대한수학교육학회지 <학교수학> 제 17 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 17, No. 2, 309 ~ 329. Jun 2015

예비교사의 라디안에 대한 이해

강 향 임* · 최 은 아**

본 연구의 목적은 예비교사의 라디안에 대한 이해를 분석하여 라디안 지도에 대한 교수학적 시사점을 도출하는데 있다. 이를 위해 라디안의 개념과 속성, 교육과정 및 교과서를 분석한 후 이를 바탕으로 문항을 개발하였으며, 이를 예비교사 35명에게 적용하여 그 반응을 분석하였다. 분석 결과, 라디안을 정의보다는 $\frac{180^\circ}{\pi}$로 기억하는 학생들이 많았으며, 라디안의 정의를 어떻게 이해하고 있는지가 각의 측정문제의 해결전략에 영향을 미치고 있음을 확인하였다. 또한 예비교사들은 라디안의 이중적 의미, 특히 실수 속성에 대한 이해가 부족하였고, 삼각함수가 왜 실수에서 실수로의 함수로 정의되는지에 대해 적절하게 설명하지 못하였으며, 호도법의 필요성과 유용성을 매우 제한적으로 인식하고 있었다. 이상의 결과로부터 $\frac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안으로 정의하는 교과서의 기술 방식이 개선되어야 한다는 것과 일반각이 실수와 일대일 대응임을 언급함으로써 삼각함수의 정의역이 실수임을 자연스럽게 이해하도록 할 것을 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

각의 측도에는 도(°) 이외에도 직각, 그레이드(grad), 밀(mil), 회전(rev) 등 여러 가지가 있지만, 학교수학에서는 도(°)와 라디안(rad)을 단위로 하는 60분법과 호도법을 주로 사용한다.[1] 라디안은 삼각함수 도입에 필수적인 각의 측도이다. 2009개정 교육과정(2012)에서는 삼각함수를 ‘미적분Ⅱ’에서 다루도록 함에 따라, 9종의 ‘미적분Ⅱ’교과서는 삼각함수 단원에서 각도의 새로운 단위로서 라디안을 도입하고 있으며, 라디안을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법으로 설명하고 있다.

그런데 학생들은 호도법을 배우고도 그 의미나 유용성을 제대로 이해하지 못하고 있으며, 도(°)와 라디안 변환 계산은 잘 수행하는 반면에 라디안에 대한 개념적 이해가 미흡하다(김완재, 2009; 나병채, 2002; 남진영, 임재훈, 2008; 송은영, 2008; 장영수, 2006). 예비교사와 교사들 또한 라디안 개념과 호도법의 필요성에 대해서 충분히 이해하지 못하고 있다. 송은영(2008)의 연구에서는 예비교사들이 호도법의 필요성을 미적분과 연결시켜 설명하지 못하였고, Fi(2003)의 연구서는 예비교사들이 라디안을 반지름의 길이에 대한 호의 길이의 비로서 정의하지 못하였다.

* 한국교원대학교 강사, hikang2002@hanmail.net (제1 저자)
** 전주온고을중학교, silverah90@naver.com (교신저자)

1) 그레이드(grad)는 육십진법을 기본으로 하는 도에 십진법 체계를 도입하려는 의도로 직각을 100으로 나눈 것이고, 밀(mil)은 직각을 1600등분한 것으로 1도보다 훨씬 작은 각을 표현하는데 유리하며, 회전(rev)은 원 위를 따라 한 바퀴 도는 것으로 회전의 빈도수를 표현할 때 적합하다. 직각은 도형과 측도를 동시에 의미하는 것으로, 수학 3-1의 ‘시계방향으로 직각(직각의 2배, 직각의 3배)만큼 돌리기’등 직각을 각도의 단위로 사용하는 사례를 찾아볼 수 있다.

Topçu, Kertil, Akkoc, Kamil & Osman(2006)의 연구에 참여한 37명의 예비교사와 14명의 현직교사들 중에서 단지 3.9%만이 $\sin 30$의 30을 도(degree)가 아닌 라디안으로 인식하였으며, 인터뷰를 통해 예비교사와 교사들의 라디안에 대한 개념이미지가 도(°)에 대한 개념이미지에 영향을 받고 있음이 드러났다. 이 연구를 발전시킨 Akkoc(2008)은 이러한 개념이미지가 라디안 값을 도(°)로 나타낸 값으로 간주하게 함으로써 삼각함수를 실수집합에서 정의된 함수로 인식하는 것을 방해한다는 것과 상당수의 예비교사들이 '라디안은 항상 π가 포함되어 있다'와 '각으로서의 π가 수 180과 동일하다'는 개념이미지를 가지고 있음을 지적하였다.

라디안 개념에 대한 교수·학습과정의 어려움을 개선하고자 하는 노력은 다양한 관점에서 이루어졌다. 국외 연구로는 Cabri Geometry Ⅱ를 이용한 동적 기하 환경에서 원주에 반지름의 길이와 같은 호의 길이가 몇 번 놓이는지를 탐구하도록 한 Klein & Hamilton(1997)의 연구, 수직선을 단위원으로 랩핑(wrapping)하는 것을 제안한 Akkoc(2008)의 연구, 각의 측도에서 호의 길이와 원주, 반지름의 길이 사이의 양적 관계에 주목하는 양적 추론의 역할을 강조한 Moore (2013)의 연구 등이 있다. 국내 연구로는 부채꼴의 호의 길이와 중심각의 크기, 반지름의 관계를 탐구하는 여러 과제를 통하여 부채꼴의 호의 길이와 반지름의 길이의 비가 일정함을 알게 하자고 제안한 장영수(2006)의 연구와 각의 측도로서의 라디안의 특성과 동질량의 비로서 라디안의 특성을 드러내고 라디안의 장점과 유용성을 학생들이 인식할 수 있도록 해야 한다는 남진영, 임재훈(2008)의 연구, 호의 길이로서 각의 크기를 잰다는 발상을 가지고 구체적인 활동을 통해 호도법을 도입할 것을 제안한 강미광(2011)의 연구를 들 수 있다.

그러나 지금까지 수행된 라디안 관련 국내 연구들은 라디안 개념에 대한 이론적 논의 또는 삼각함수 개념 전반에 걸친 이해도 조사의 일부로 연구되었다. 반면에 라디안의 개념과 속성에 초점을 맞추어 예비교사와 교사들의 내용지식을 조사한 연구는 찾아보기 힘들다. 이에 본 연구는 선행연구에 나타난 라디안의 개념과 속성 그리고 현행 교과서가 취하고 있는 라디안의 제시 방식을 살펴보고, 예비교사들의 라디안에 대한 이해 정도를 조사하여 라디안 지도에 대한 교수학적 시사점을 도출하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 라디안의 개념과 속성

가. 라디안 개념의 서로 다른 관점

라디안은 그 기원에 있어서 도(°)와 대조적이다(Jones, 1953). Jones는 도(°)를 단위로 하는 육십분법을 각의 측도체계 중에서 논리적인 정당화가 되어있지 않은 유일한 체계로 설명한다. 원을 360으로 나눈 기원에 대해서는 바빌로니아인들이 1년의 날수를 360로 근사한 것이 60분법에 잘 들어맞았기 때문이라든지, 반지름의 길이와 같은 현을 원의 호에 대응시킬 때 모든 원이 6등분되기 때문이라는 추측이 있을 뿐이다(Maor, 2003). 반면에 라디안의 사용은 비교적 최근의 일이며, 그 기원 또한 명백한 편이다. 1870년 경, 새로운 각의 단위가 필요하다고 생각한 Muir와 Thomson 두 사람에 의해 'radian'이라는 이름이 붙여졌다고 알려져 있다. 당시의 문헌에는 π값이 나타난다는 의미에서 'π-measure'나 원이나 호를 뜻하는 'circular', 'arcual measure'와 같은 용어가 함께 등장한다(Jones, 1953). Jones는 저자

중 아무도 라디안 단위를 도입한 이유를 기술하고 있지 않지만, 삼각함수의 미분과 적분, 곡선 운동에서 속도와 가속도의 표현 등 라디안이 사용된 사례 자체가 수학공식과 물리공식을 간단하게 해주는 라디안의 장점을 보여준다고 주장한다. 그런데 단위원에서 호의 길이로 각을 측정하는 방식은 'radian'이라는 용어가 사용되기 훨씬 오래전부터 사용되고 있었다. 예를 들어, Euler가 그 유명한 공식 '$e^{it}=\cos t+i\sin t$' 에서 사용한 t 역시 호의 길이를 의미했다(Akkoc, 2008).

Akkoc(2008)의 연구를 비롯한 선행연구들은 라디안을 두 가지 의미로 설명해왔다. 하나는 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각을 $1rad$으로 정의하는 것이다. 이 방식은 각의 벌어진 정도를 양으로 나타내는 것으로, 라디안은 각의 크기, 각의 측도로서의 의미를 갖는다. 다른 하나는 라디안을 호의 길이와 반지름의 길이 사이의 비, 즉 $\theta(rad)=\frac{(\text{호의 길이})}{(\text{반지름의 길이})}$로 설명하는 것이다. 이때의 1라디안은 호의 길이와 반지름의 길이와 같을 때의 '비'로 정의된다. 이 방식에서 라디안은 분자와 분모의 길이 단위가 약분될 수 있다는 점에서 '수'로서의 의미를 갖는다. 따라서 전자는 '각'의 속성이, 후자는 '실수'의 속성이 더 부각되게 된다.

