 시간에 따른 특징적인 형태를 발견할 수 없었다. 분석 결과를 요약하면 영국의 사망률 개선 효과를 2요인 평균회귀 확률과정의 λ 로 측정하면 과거에 비해 최근의 일반적 사망률 개선 속도가 느려지고 있음을 알 수 있다.

어떤 사회가 시계열상에서 변동하는 사망률 개선 속도를 갖는다는 점은 여러 면에서 중요한 요소이다. 예를 들어 미래의 사망률 예측을 바탕으로 산출되는 위험연계증권의 하나인 장수채권은 만기가 매우 길어 사망률 모형의 선택에 의해 가격산출결과가 다르게 나타날 수 있다. 사망률 개선 속도를 계량화할 수 있으면 적절한 모형 선택의 기준을 제시할 수 있을 것이다.

5.2. 장수채권가격산출

최근 보험사 혹은 재보험사의 보유 위험과 연계된 신종 파생상품인 위험연계증권(risk linked security) 개발 논의가 활발하다. 위험연계증권은 보험사가 태풍과 같은 자연재해 및 기타 손실발생 위험을 자본시장으로 전가하기 위해 개발된 상품으로 거대재해 발생에 따라 지급조건이 변동하는 대재해채권(catastrophe bond)이 가장 대표적인 위험연계증권 (Cummins, 2008)이며 최근에는 특정집단의 사망률에 따라 수익구조가 변동하는 장수스왑(longevity swap), 장수채권(longevity bond)과 같은 위험연계증권도 개발되고 있다.

이 중 장수채권은 일반적으로 연금가입자가 예상보다 오랜 기간 생존함에 따라 발생하게 되는 연금사업자의 장수리스크를 자본시장으로 이전하는 상품으로 채권금리가 생존율에 비례하도록 설계되어 장수채권에 투자한 연금사업자는 연금가입자의 생존율 상승 시 연금지급 부담을 상승된 금리로 일정 부분 상쇄

Table 5.1. 25-year period survival indexes of England and Wales male of age 65 at the year 2015 and the longevity bond price, where the present value factor and risk premium are assumed as $P(0, T) = 1.04^{-T}$, $\delta = 0.2\%$

T	$P(0, T)$	$E[S(T)]$	만기 T 년의 $V(0)$
1	0.9615	0.9878	0.9517
2	0.9246	0.9747	1.8565
3	0.8890	0.9605	2.7155
4	0.8548	0.9453	3.5300
5	0.8219	0.9289	4.3012
6	0.7903	0.9113	5.0301
7	0.7599	0.8924	5.7178
8	0.7307	0.8721	6.3653
9	0.7026	0.8504	6.9736
10	0.6756	0.8272	7.5438
11	0.6496	0.8025	8.0767
12	0.6246	0.7761	8.5732
13	0.6006	0.7481	9.0344
14	0.5775	0.7185	9.4611
15	0.5553	0.6872	9.8543
16	0.5339	0.6544	10.2150
17	0.5134	0.6200	10.5444
18	0.4936	0.5842	10.8433
19	0.4746	0.5472	11.1130
20	0.4564	0.5090	11.3548
21	0.4388	0.4699	11.5699
22	0.4220	0.4302	11.7596
23	0.4057	0.3903	11.9254
24	0.3901	0.3505	12.0688
25	0.3751	0.3112	12.1916

할 수 있다. 예를 들어 연금계약을 보유한 보험회사는 향후 피보험자의 생존율이 예상보다 높아져 연금 지급의 기간이 증가함에 따라 손해액이 증가하는 위험을 분산시키는 방안을 고려할 것이다. 이때 보험회사는 피보험자의 생존율이 높아지면 장수채권의 이자지급액이 비례적으로 증가하는 장수채권에 투자하여 연금지급액 증가로 인한 손해액을 증가된 이자지급액을 재원으로 충당할 수 있게 된다.