그런데 두 가지 의미 중에 라디안 개념의 본질이 무엇이냐에 대해서는 서로 다른 관점이 존재한다. 남진영, 임재훈(2008)은 라디안을 각의 크기와 동질량의 비, 즉 각과 실수라는 양면적 성질을 복합적으로 지니고 있는 개념으로 설명한다. Akkoc(2008) 또한 라디안을 중심각의 크기와 두 길이의 비를 동시에 포함하고 있는 개념으로 설명한다. 반면에 김완재(2009)는 각의 크기야말로 라디안 개념의 본질이며, 두 길이의 비로서의 라디안은 각의 측도로서의 라디안으로부터 파생된 의미라고 주장하였다. 그에 의하면, 라디안을 길이의 비로 정의하여 무차원 단위로 파악하는 것은 단지 물리학에서의 편의성을 따르는 것이며, 라디안이 가지는 특별한 수학적 의미에 기인하는 것이 아니라는 것이다. 따라서 라디안 자체를 실수로서 받아들이는 것을 경계할 것과 단위 부채꼴을 하나의 기본 단위로 파악함으로써 라디안을 각의 측정 단위로서 이해할 것을 제안하였다.

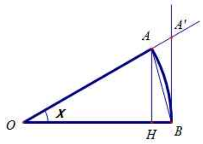
나. 라디안의 실수 속성에 대한 해석

라디안의 속성에 대한 대표적인 오해는 '일반각을 호도법으로 나타내고 단위를 생략하면 삼각함수는 실수에서 실수로의 함수가 된다(우정호 외, 2014b, p75)'는 식의 서술에서 찾아볼 수 있다. 이것은 라디안만의 고유한 특성을 설명하는 것으로 보이지만, 도(°)로 나타내어도 단위를 생략하면 실수가 된다는 사실을 간과한 것이다. 라디안을 반지름과 호의 길이의 비로 정의하는 경우는 그 자체가 실수 속성을 가지게 되어 문제가 되지 않는다. 그러나 1라디안을 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기로 정의하는 경우는 종종 라디안의 실수 속성에 대한 오해를 불러일으킨다. 대표적인 사례가 호의 길이를 구하는 공식 $l=r\theta$에서 '길이 차원에 각 차원을 곱한 결과가 어떻게 길이 차원이 될 수 있는가'이다. 이러한 차원의 불일치를 해소하기 위해 물리학적 관점에서는 '라디안은 무차원 단위'라고 설정한다. 이에 대해 김완재(2009)는 $l=r\theta$에서의 θ를 라디안이 아니라 $\frac{\theta rad}{1rad}$, 즉 기본량 1라디안에 대한 θ라디안의 '비'로서 이해한다면, 이러한 논리적 모순을 해결할 수 있다고 주장한다. 이와 유사한 사례가 삼각함수의 미적분에 유용한 공식 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$에서도 발견된다. 즉 라디안을 '비'가 아닌 '각의 크기'로서 정의하는 입장에서는

$\lim\limits_{x \to 0}$의 x와 $\sin x$의 x, 분모의 x를 모두 라디안으로 파악하게 된다면 혼란이 발생한다. 이에 대해서 김완재(2009)는 분모의 x가 x라디안이 아니라 중심각이 x라디안인 부채꼴의 호의 길이 x라고 설명한다. 즉 분모의 x를 각이 아니라 반지름이 1인 단위원에서 $l = rx = x$를 통해 얻어진 호의 길이로 파악하자는 것이다. 만약 이를 혼동하여 분모의 x를 각으로 파악하게 되면 '분모는 각인데 분자는 실수값' 상황이 되고 이를 해결하기 위해 'x가 라디안이면 실수와 같다'는 주장을 할 수밖에 없다는 것이다. Akkoc(2008) 또한 라디안을 실수로 이해하기 위해서 수직선을 단위원의 원주 위로 랩핑(wrapping)하는 은유를 사용할 것을 제안한 바 있다. 라디안 자체의 실수 속성에 대해서 다른 관점들이 존재하기는 하지만, 위와 같은 설명이 수학적으로 문제가 없다는 측면을 고려하면 분모의 x를 호의 길이로 파악하는 것은 타당하다고 볼 수 있다. 실제로 중심각이 라디안인 경우와 도(°)인 경우로 나누어 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$을 유도해 보면 [그림 II-1]과 같다.

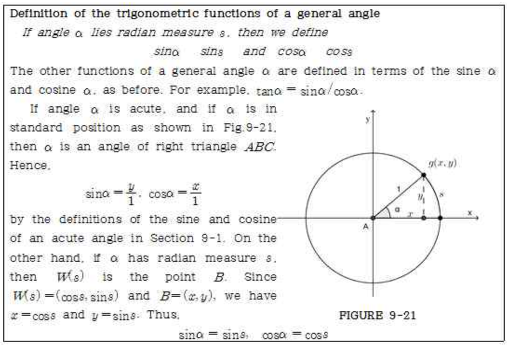
한편 [그림 II-2]에서 보는 바와 같이, 단위원에서의 삼각함수의 정의는 두 가지 방식, 즉 실수인 경우($\sin s$, s는 호의 길이)와 각인 경우($\sin\alpha$, α는 라디안)로 나누어 각기 다른 방식으로 정의한 후 단위원 상에서는 그 값이 같다는 사실을 이용하여 두 삼각함수가 같다고 정의하는 과정을 거치게 된다. 예를 들어, 단위원에서 $\sin 1$과 $\sin(1\,rad)$은 각기 다른 방법으로 정의되지만, 이 두 값은 일치한다. 그러나 두 사인값이 같다고 해서 실수 1과 $1rad$이 같다거나 $1rad$이 실수 1과 같은 속성을 가진다고 보는 것은 곤란하다(김완재, 2009).

반지름의 길이가 1인 부채꼴에서
$\triangle AOB$의 넓이 $<$ 부채꼴AOB의 넓이 $< \triangle A'OB$의 넓이
가 성립한다.



(1) 부채꼴의 중심각이 x라디안인 경우	(2) 부채꼴의 중심각이 $x°$인 경우
부채꼴AOB의 넓이 $S = \frac{1}{2} rl$이므로, $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$ $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	부채꼴AOB의 넓이 $S = r^2\pi \cdot \frac{x°}{360°}$이므로, $\sin x° < \frac{\pi}{180°} x° < \tan x°$ $180°$와 $x°$의 각 단위 (°)가 소거되므로, $\sin x° < \frac{\pi}{180} x < \tan x°$ $1 < \frac{\pi}{180} \cdot \frac{x}{\sin x°} < \frac{1}{\cos x°}$ $\cos x° < \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin x°}{x} < 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x°}{x} = \frac{\pi}{180}$

[그림 II-1] 중심각이 라디안인 경우와 도(°)인 경우의 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$의 증명



Definition of the trigonometric functions of a general angle

If angle α lies radian measure s, then we define

$$\sin\alpha \quad \sin s \quad \text{and} \quad \cos\alpha \quad \cos s$$

The other functions of a general angle α are defined in terms of the sine α and cosine α, as before. For example, $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$.

If angle α is acute, and if α is in standard position as shown in Fig.9-21, then α is an angle of right triangle ABC. Hence,

$$\sin\alpha = \frac{y}{1}, \ \cos\alpha = \frac{x}{1}$$

by the definitions of the sine and cosine of an acute angle in Section 9-1. On the other hand, if α has radian measure s, then $W(s)$ is the point B. Since $W(s) = (\cos s, \sin s)$ and $B = (x, y)$, we have $x = \cos s$ and $y = \sin s$. Thus,

$$\sin\alpha = \sin s, \quad \cos\alpha = \cos s$$

FIGURE 9-21

[그림 II-2] 단위원에서의 삼각함수의 정의(Johnson, Algebra and Trigonometry, 김완재(2009) 재인용)

2. 교육과정 및 교과서 분석

가. 교육과정에서의 호도법

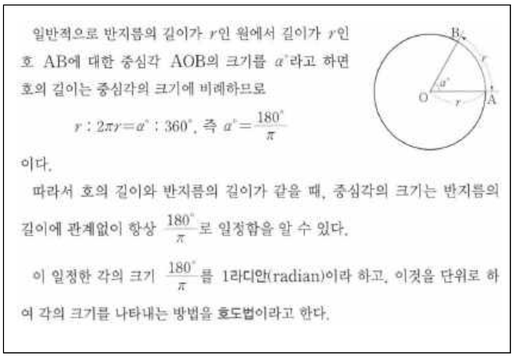
호도법은 1차 교육과정부터 2007 개정 교육과정에 이르기까지 고등학교에서 지속적으로 지도되어왔다. 호도법을 다루는 과목명은 교육과정에 따라 수학(1차, 7차, 2007 개정), 공통수학(2차, 6차), 수학Ⅰ(3차, 4차), 일반수학(5차)으로 다소 변화를 보이고 있지만, 삼각함수 단원에 편성되어 고등학교 1학년에서 지도되어 왔다는 점에서는 동일하다. 그러나 2009 개정 교육과정에서는 삼각함수와 그 미분을 미적분Ⅱ에 편성함에 따라 호도법 또한 미적분Ⅱ에서 다루게 되었다. 이것은 그동안 고등학교 수학에서 필수적으로 지도되어왔던 호도법과 삼각함수를 대학의 자연계열 또는 공학계열 분야로 진학하려는 학생들만 학습함을 의미하는 것으로 교육과정상의 큰 변화라 할 수 있다. 호도법을 지도하는 이유를 삼각함수의 전개와 그 미적분의 편의성이라는 측면에서만 본다면, 미적분Ⅱ에서 호도법을 지도하는 것은 큰 문제가 없어 보인다. 그러나 미적분Ⅱ를 선택하지 않는 상당수의 인문·사회계열 학생들이 다양한 측정단위의 학습 측면에서 새로운 각의 측도인 호도법을 경험할 수 없게 되었다는 점은 다소 아쉬운 점이다.

나. 교과서의 라디안의 개념

호도법의 도입과 라디안의 정의, 호도법의 필요성과 관련하여, 2009 개정 교육과정에 따른 고등학교 미적분Ⅱ 교과서 9종을 분석해 본 결과, 다음과 같은 특징을 발견할 수 있었다.

첫째, 대부분의 교과서들은 중심각이 같은 두 개 또는 세 개의 부채꼴에서, 호의 길이와 중심각의 크기 사이의 관계 또는 호의 길이와 반지름의 길이 사이의 관계를 이용하여, 중심각의 크기를 구해 보는 활동(또는 생각열기)을 통해 호도법을 도입하였다. 도입활동을 생략한 교과서는 김창동외(2014)가 유일하였다. 특히 우정호 외(2014a)와 이강섭 외(2014)는 두 개의 반원을 제시한 후 학생들로 하여금 반지름과 같은 길이의 실을 사용하여 호와 부채꼴을 구하도록 하는 직접적인 측정활동을 포함하고 있다.

둘째, 대부분의 교과서들은 라디안의 정의를 '호의 길이와 반지름의 길이가 같을 때, 중심각의 크기가 반지름의 길이에 관계없이 항상 $\frac{180^\circ}{\pi}$로 일정하고, 이 일정한 각의 크기 $\frac{180^\circ}{\pi}$을 1라디안(radian)이라 한다'고 기술하였다. 정상권 외(2014)만이 '반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기를 1라디안이라 한다'고 정의하였다. [그림 II-3]은 부채꼴과 원 사이의 비례관계, 즉 호의 길이가 중심각의 크기에 비례한다는 성질로부터 비례식 $r : 2\pi r = \alpha^\circ : 360^\circ$을 세우고 이로부터 일정한 크기 $\frac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안으로 정의하는 경우이다. 반면에 [그림 II-4]는 부채꼴과 원 사이의 비례관계의 언급 없이 반지름의 길이와 호의 길이가 같다는 사실만을 사용하여 1라디안을 정의하는 경우이다.



일반적으로 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호 AB에 대한 중심각 AOB의 크기를 a°라고 하면 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

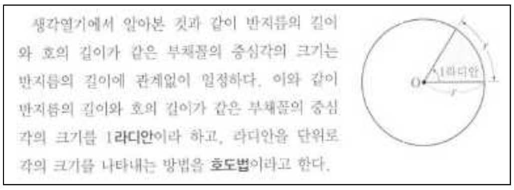
$$r : 2\pi r = a^\circ : 360^\circ,\ 즉\ a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$$

이다.

따라서 호의 길이와 반지름의 길이가 같을 때, 중심각의 크기는 반지름의 길이에 관계없이 항상 $\frac{180^\circ}{\pi}$로 일정함을 알 수 있다.

이 일정한 각의 크기 $\frac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안(radian)이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라고 한다.

[그림 II-3] $\frac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안으로 정의한 사례



생각열기에서 알아본 것과 같이 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기는 반지름의 길이에 관계없이 일정하다. 이와 같이 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기를 1**라디안**이라 하고, 라디안을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라고 한다.

[그림 II-4] 호의 길이를 이용하여 1라디안을 정의한 사례

두 경우 모두 남진영, 임재훈(2008)이 말한 각의 측도로서의 라디안의 의미에 해당된다고 볼 수 있으며, 각의 벌어진 정도가 어느 정도인가를 부각시킴으로써 각의 양적인 성질과 1라디안의 크기를 강조한다. 그러나 전자의 경우에는 주어진 부채꼴의 중심각의 크기에 대응하는 호의 길이가 단위 호의 길이(반지름의 길이와 같은 호의 길이)의 몇 배에 해당하는지를 측정한다는 측도의 기본 개념을 축소해버리는 단점이 있다. 또한 호의 길이를 이용한 새로운 각의 측도 단위로서 라디안을 제시하기보다는 기존의 육십분법의 변환에 불과하다는 인상을 준다는 것이 가장 큰 문제점으로 판단된다.

셋째, 대부분의 교과서들은 중학교 1학년에서 육십분법을 이용하여 다루었던 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 왜 호도법을 이용하여 다시 다루는지에 대한 본질적인 이유를 제시하지 않았다. 총 9종 교과서 중에서 정상권 외(2014), 신항균 외(2014)와 김창동 외(2014) 등 세 권의 교과서에서만 그 이유를 찾아볼 수 있었다. 정상권 외(2014)는 ‘호도법을 이용하면 육십분법을 이용할 때보다 호의 길이나 부채꼴의 넓이를 표현하는 방법이 간단해진다(p58)’고 직접 설명해 놓았고, 김창동 외(2014)는 ‘우리는 왜 호도법을 배울까?’(p59)에서 계산상의 편리함을 언급함으로써 간접적으로 설명해 놓았으며, 신항균 외(2014)는 중심각의 크기를 호도법과 육십분법으로 각각 제시함으로써 함축적으로 호도법 사용의 장점이 드러나도록 하였다.

사실 호도법을 사용하는 이유는 여러 가지 장점이 있기 때문이다. 우선 라디안을 사용하면 굴곡이 있는 곡선형의 삼각함수 그래프를 얻을 수 있다. 만약 사인함수를 도(°)를 단위로 사용하게 그리게 되면 x축에 거의 가까운 직선 모양의 그래프가 그려진다(이상훈, 1995; 남진영, 임재훈, 2008). 이때 스케일을 무시하고 그리게 되면, 그래프 위의 한 점에서의 접선의 기울기가 미분계수와 다르게 산출되는 오류가 발생한다(이상훈, 1995). 라디안의 가장 큰 장점은 여러 가지 식을 단순화할 수 있다는 점이다(Maor, 2003). 라디안 θ를 사용하면 반지름이 r인 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S를 간단한 식 $r\theta$, $\frac{1}{2}r^2\theta$로 표현가능하다. 또한 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$에 대해서 극한값 1을 유도할 수 있으며, $y=\sin x$의 도함수가 $y=\cos x$로, $y=\cos x$의 부정적분이 $y=\sin x$로 얻어진다. 이 경우 모두 육십분법을 사용한 경우에 등장하는 $\frac{\pi}{180}$를 제거함으로써 간단하게 표현할 수 있다.

넷째, 대부분의 교과서가 라디안의 실수 속성에 관한 타당한 근거나 삼각함수의 정의역이 실수 집합인 것에 대해서 언급하지 않았다. 다만

김원경 외(2014)가 유일하게 ‘삼각비를 삼각함수로 전환하기 위해서는 각의 크기를 새로운 방법으로 나타내어 삼각함수의 정의역을 실수 전체의 집합으로 확장할 필요가 있다(p.45)’라고 기술하고 있었다. 그러나 이 교과서 또한 다른 교과서들과 마찬가지로 삼각함수의 정의역이 실수인 이유를 명확하게 제시하지 않았다. 부가적으로 살펴본 교사용 지도서에는 ‘일반각을 호도법으로 나타내고, 단위를 생략하면 삼각함수는 실수에서 실수로의 함수가 된다(우정호 외, 2014b, p.75)’는 다소 부적절한 설명이 포함되어 있었다. 결국 삼각함수의 정의역이 실수 집합으로 확장된 이유로 일반각을 언급한 교과서나 교사용지도서는 단 한권도 찾아볼 수 없었다.

Ⅲ. 연구방법

1. 조사대상 및 절차

본 조사에 참여한 예비교사들은 지방소재의 사범대학 4학년 학생 35명이었다. 이들은 공동연구자중 한 사람이 개설한 강좌인 수학논술을 수강하는 학생들로, 대부분의 수학교육 전공학생과 소수의 타과 복수전공학생들로 구성되어 있다. 사전 질문으로 호도법을 언제 배웠는지에 대해 조사한 결과, 학생들은 고등학교 교육과정에서 호도법에 대한 기본적인 내용을 학습하였으나, 예비교사 교육과정에서 호도법에 관한 내용을 별도로 심화 학습한 경험은 없는 상태였다. 이에 예비교사들의 호도법에 대한 내용지식은 학교수학의 개인적 경험의 영향을 받을 것으로 예상되었다. 이들이 경험한 고등학교 수학 교육과정은 주로 2007개정 교육과정이었으며, 소수만이 7차 교육과정의 적용대상이었다.