해외에서의 장수채권 발행은 여러 차례 시도되었다. 대표적으로 2004년 BNP Paribas와 European Investment Bank(이하 BNP-EIB 장수채권)는 원금상환 없이 특정연령집단의 생존율과 연계된 이자 지급방식의 장수채권 발행을 추진했으며 2010년 Swiss-Re는 원금상환금액이 특정집단의 생존율과 연계된 장수채권을 실제로 발행하는데 성공하였다. 이러한 장수채권의 가격을 결정하기 위해서는 사망률 예측 모형이 필수적이며 동 연구에서는 BNP-EIB 장수채권의 현금흐름을 바탕으로 평균회귀 2요인 사망률 모형을 이용하여 채권 가격 결정을 시도하였다. BNP-EIB 장수채권은 액면가 5억 4천만 파운드, 원금상환 없이 25년 동안 이자만 지급하는 분할상환 방식의 장수채권으로 채권투자자는 25년간 매년 기준집단(잉글랜드와 웨일즈 지역의 2003년 기준 65세 남자)의 사망률로부터 계산된 생존지수 $S(t)$ 가 반영된 아래와 같은 이자 $I(t)$ 를 지급받게 되며

$$I(t) = \pounds 50,000,000 \times S(t). \quad (5.1)$$

이 때 생존지수는 영국통계청에서 발표하는 t 년 x 세의 1년 사망률($\hat{m}(t, x)$)을 이용하여 다음과 같이 계

산된다.

$$S(t+1) = S(t) \times (1 - \tilde{m}(t, x)), \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

이러한 현금흐름을 가진 장수채권의 이론적 발행가격은 다음과 같다.

$$V(0) = \sum_{T=1}^{25} \mathcal{L}50,000,000 \times P(0, T)e^{\delta T} E[S(T)]. \quad (5.3)$$

이 때 $P(0, T)$ 는 T 시점에 1을 지급하는 무이표채의 0시점의 가격으로서 현재가치 요소이며 δ 는 장수채권의 리스크 프리미엄으로서 장수위험 헷지자, 즉 채권투자자가 부담한다.

미래 생존지수 $S(T)$ 는 Table 4.1의 추정 모수값을 바탕으로 식 (4.5)와 (2.1)에 의한 시뮬레이션을 통하여 계산할 있으며 그 결과를 이용하여 장수채권의 발행가격을 산출할 수 있다. 우선, 생존지수 산출을 위한 기준집단을 2015년 잉글랜드와 웨일즈 지역의 65세 남자로 정의하고 초기값을 $S(0) = 1$ 로 설정한 후 2015년 이후 25년간 2요인 평균회귀 모형의 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 값으로부터 사망률을 산출하고 생존지수 $\{S(T); T = 1, 2, \dots, 25\}$ 로 변환한다. 이를 다수 반복한 평균값과 가정한 현재가치요소 $P(0, T)$, 리스크 프리미엄을 식 (5.3)에 적용하면 장수채권 발행가격을 얻을 수 있다. 예제로서, 무위험수익률 4%($P(0, T) = 1.04^{-T}$), 2004년 BNP-EIB 장수채권 발행 사례를 참조한 0.2%의 리스크 프리미엄, 그리고 각 만기에 따라 산출한 장수채권 가격은 Table 5.1과 같다. BNP-EIB 장수채권의 2004년 발행 당시 할인율은 LIBOR-0.35%로, 당시 EIB가 발행하는 일반채권의 할인율 LIBOR-0.15%와 비교할 때 채권가격이 더 비싸며 이는 장수위험 헷지자(연금사업자 등)인 장수채권 투자자에게 할인율 차이(0.2%)만큼의 리스크 프리미엄을 부담시킨 것으로 볼 수 있다.

6. 결론

Cairns 등 (2006b)가 제시한 2요인 확률보행 모형은 그 당시 영국의 사망률을 매우 정밀하게 추정할 수 있었으나, 최근 들어 일부 국가에서 사망률 개선의 속도가 둔화되고 있음이 관측되면서 장기간의 사망률 예측 모형으로서 개선되어야 할 부분이 발견되었다. 이에 본 연구는 2요인 사망률 모형을 바탕으로 2요인의 확률론적 변동을 일정한 추세를 지닌 확률보행과정인 아닌 평균회귀 확률과정으로 설정하여 기존 2요인 모형을 개선하는 시도를 하였다. 이는 인간 수명의 유한성과, 의학기술 발달에 의한 수명연장의 한계를 가정한다면 사망률 개선이 선형적으로 증가한다는 기존 모형보다 더 유연한 모형이 개발될 필요가 있기 때문이다.

평균회귀 모형의 모수 추정은 메트로폴리스-최대우도추정 혼합기법을 사용하였으며 시뮬레이션 결과 생성된 사후분포의 평균을 모수값으로 추정하였다. 1991년~2015년 기간 동안의 자료를 이용하여 추정한 모수 ($\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\Sigma}$)값으로 미래 예측값을 시뮬레이션한 결과 $A^{(1)}$ 은 약 60년 후에, $A^{(2)}$ 는 약 40년 후에 장기 평균값인 $-11.95(\hat{\mu}_1)$ 와 $0.10778(\hat{\mu}_2)$ 로 상당히 근접하였다. 또한 평균회귀 모형의 추정모수 중 하나인 회귀평균값으로의 수렴 속도를 나타내는 λ 를 이용하여 사망률 개선의 속도를 계량화할 수 있어 다양한 사회과학 연구에 활용될 것으로 기대된다. 예를 들어, 장수채권의 발행가격 산출은 그 사회의 사망률 개선 속도에 따라 적절한 사망률 모형이 적용됨이 바람직하므로 사망률 개선의 둔화가 관측되는 사회의 경우에 본 논문의 2요인 평균회귀모형이 채권가격 산출의 대안으로 고려될 수 있다.

본 연구는 특정 집단(국가, 사회)의 사망률 개선이 둔화되고 있다면 장기간 사망률 예측방법으로 선형 모형보다는 평균회귀 모형의 활용이 필요하다는 점을 제시한 것에 의의가 있다. 하지만 추정된 사망률 개선의 평균수렴값(μ) 및 평균수렴속도(λ)값이 관측된 사망률 개선의 둔화의 기간에 따라 다르게 나타남

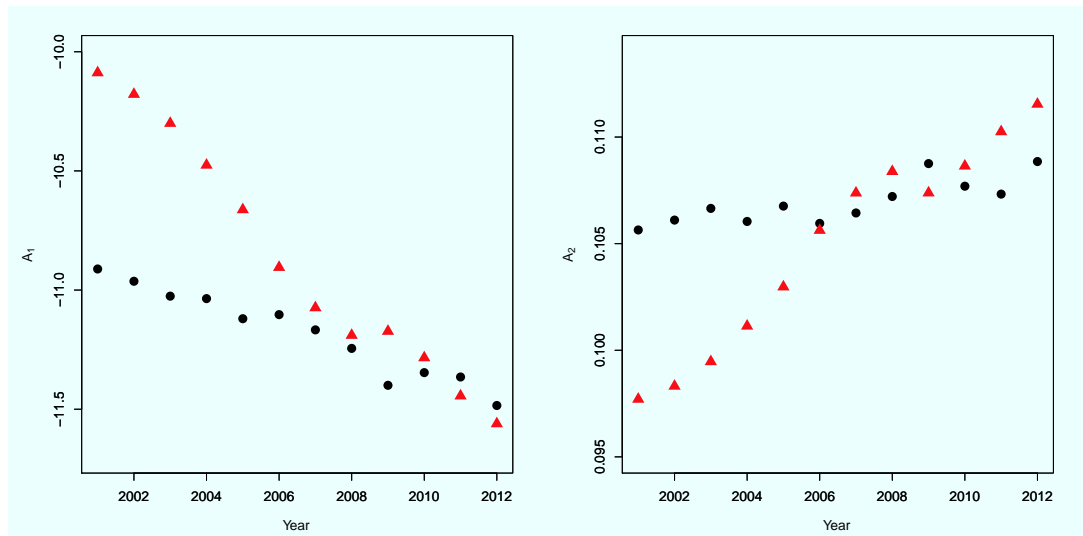


Figure 6.1. Fitted values of $A_t = (A_t^{(1)}, A_t^{(2)})$ from 2001 to 2012 for England and Wales male(circle) and Korea male(triangle) of age between 60 and 89.

에도 불구하고 평균회귀모형을 적용하기 위해 사망률 개선 둔화의 기간이 얼마나 포함되어야 하는지에 대한 기준을 제시하지 못하였고 많은 연구에서 지적하고 있는 특정 세대의 사망률이 다른 세대의 사망률과 다르다는 이른바 코호트 효과를 반영하지 못한 것도 연구의 한계로 지적할 수 있다. 또한 대한민국의 사망률 자료를 이용한 분석이 필요하나 Figure 6.1에서 보는 바와 같이 대한민국의 최근 사망률 자료는 평균회귀모형으로 장기수렴값을 추정하기에는 영국과 비교하여 뚜렷한 사망률 개선의 둔화를 보여주지 않고 있다. 실제로 1990~2012년 기간의 60세 남자의 기대여명 증가를 살펴보면 대한민국은 5.98년 증가했으나 영국은 4.7년 증가에 그쳤다. 이에 동 연구에서는 장기간의 자료 확보가 가능하고 사망률 개선의 추세변화를 확인할 수 있는 영국의 사망률 자료를 활용하였다. 이러한 문제점을 반영하여 최근 국내의 사망률을 활용한 추가연구가 필요하다.