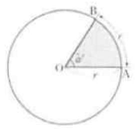
이번 조사는 2015년 3월 말, 수학논술 강의시간 중에 실시되었다. 주어진 제시문과 논제에 대한 학생들의 답안은 작성 직후 모두 수거하여 스캔한 후 1차 답안으로 수집하였다. 다음 차시에는 학생들의 논술 답안을 공유하고 전체 토론하는 시간을 가진 후, 학생들의 발표를 강의자가 요약 정리하여 연구노트로 수집하였다. 이후 호도법과 라디안에 대한 참고문헌 파일을 학생들에게 배부하여 이를 바탕으로 답안을 재작성하는 과제를 제시하였다. 본 연구의 결과 분석은 수집한 1차 답안과 연구노트를 바탕으로 이루어졌다.

2. 검사도구

호도법에 대한 예비교사들의 내용지식을 조사하기 위해 수리논술 문항 형태로 검사도구를 개발하였다. 본 연구에서는 II장에서 살펴본 라디안과 호도법에 관한 선행연구들을 인용하여 제시문을 작성하고 논제를 개발하였다. [그림 III-1]에서 보는 바와 같이, 제시문 (가)는 60분법과 호도법을 예로 들어 순수한 지적인 탐구를 추구하는 수학교육의 목적을 설명한 남진영(2008) 논문의 일부이다. 제시문 (나)는 삼각함수 지도시 라디안 도입의 필요성이나 개념 자체의 이해가 선행되어야 함을 강조한 강미광(2011)의 논문에서, 제시문 (다)는 물리학이나 공학의 식의 계산에서 라디안 단위가 나타났다가 사라졌다 하는 라디안의 속성을 지적한 남진영, 임재훈(2008)의 논문에서 발췌하였다. 제시문 (라)는 60분법보다 작은 숫자를 다룬다는 점을 라디안의 장점이라고 주장한 Kline의 말을 Maor(2003)의 글에서 재인용한 것이다.

논제는 1라디안의 의미 기술하기와 반지름과 호의 길이가 주어진 부채꼴의 중심각 구하기, 육십분과 호도법의 차이점과 호도법의 장점 기술하기, 삼각함수가 실수에서 실수로의 함수가 되

(가) 수학 교사들이 학생들로부터 받는 흔한 질문 중 하나는 아마도 "이것을 왜 배워야 하나요?"일 것이다. 이와 같은 질문을 제기하는 밑바탕에는 그 시점에서 배우는 수학적 개념, 원리, 법칙 등이 과거에 배운 개념, 원리, 법칙이나, 앞으로 배울 고급 수학과 어떤 관련이 있는지, 어떤 중요성이 있는지에 대한 순수한 학문적 궁금함이 있을 수 있다. 이에 비해 이것이 과연 내 삶에 어떤 도움이 될 것인가 하는 지극히 개인적 필요를 의도하였을 수도 있다. 이를테면 각을 측정하는 데 있어서 60분법을 사용해도 그 동안 아무 불편이 없었는데, 왜 호도법을 배워야 하는가, ㉠호도법을 사용하면 60분법을 사용할 때와 어떻게 다르고, 무엇이 좋은가, 이것을 배웠을 때 각과 관련하여 이전에 배웠던 것들은 어떻게 달라지는가, 앞으로는 어떠한 것들을 더 배우게 되는가와 같은 질문은 전자에 해당하고, 호도법을 배우는 것이 내 삶에 어떤 도움을 주는가 하는 것은 후자에 해당한다. 어느 편이든 이 질문은 모두 수학을 배우는 목적과 관계된다.



- 남진영 『폴라니의 인식론에 기초한 수학교육의 목적』 -

(나) 삼각함수를 제대로 이해하기 위해서는 호도법과 일반각에 대한 개념 이해가 선행되어야 한다. 그러나 실제 수업은 라디안 도입의 필요성이나 개념 자체의 이해보다는 삼각함수 값을 구하고 여러 가지 계산이나 공식 유도에 치중하고 있다. 예를 들어 대부분의 교과서는, '중학교에서 배운 삼각비는 닮은 직각삼각형의 예각에 대한 두 변의 길이의 비이고, 삼각함수는 삼각비를 일반각의 경우로 확장하여 정의한 것으로 일반각에서 실수로의 함수이다. 일반각을 호도법으로 나타내고, 단위를 생략하면 삼각함수는 실수에서 실수로의 함수가 된다.' 라는 방식으로 전개하고 있으나 ㉡왜 그렇게 되는지에 대한 설명은 생략되어 있다.

- 강미광 『호도법에 관한 교수학적 고찰』 -

(다) 라디안은 물리학에서 선호하는 국제 통일 단위계 SI에서 각의 표준 단위이다. 그러나 물리학, 특히 역학 식의 계산에서 라디안은 골치 아픈 단위이다. ㉢라디안이 도입되는 식 중에는 라디안 단위가 사라지는 식도 있고, 살아남는 식도 있기 때문이다. 물리학이나 공학의 식의 계산에서는 단위를 맞추는 것이 매우 중요한데, 이와 같이 남기도 하고 사라지기도 하는 라디안은 사용자를 난감하게 만드는 단위가 아닐 수 없다.
물리학에서 라디안이 사용되는 한 예인 원의 회전 운동 방정식 $v=\omega R$ 에서 각속도 ω의 단위는 'rad/s' 이다. 예컨대 원의 회전 속도가 $2rad/s$ 라 하자. 각의 단위를 도로 바꾸면 이것은 $\frac{360}{\pi}deg/s$ 이 되어 수치가 달라진다. 이와 같이 각속도(rad/s)나 각 가속도($rad/s2$)에서는 각의 단위가 필요하므로 라디안을 생략할 수 없다. 그런데 위 식에서 R은 반지름의 길이이므로 그 단위는 m이다. 즉 식의 계산 과정에서 'rad'이 사라져 버린다.

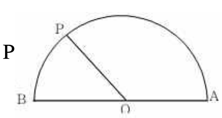
- 남진영, 임재훈 『라디안에 대한 교수학적 분석』 -

(라) "라디안이 도에 대해 취하는 이점은 그것이 단순히 좀 더 편리한 단위라는 것이다. 90° 의 각은 1.57라디안과 크기가 똑같기 때문에, 우리는 90이라는 단위 대신에 단지 1.57을 다루기만 하면 되는 것이다."

- 모리스 클라인(Kline, M.), 『수학: 문명적 접근』, 엘리 마오(Maor, E.),『사인 코사인의 즐거움』에서 재인용)

[논제1] 1라디안의 의미는 무엇인가?

[논제2] 중심이 O이고 반지름이 3인 반원이 있다. $\widehat{AP}=2\overline{OA}$가 되도록 점 P를 잡았을 때, $\angle AOP$ 의 크기를 구하시오.



[논제3] ㉠호도법을 사용하면 60분법을 사용할 때와 어떻게 다르고, 무엇이 좋은가에 답하시오.

[논제4] ㉢의 관점을 비판적으로 고찰하여 ㉡왜 그렇게 되는지를 설명하시오.

[논제5] $1rad$은 각인가? 실수인가? 결정하고 그 이유를 논하시오.

[논제6] 제시문 (라)를 읽고 자신의 생각을 논하시오.

[그림 III-1] 조사에 사용한 검사도구

는 이유 설명하기, 1라디안이 각인지 실수인지 판단하기, Kline이 말한 라디안의 장점에 대한 자신의 생각 서술하기 등 총 6개 문항으로 구성하였다. 논제1은 예비교사들이 라디안의 의미를 어떻게 이해하고 있는지 분석하기 위한 것이다. 논제2는 장영수(2006)과 송은영(2008)의 문항을 일부 수정하여 사용하였으며, 각의 크기를 결정하기 위해 예비교사들이 사용하는 문제해결 전략이 라디안의 정의방식에 따라 어떻게 다르게 적용되는지 확인하고자 선정하였다. 논제 3,6은 호도법 사용의 필요성과 유용성에 대한 이해를 확인하고자, 논제 4,5는 라디안의 실수 속성을 어떻게 이해하고 있는지를 확인하고자 선정하였다.

3. 조사방법 및 분석방법

본 연구의 조사항목, 조사도구와 이에 따른 분석기준은 <표 III-1>과 같다. 조사항목은 9종의 교과서 분석과 라디안의 개념 및 속성에 관한 남진영, 임재훈(2008), 김완재(2009), 강미광(2011)의 연구를 바탕으로 라디안의 의미, 각의 측정, 라디안의 실수 속성, 호도법의 필요성과 유용성으로 설정하였다. 라디안의 의미 항목은 1라디안의 의미를 묻는 논제1을 도구로 사용하여, ① 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 중심각의 크기, ② $\theta = \frac{l}{r}$에서 $l = r$일 때 θ, ③ 비례식으로 유도된 $\frac{180^\circ}{\pi}$를 기준으로 분류하여 분석한다. ①과 ②는 잘 알려진 1라디안의 정의 방식으로 김완재(2009)의 논문을 참고하였고, ③은 대상학생들이 7차와 2007개정 교육과정의 적용대상이었음을 고려하여 해당 교육과정의 교과서에서 언급한 방식을 추가한 것이다.