References

- Cairns, A. J., Blake, D. and Dowd, K. (2006a). Pricing death: Frameworks for the valuation and securitization of mortality risk, *ASTIN Bulletin*, **36**, 79–120.
- Cairns, A. J., Blake, D. and Dowd, K. (2006b). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration, *Journal of Risk and Insurance*, **73**, 687–718.
- Cairns, A. J., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, D., Epstein, D., Ong, A. and Balevich, I. (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States, *North American Actuarial Journal*, **13**, 1–35.
- Cheon, S. and Lee, H. (2012). Metropolis-Hastings expectation maximization algorithm for incomplete data, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 183–196.
- Cummins, J. D. (2008). CAT bonds and other risk-linked securities: State of the market and recent developments, *Risk Management and Insurance Review*, **11**, 23–47.
- Currie, I. D. (2006). Smoothing and forecasting mortality rates with P-splines, *Talk given at the Institute of Actuaries, June 2006*, Available from <http://www.macs.hw.ac.uk/iain/research/talks/London.2007.pdf>.
- Lee, R. and Carter, L. (1992). Modeling and forecasting US mortality, *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 659–671.

- Lynch, S. M. (2007). *Introduction to Applied Bayesian Statistics and Estimation for Social Scientists*, Springer, New York.
- Plat, R. (2009). On stochastic mortality modeling, *Insurance: Mathematics and Economics*, **45**, 393–404.
- Perks, W. (1932). On some experiments in the graduation of mortality statistics, *Journal of the Institute of Actuaries*, **63**, 12–57.
- Renshaw, A. and Haberman, S. (2006). A Cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors, *Insurance: Mathematics and Economics*, **38**, 255–272.
- Sung, J. and Shin, H. (2007). Diagnosis of the current securitization markets hedging mortality-related risks and some notes on their crucial issues, *Korean Journal of Insurance*, **77**, 291–323.
- UK office for National Statistics (2013a). Mortality assumptions, 2012-based national population projections, *Technical Paper*, Available from: <http://www.ons.gov.uk/ons/publications/index.html>
- UK office for National Statistics (2013b). Historic and projected mortality rates (q_x) from the 2012-based EW life tables, *Technical Paper*, Available from: <http://www.ons.gov.uk/ons/publications/index.html>

평균회귀확률과정을 이용한 2요인 사망률 모형

이강수^a · 조재훈^{b,1}

^a보험개발원, ^b영남대학교 국제통상학부

(2015년 1월 14일 접수, 2015년 3월 9일 수정, 2015년 4월 28일 채택)

요약

본 논문은 2요인(two-factor) 사망률 모형에 평균회귀모형(mean reverting process)을 적용하여 2요인의 확률적 변동을 모형화하여 사망률리스크(mortality risk)와 장수리스크(longevity risk)를 분석하였다. 최근 고령사회로 진입한 국가들에서 사망률 개선의 둔화가 관측되고 있는 시점에서 기존의 선형증가 또는 감소의 사망률 개선 모형을 보완함에 그 목적을 두었다. 영국의 1991~2015년 사망률 자료를 이용하여 제시한 모형의 모수를 메트로폴리스 알고리즘을 이용해 추정하였고 추정된 모수 값을 이용하여 다수 시뮬레이션을 통하여 장기간의 미래 사망률 예측값을 계산하였다. 평균회귀 모형의 특성으로 인해 약 60년의 시간이 지난 뒤부터는 사망률 개선이 거의 사라져 사망률이 일정한 값에 근접하였다. 사망률 개선이 둔화되는 현상이 관측되는 특정 집단(국가, 사회)의 경우 2요인 평균회귀 모형은 장기간 사망률 예측방법의 대안으로 간주될 것으로 기대되며, 모형의 응용으로서 평균회귀율의 추정결과로부터 사망률 개선의 속도를 계량화하는 기준을 제시하였다. 끝으로, 2014년~2040 기간의 사망률 예측값을 이용하여 25년 만기 장수채권의 발행가격을 산출하였다.

주요용어: 2요인 사망률 모형, 평균회귀 확률과정, 사망률 개선, 메트로폴리스 알고리즘, 장수채권

¹교신저자: (712-749) 경상북도 경산시 대학로 280, 영남대학교 상경대학 국제통상학부.

E-mail: jaehoonjho@yu.ac.kr