각의 측정 항목인 논제2에 대해서는 1라디안을 중심각의 단위로 사용하는 전략이 degree를 단위로 사용하는 전략보다 간단할 뿐 아니라 라디안의 개념에 보다 충실하다고 볼 수 있다. 또한 단위 라디안의 2배로 접근하는 것이 원주에 대한 호의 길이의 비로 접근하는 것보다 편리하다. 따라서 논제2는 주어진 부채꼴의 중심각을 구하는 문제해결과정에서 라디안을 단위로 사용하는지 degree를 단위로 사용하는지를 분류하여 분석한다. 라디안의 실수 속성 항목은 논제4와 논제5를 조사도구로 하여 조사한다. 삼각함수의 정의역이 실수가 되는 이유가 무엇인지를 묻는 논제4에 '일반각이 실수와 일대일 대응을 이루기 때문'이라고 답한 반응의 비율을 확인하는 방법으로 분석한다. 논제5는 라디안에 대해서 각, 실수, 각이면서 실수 등의 반응이 어떠한 비율로 나타나는지 확인하는 방식으로 분석한다.

<표 III-1> 조사항목에 따른 분석기준

조사항목	조사도구	분석기준
라디안의 의미	논제1. 1라디안의 의미는 무엇인가?	1라디안의 정의 방식 2가지와 $\frac{180^\circ}{\pi}$
각의 측정	논제2. 중심각의 크기는 얼마인가?	계산과정에서 라디안을 사용한 경우와 degree를 사용한 경우로 분류
라디안의 실수 속성	논제4. 삼각함수의 정의역이 실수인 이유는 무엇인가?	일반각이 실수와 일대일 대응임을 언급했을 때 옳은 반응으로 간주
	논제5. 1라디안은 각인가? 실수인가?	각, 실수, 각이면서 실수, 그 외의 반응으로 분류
호도법의 필요성	논제3, 논제6. 호도법의 필요성과 유용성은 무엇인가?	실수의 속성, 계산의 편리, 측정의 편리, 수학적 표현, 해석적 차원으로 분류

끝으로 호도법의 필요성 항목은 육십분법과 비교한 호도법의 장점을 어떻게 생각하고 있는지를 실수 속성, 계산의 편리, 측정의 편리, 수학적 표현, 해석적 차원으로 나누어 분석한다.

수집한 자료는 이상의 분석기준을 바탕으로 2명의 연구자가 공동으로 분석하였으며, 해석이 다른 경우에는 논의를 지속하여 합의에 이르도록 하였다. 각 논제의 반응을 유형별로 범주화하였고, 유형별 빈도수를 산출하고 필요한 경우 백분율을 제시하거나 35명의 학생을 S1에서 S35까지 대응하여 제시하였다.

Ⅳ. 결과분석

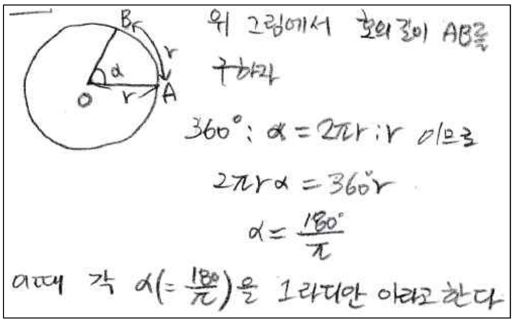
1. 1라디안의 의미

논제1은 예비교사들이 1라디안의 의미를 어떻게 이해하고 있는지를 확인하기 위한 문항으로 1라디안의 정의 방식 2가지와 비례식으로 유도된 $\frac{180^\circ}{\pi}$으로 분류하여 분석하였다. 학생들의 반응에서 정의 이외에 다른 의미를 복수로 답한 경우 정의 방식으로 분류하였고, 정의를 기술하지 않은 채 $\frac{180^\circ}{\pi}$와 다른 의미를 복수로 답한 경우는 $\frac{180^\circ}{\pi}$으로 분류하였으며, 분석기준에 포함하지 않은 다른 의미만을 답한 경우는 기타로 분류하였다. 분류 결과, '반지름의 길이와 호의 길이가 같은 중심각의 크기'로 답한 경우(14명), '$\theta=\frac{l}{r}$에서 l과 r이 같은 중심각의 크기'로 기술한 경우(2명), '$\frac{180^\circ}{\pi}$'로 답한 경우(16명), 기타(3명)로 '각의 크기를 실수로 나타낸 값', '$90^\circ=1.57$rad', '$360^\circ=2\pi$rad' 등이 확인되었다(<표 IV-1> 참조).

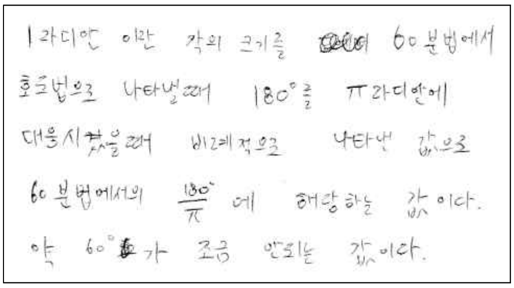
<표 IV-1> 1라디안의 의미에 대한 35명의 반응

반응	학생수
반지름의 길이와 호의 길이가 같은 중심각의 크기	14
$\theta=\frac{l}{r}$에서 $l=r$일 때 θ	2
$\frac{180^\circ}{\pi}$	16
기타	3
합계	35

분류된 반응에서, 1라디안의 의미로서 $\frac{180^\circ}{\pi}$가 가장 많이 언급되고 있음을 알 수 있다([그림 IV-1] 참조). 이러한 결과는 II장에서 살펴본 바와 같이, 원과 부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이의 비례관계로부터 유도된 $\frac{180^\circ}{\pi}$을 1라디안으로 정의함으로써 라디안의 의미를 기존의 육십분법과의 관계 속에서 파악하는 교과서의 서술방식에 기인한다. 이러한 학교수학에서의 개인적 경험으로 인하여 다수의 예비교사들이 호의 길이를 이용하는 라디안의 정의 대신에 $\frac{180^\circ}{\pi}$라는 수치만을 기억하게 된 것이라고 짐작할 수 있다. 특히 '육십분법을 호도법으로 나타낼 때, 180°를 π라디안으로 대응시켜 비례적으로 나타낸 값' 이라는 S12의 반응은 '1라디안은 평각 180°를 π등분해서 만들었다'는 식으로 잘못 생각할 수 있다는 점에서 주의를 요한다([그림 Ⅳ-2] 참조). 이 학생에게 라디안은 호의 길이를 이용한 각의 측도가 아니라 단지 180°를 π로 나눈 육십분법의 변형으로 인식될 수 있다.

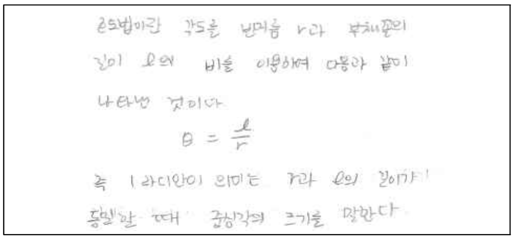


[그림 IV-1] 비례식으로 유도된 1라디안(S20)



[그림 IV-2] 60분법의 변형으로서 1라디안(S12)

이번 조사에서 1라디안을 두 가지 정의 방식으로, 즉 '반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기'와 '반지름의 길이에 대한 호의 길이의 비에서 두 길이가 같은 경우'로 답한 경우는 각각 전체학생의 40%와 5.7%에 해당하였다. 이 결과는 예비교사와 교사들에게 라디안의 정의를 물어본 Fi(2003)와 Topçu et al.(2006), Akkoc(2008)의 연구결과와 비교가능하다. Fi와 Topçu et al.의 연구에서는 아무도 라디안을 반지름의 길이에 대한 호의 길이의 비로서 정의하지 못하였으며, Akkoc(2008)의 연구에서는 단 한 명만이 정의에 성공하였다. Fi의 연구에서 가장 근접한 답안은 '1라디안은 그 각에 대응하는 호의 길이'였다. 우리나라 예비교사들을 대상으로 한 본 조사에서는 약 46%의 학생들이 라디안을 정의하는데 성공했지만, 실제로 '반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기'라는 정의는 '두 길이의 비'의 정의와는 차별화되는 정의이다. 또한 '반지름의 길이에 대한 호의 길이의 비에서 두 길이가 같은 경우'로 답한 학생S29의 경우([그림 IV-3] 참조) 역시 라디안을 '비'라는 추상적인 수치적 값으로 이해하고 있다고 보기는 어렵다. 왜냐하면 이 학생이 주목한 것은 '비'의 '수'로서의 속성보다는 '$l = r$'이라는 조건을 만족하는 부채꼴의 '중심각의 크기'이기 때문이다. 따라서 우리나라의 예비교사의 경우 또한 '두 길이의 비'로서 라디안을 정의하는데 어려움을 겪는다는 점에서 국외 연구결과와 크게 다르지 않다고 말할 수 있다.



[그림 IV-3] 길이의 비로 정의한 1라디안(S29)

본 조사의 연구결과는 예비교사들이 라디안을 '길이의 비, 수'로서가 아니라 각의 크기를 재는 측정가능한 양으로 이해하고 있음을 보여준다. 몇몇 학생들의 답안에서 '실수'라는 표현을 찾아 볼 수 있었으나 이를 '비'와 연결시켜 설명하지 못하였으며, '비'라는 표현을 한 경우에도 결국 '중심각의 크기'를 강조하고 있었다. 반면에 '반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기'는 각의 측도로서의 라디안의 의미를 파악하고 있는 대표적인 사례이다. 또한 가장 빈도수가 높았던 $\frac{180^\circ}{\pi}$는 라디안의 정의라기보다는 라디안과 육십분법과의 변환 관계식이지만, 중심각의 벌어진 정도를 측정한다는 측면이 강하므로 라디안을 측정가능한 양으로 이해하고 있는 경우로 해석할 수 있다.

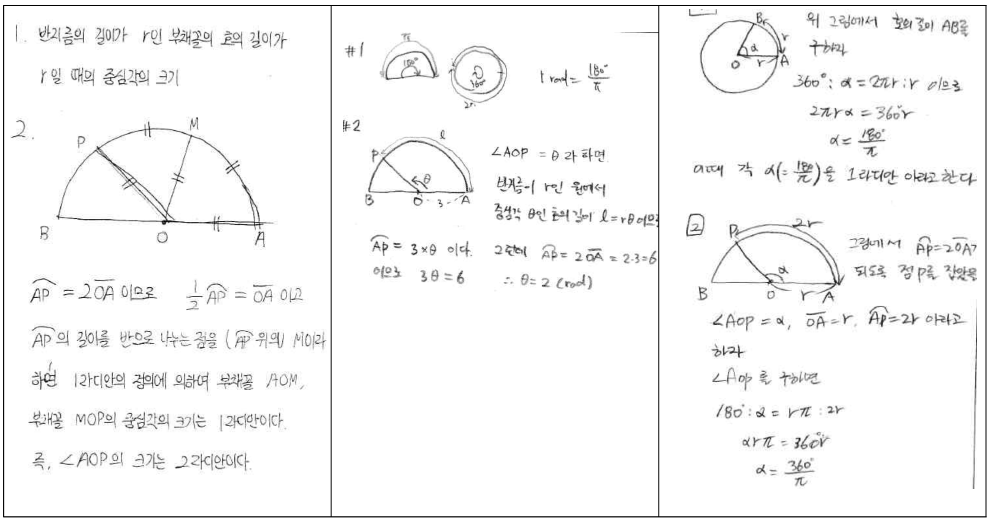
2. 각의 측정

논제2는 반지름과 호의 길이가 주어진 부채꼴의 중심각의 크기를 구하는 문제해결을 위한 계산과정에서 중심각의 단위로서 라디안을 사용한 경우와 degree를 사용한 경우로 분류하여 분석하였다. 이 문항의 반응에 대한 유형과 빈도수는 다음 <표 IV-2>와 같다. 우선 라디안을 이용한 25명의 경우, 단위 라디안의 개수가 2배가 되었으므로 중심각의 크기가 2배가 되어 2라디안이 된다고 답한 사례(9명)와 공식 $l=r\theta$을 이용하여 해결한 사례(14명)로 분류하였다. 다음으로 degree를 이용한 11명의 경우, (원주)$\times\left(\frac{\text{중심각}}{360^\circ}\right)$ 또는 $\frac{360^\circ}{\pi}$을 포함한 비례관계를 이용하여 문제를 해결한 사례로 분류하였다. 기타로 문제를 해결하지 못한 1명의 사례가 있었다.

'호의 길이가 2배이면 중심각의 크기도 2배'라는 범주의 반응에서, Stephan & Clements(2003)이 말한 측정의 기본 개념 중 분할과 단위반복을 발견할 수 있다. [그림 IV-4]의 학생S6(좌)에서 보는 바와 같이, 학생들은 호의 길이를 단위 호의 길이(반지름의 길이)로 분할하여 부채꼴 또한 2개로 분할하였으며, 이에 대응하는 단위 라디안의 개수 2를 찾아내었다. 즉 35명중 9명인 약 25.7%만이 단위 라디안의 정의를 사용하여 단위의 개수를 센다는 측정의 기본 개념을 이해하고

<표 IV-2> 중심각의 측정에 대한 예비교사 35명의 반응

유형	내용	학생수
라디안을 이용한 경우	호의 길이가 2배이면 중심각의 크기도 2배이다	9
	$l=r\theta$을 이용하여 중심각의 크기를 결정한다	14
degree를 이용한 경우	(원주)$\times\left(\frac{\text{중심각}}{360^\circ}\right)$또는 $\frac{360^\circ}{\pi}$	11
기타	문제 재진술	1
합계		35



[그림 IV-4] 중심각의 크기를 구하는 해결 전략(S6(좌), S23(중), S20(우))

있다고 볼 수 있다.

논제 2에 대한 반응 중에서 가장 높은 빈도를 차지한 것은 부채꼴의 호의 길이를 구하는 공식 $l=r\theta$를 이용하여 중심각의 크기를 구한 경우로, 전체 학생의 40%인 14명의 예비교사가 이에 해당되었다. [그림 Ⅳ-4]의 학생S23(중)의 사례를 포함한 이 범주의 학생들은 각의 측정 맥락에서 1라디안을 각도의 단위로 인식하거나 각에 포함되는 단위 라디안의 개수에 주목하기보다는 $l=r\theta$라는 형식화된 공식으로부터 유도되는 (호의 길이) ÷ (반지름의 길이)라는 대수적 식을 선호하는 경향이 있다고 해석할 수 있다. 비록 이 과정에서 $\theta=\frac{l}{r}$이 사용되고는 있지만, 논제1에 대한 이들의 반응을 고려할 때, 이들이 라디안의 정의를 이용하여 문제를 해결한다고 볼 수는 없다. 한편 degree를 이용하여 문제를 해결한 [그림 IV-4]의 학생S20(우)을 포함하는 범주의 반응에서는 11명중 9명이 $\frac{360^\circ}{\pi}$을 언급했으며, 2명은 (원주)$\times\left(\frac{\text{중심각}}{360^\circ}\right)$을 이용하였다. 이 학생들은 라디안 단위를 이용하면 쉽게 해결될 수 있는 중심각의 크기를 육십분법인 degree단위를 이용하여 상대적으로 복잡하게 문제를 해결하고 있다고 볼 수 있다.

논제2의 반응을 논제1의 반응과 연계하여 분석한 결과, 논제2에서 '호의 길이가 2배이면 중심각의 크기도 2배'로 답한 9명 전체가 논제1의 1라디안의 정의를 '반지름의 길이가 호의 길이와 같은 부채꼴의 중심각의 크기'로 정의했음을 확인할 수 있었다. '$l=r\theta$을 이용하여 중심각의 크기를 결정'한 범주는 14명중 11명의 학생이 논제1에서 $\frac{180^\circ}{\pi}$을 1라디안이라 답했으며, degree를 이용한 범주의 11명 중 8명 또한 논제1에서 $\frac{180^\circ}{\pi}$을 1라디안의 의미로 기술하였을 뿐 호의 길이를 이용한 1라디안의 정의를 언급하지 않았다. 이상에서 1라디안을 $\frac{180^\circ}{\pi}$라는 육십분법의 변형된 수치로 기억하고 있는 학생일수록 각을 측정하는 맥락에서 육십분법과의 관계 속에서 해결하는 전략을 선택하는 경향이 있음을 알 수 있다.

3. 라디안의 실수 속성

라디안의 실수 속성 항목은 논제4와 논제5를 조사도구로 하여 라디안의 실수 속성을 어떻게 이해하고 있는지를 조사하였다. 먼저 삼각함수의 정의역이 실수가 되는 이유에 대해서 어떻게 생각하고 있는지를 조사한 논제4에 대한 반응은 <표 IV-3>과 같다.

<표 IV-3> 삼각함수의 정의역이 실수가 되는 이유에 대한 반응

반응	학생수
rad 단위를 생략했기 때문에	18
라디안은 본래 실수이기 때문에	8
길이의 비이기 때문에	2
불분명	4
무응답	3
합계	35

전체의 51.4%인 18명이 '라디안은 각을 나타내는 단위이긴 하지만 단위를 생략하면 실수인 수이기 때문이다'([그림 IV-5]의 S4(좌) 참조)와 같은 유형으로 답했다. 이러한 반응은 각의 다른 측정단위인 도(°)의 경우에도 동일하게 적용될 수 있다는 사실을 간과한 것으로 판단된다. 라디안이 실수인 이유를 '두 길이의 비'로 답한 경우는 2명(S16, S17)에 불과했다.

그러나 논제4는 삼각함수의 정의역이 실수가 되는 이유를 물어 본 문항임에도 대부분의 학생

[논제 4] 라디안은 각을 나타내는 단위이긴 하지만 단위를 생략하면 실수인 수이기 때문이다	호도법에서는 부채꼴의 중심각의 크기를 $\frac{\text{호의 길이(m)}}{\text{반지름의 길이(m)}}$로 나타내는데, 분모와 분자의 단위가 모두 길이의 단위인 m로 같기 때문에 단위가 약분되어 실수가 된다 따라서 일반각을 호도법으로 나타내면 삼각함수의 정의역이 실수가 된다	라디안의 단위의 생략이 경우에 따라 다르므로 학생들에게 그 이유를 가르치기 어렵고 학교에서 다루는 라디안의 단위들은 대부분 생략해도 되므로 학생들에게 왜 그렇게 되는지에 대해서 생략한다

[그림 IV-5] 삼각함수가 왜 실수에서 실수로의 함수인가에 대한 반응(S4(좌), S17(중), S25(우))

들은 라디안이 실수인 이유를 서술하고 있었다. 강미광(2011)과 김완재(2009)는 '일반각을 호도법으로 나타내고, 단위를 생략하면 삼각함수는 실수에서 실수로의 함수가 된다'는 진술이 부적절하다고 지적한 바 있다. 이를 보완할 수 있는 적절한 근거로 그들은 원함수(circular fuction, wrapping function)를 이용하여 삼각함수를 정의하면 간단히 해결될 수 있으나 고등학교에서는 설명하기에 어려움이 있다고 하였다. 그러나 이미 II장에서 살펴본 바와 같이 삼각비를 일반각으로 확장하여 표현하면 실수와 일대일 대응이 존재하므로 원함수에 의한 정의를 도입할 이유가 없다. '라디안의 단위를 생략하면 실수가 되므로 삼각함수를 실수에서 실수로 정의할 수 있다(우정호 외, 2014b)'고 설명하고 있는 교사용 지도서를 비롯한 일부 문헌의 표현을 수정하여 일반각으로 정의되는 삼각함수를 언급하는 것이 필요하다.

한편 논제4를 논제1과 논제2와 연계하였을 때, 앞에서 '$l=r\theta$'를 언급한 학생들의 경우에 논제4에 대해서 '단위원에서 삼각함수를 정의하면 $\theta=\frac{l}{r}=l$ 이고, 따라서 정의역의 θ가 호의 길이 l로 대체될 수 있으므로 실수에서 실수로의 함수로 간주될 수 있다'라는 추론을 도출할 수 있을 것으로 예상하였다. 그러나 이러한 추론 과정을 기술한 답안은 찾아볼 수 없었다. 이와 유사한 추론은 '길이의 비' 유형에서 나타났는데, 학생S17은 함수의 정의역이 실수가 되는 이유를 '$\theta=\frac{l}{r}$에서 분자, 분모에서 길이 단위가 약분되므로 실수이다'라고 기술하였다([그림 IV-5]의 S17(중) 참조). 이 학생의 경우는 '무차원 단위계'로서의 라디안의 개념을 설명하고 있음을 알 수 있다. 그 외에 '고등학교에서 다루는 라디안의 경우 대부분 단위를 생략해도 되고 왜 생략하는지에 대해 학생들에게 설명하지 않는다(S25)'는 답안은 삼각함수의 정의역이 실수인 이유를 직접적으로 기술했다고 보기 어렵다고 판단하여 불분명한 답안으로 분류하였다([그림 IV-5]의 S25(우) 참조).

라디안의 실수 속성에 대한 내용지식을 조사한 또 다른 문항인 논제5는 '1라디안이 각인가? 실수인가?'에 대한 자신의 의견과 근거를 제시하는 문항이었다. 이에 대한 반응은 <표 IV-4>에서 보는 바와 같이, 4가지 유형으로 나누어 살펴볼 수 있다. 라디안이 각이라는 입장이 14명(40%), 실수라는 입장이 11명(31.4%), 각이기도 하고 실수이기도 하다는 입장이 9명(25.7%), 각도 아니고 실수도 아니라는 입장이 1명(2.9%)으로 조사되었다.

<표 IV-4> 라디안이 각인지 실수인지에 대한 반응

반응	학생수
각이다	14
실수이다	11
각이기도 하고 실수이기도 하다	9
각도 아니고 실수도 아니다	1
합계	35

라디안이 각이라고 답한 예비교사들이 주로 제시한 근거는 '1라디안이 $\frac{180^\circ}{\pi}$이기 때문에'와 '1라디안의 정의가 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각이기 때문에'였다. 대부분의 학생들이 라디안 단위를 생략하면 실수로 표현되는 것일 뿐, 본질적으로 각의 크기를 나타내는 개념이라는 입장을 나타내었다. 이는 측정 가능한 각의 크기를 라디안의 본질로 파악하는 김완재(2009)의 입장과 일치한다고 볼 수 있다. 라디안이 실수라고 주장한 예비교사들은 주로 '$\theta = \frac{l}{r}$에서 r, l의 길이 단위가 약분되어 사라지기 때문에'로 설명했다. 그러나 라디안의 실수 속성만을 주장한 경우는 각의 속성을 부정했다는 점에서 문제가 있다고 볼 수 있다. 이 경우에는 단위 라디안의 실수배라는 측정의 기본 개념을 무시할 뿐 아니라, 호의 길이를 구하는 과정에서 필연적으로 π를 등장시킴으로써 '라디안은 π를 사용한 값'이라는 오개념을 유발한 가능성이 있다. 이 유형의 소수의견으로 '육십분법에서는 도($^\circ$)를 생략할 수 없지만 라디안은 생략하기 때문에' 등의 라디안에 대한 미흡한 이해를 바탕으로 한 설명이 있었다.

라디안의 속성을 각과 실수의 측면 모두를 인정하는 비율은 25.7%(9명)로, 예비교사들이 라디안의 각으로서의 속성에 못지않게 실수로서의 속성을 인정하고 있는 것으로 조사되었다. 그러나 타당한 이유를 근거로 설명한 사례는 거의 없었다. 다만 S22는 각의 크기를 나타내는 맥락에서는 각이 되고, 반지름과 호의 길이의 비를 나타내는 맥락에서는 실수가 된다고 진술하였다. 이 사례는 라디안의 두 가지 접근 방식을 모두 포함하는 것으로 남진영, 임재훈(2008)의 입장과 동일하다고 볼 수 있다. 한편 이번 조사에서 유일하게 S16은 라디안이 각도 아니고 실수도 아니라는 주장을 기술하였다. 이 학생은 논제1에서 $\frac{180^\circ}{\pi}$가 1라디안이라고 이해하고 있었으며, 이에 따라 '분자는 육십분법의 각도의 단위이고 분모는 실수값이기 때문에 각이라고도, 실수라고도 말할 수 없다'는 비논리적인 진술을 하고 있음을 알 수 있다.

이미 II장에서 살펴본 바와 같이, 라디안은 각의 속성과 실수의 속성을 둘 다 가지고 있다. 다만 이 두 가지 의미 중에서 무엇이 라디안의 본질인가에 대해서는 전자와 후자 모두를 인정하는 관점과 후자가 전자로부터 파생된 것이라는 관점이 존재하였다. 그러나 라디안 개념에 대한 서로 다른 관점일지라도 학생들에게 각의 크기와 '비'라는 라디안의 두 가지 의미를 구별하여 지도해야 한다는 것에는 이견이 없다. 중요한 것은 라디안을 각이라고 볼 수 있는 이유와 실수라고 볼 수 있는 이유에 대해서 타당한 근거를 제시하는 것이다. 특히 이번 조사에서 실수 속성을 주장한 예비교사들의 정당화가 부족했다는 사실은 특히 '두 길이의 비'라는 라디안 개념에 주목할 필요가 있음을 시사한다.

4. 호도법의 필요성

논제3과 논제6을 통해서 예비교사들이 호도법의 필요성과 유용성을 어떻게 인식하고 있는지를 조사하였다. 이중에서 논제6은 라디안이 도(°)에 비해 취하는 장점을 '90이라는 단위 대신에 단지 1.57을 다루기만 하면 되므로 편리하다'고

주장한 Kline의 의견에 대해 예비교사들의 생각을 서술하게 한 문항이었다. Maor(2003)는 “Kline의 주장은 “라디안이 도(°)보다 큰 단위이고 각도를 좀 더 작은 숫자로 표현할 수 있기 때문에 편리하다는 것인데, 이것은 옳지 않다. 라디안을 사용하는 가장 중요한 이유는 여러 식들을 단순화할 수 있기 때문이다”라고 반박한다.

이번 조사에 참여한 예비교사들은 Kline의 말에 동의한 경우가 12명(34.3%), 동의하지 않은 경우 9명(25.7%), 불분명한 경우 13명(37.1%), 무응답 1명(1.9%)으로 나타났다. 동의한다고 말한 학생들은 대부분 ‘다루는 수가 작다는 것은 계산을 할 때 편리하다(S17)’, ’180이라는 큰 단위 대신에 3.14라는 작은 수를 다루는 것은 문제해결이 더 쉽다(S13)’ 등의 이유를 제시하였다. 반면에 동의하지 않는다는 학생들은 ‘라디안이 좀 더 작은 수로 표현되어 이롭다는 것은 불충분하다. 편리한 다른 이유를 제시해야 한다’는 이유를 제시하였다. 그런데 이 학생들 중에는 ‘1.57이 오히려 90보다 더 복잡하다(S23, S31, S35)’. ‘90도의 각은 정확히 1.57라디안이라고 할 수 없다(S19)’ 등의 반응을 보임으로써 라디안의 가장 큰 장점을 찾아보자는 이 문항의 출제 의도를 파악하지 못하는 모습을 보였다.

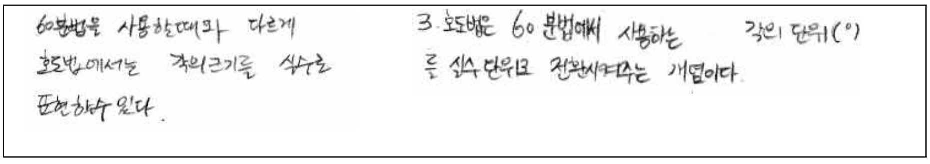
불분명하게 의사를 표현한 학생들이 무려 37.1%에 이른 것도 다소 아쉬운 결과이다. 이들은 제시문의 Kline의 말에 ‘동의’, ‘비동의’를 표현하고 이에 대한 이유, 근거를 제시해하라는 논제에도 불구하고, 이에 대한 언급이 없는 채 자신들이 생각하는 라디안의 장점을 서술한 경우이다. 이들이 말한 라디안의 장점은 논제3의 응답과 대부분 일치하였다. 논제3은 육십분법과 비교하여 호도법이 가지는 장점을 서술하는 문항으로, 이에 대한 예비교사들의 반응은 <표 IV-5>와 같다.

<표 IV-5> 호도법의 장점에 대한 반응 유형

반응		빈도수
실수 속성		14
계산 편리		6
측정 편리		6
수학적 표현	각도의 표현	9
	공식의 표현	5
	단위의 생략	4
	그래프 표현	2
해석적 차원	삼각함수의 계산	3
	삼각함수의 합성	1
	미적분	2
합계		52

전체 35명 학생들 중에는 2~3가지의 장점을 기술한 학생들이 있어, 전체 빈도수가 52건이 산출되었다. 학생들의 답안에서 가장 많이 등장한 키워드는 ‘실수’로, 총 14건에 해당되었다. 이들 중에는 ‘육십분법과 다르게 각의 크기를 실수로 표현할 수 있다(S20)’든지 ‘도(°)를 실수 단위로 전환시켜주는 개념이다(S18)’와 같이 ‘단위 제거 시 실수가 된다’ 또는 ‘라디안은 실수이다’ 등 라디안 개념에 대한 미흡한 내용지식을 가지고 있는 답안들이 있었다([그림 IV-6] 참조).

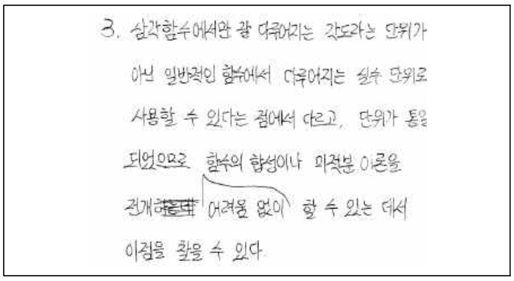
한편 라디안이 크고 복잡한 계산을 좀 더 간단하고 편리하게 해준다고 답한 학생이 6명, 각의 크기를 직접 재지 않고 길이의 비로 각을 구



[그림 IV-6] 라디안의 실수 속성을 호도법의 장점으로 기술한 사례(S20(좌), S18(우))

할 수 있기 때문에 측정상의 편리함이 있다고 답한 학생이 6명으로 조사되었다. 반응 유형 중 가장 많은 빈도수를 차지한 것은 수학적 표현의 편리함이었다. 실제로 'π를 사용하여 각을 간단하고 보기 좋게 표현함으로써 각도 표현에 편리하다'는 의견과 '호의 길이 $l=r\theta$와 부채꼴의 넓이 $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r^2\theta$ 공식이 간단하게 표현된다', 'rad 단위를 생략함으로써 간단하게 표현된다', '삼각함수 그래프를 π단위로 그림에 따라 함수의 변화를 파악하기 쉽다'는 의견이 있었다. 그러나 이 중에는 [그림 IV-7]에서 보는 바와 같이, '호도법이 π를 기준으로 하여 각을 표현한다'고 하는 잘못된 기술을 한 사례(S4, S2)가 있었으며, '육십분법보다 호도법이 그래프의 굴곡을 더 잘 드러낸다'는 그래프 표현에서의 장점은 나타나지 않았다.

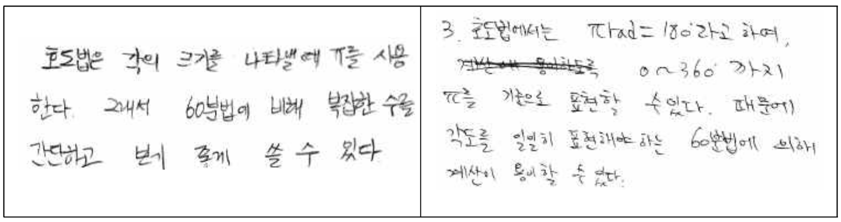
호도법의 장점을 해석적 차원에서 기술한 사례는 소수에 그쳤다. 라디안 사용 시 삼각함수값의 계산과 역연산(S4, S7, S23), 삼각함수의 합성(S6), 도함수와 미적분(S6, S14) 영역에서 편리함을 기술한 답안을 찾아볼 수 있었다. 그러나 이 학생들은 호도법의 장점을 대략적으로 기술했을 뿐, 호도법을 사용한 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$과 육십분법을 사용한 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^{\circ}}{x}=\frac{\pi}{180}$를 비교하여 $\frac{\pi}{180}$를 언급하며 그 편리함을 설명하거나 $\sin x$와 x의 국소적 선형성을 언급하는 수준에 이르지는 못하였다.


3. 삼각함수에서만 잘 다루어지는 각도라는 단위가 아닌 일반적인 함수에서 다루어지는 실수 단위로 사용할 수 있다는 점에서 다르고, 단위가 통일 되었으므로 함수의 합성이나 미적분 이론을 전개하는데 어려움 없이 할 수 있는 데서 이점을 찾을 수 있다.

[그림 IV-8] 해석적 차원의 장점을 기술한 사례(S6))

Ⅴ. 결 론

본 연구의 목적은 예비교사들의 라디안에 대한 이해 정도를 조사하고, 이를 분석하여 라디안 지도에 대한 교수학적 시사점을 도출하는 것이다. 지금까지 수행된 선행연구들은 라디안 개념과 호도법에 대한 역사적 분석과 수학적 분석 위주의 이론적 탐색이거나 고등학생들의 삼각함수 개념에 대한 이해정도를 조사하는 방식으로 수행되었다. 이에 본 연구는 라디안의 개념과 속성에 초점을 맞추어 예비교사들의 내용지식을 조사하고자 하였다. 이를 위해 선행연구에 나타난 라디안의 개념에 대한 서로 다른 관점과 라디안의 실수 속성을 살펴보았으며, 호도법의 도입과 라디안의 정의, 호도법의 필요성을 중심으로 총 9종의 미적분Ⅱ 교과서를 분석하였다. 선


호도법은 각의 크기를 나타낼때 π를 사용한다. 그래서 60분법에 비해 복잡한 수를 간단하고 보기 좋게 쓸 수 있다

3. 호도법에서는 πrad = 180°라고 하며, ~~계산에 용이하도록~~ 0~360° 까지 π를 기준으로 표현할 수 있다. 때문에 각도를 일일이 표현해야 하는 60분법에 의해 계산이 용이할 수 있다.

[그림 IV-7] π를 사용한 각의 표현을 기술한 사례(S4(좌), S2(우))

행연구와 교과서 분석을 바탕으로 수학논술 형태로 조사 문항을 개발하여, 사범대학교 4학년 예비교사 35명을 대상으로 적용하였으며, 그 반응을 분석하였다. 예비교사들의 라디안에 대한 이해에 관련하여 본 연구에서 얻은 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 라디안의 의미를 기술하는 문항에서, 1 라디안을 '반지름의 길이와 호의 길이가 같은 중심각의 크기'로 기억하고 있는 학생보다 비례식으로 유도된 육십분법과의 관계를 나타내는 수치인 '$\frac{180^\circ}{\pi}$'로 기억하고 있는 학생이 더 많은 것으로 조사되었다. 이러한 결과는 호의 길이는 중심각의 크기에 비례한다는 비례식, 즉 '$2\pi r : r = 360^\circ : \alpha^\circ$'로부터 '$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$'를 유도한 후 '이 일정한 각의 크기 $\frac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안이라고 한다'라고 기술하고 있는 교과서의 라디안의 정의 방식이 영향을 준 것으로 판단할 수 있다.

둘째, 각의 크기를 구하는 문항에서, 1라디안의 정의를 '반지름의 길이와 호의 길이가 같은 중심각의 크기'로 이해하고 있는 학생들은 라디안을 사용하여 '호의 길이가 2배가 되었으므로 중심각의 크기도 2배가 된다'는 아이디어를 사용하여 간결하고 쉽게 해결한 반면에 '비례식으로 유도된 $\frac{180^\circ}{\pi}$'로 기억하는 학생들은 육십분법으로 고쳐서 계산하고 난 후 다시 라디안으로 변환하여 답을 제시하는 상대적으로 복잡한 과정을 거쳐 문제를 해결하였다. 이러한 결과는 라디안에 대한 정의를 어떻게 이해하고 있는지가 예비교사들이 각의 측정문제에 대한 문제해결전략을 선택하는 것에 영향을 미치고 있음을 의미하였다.

셋째, 라디안의 실수 속성을 판단하는 문항에서, 예비교사들이 라디안이 갖는 이중적 의미를 적절하게 이해하지 못하고 있으며, 라디안이 갖는 실수 속성에 혼란을 느끼고 있음을 확인할 수 있었다. 예를 들어, 35명 중 26명의 예비교사들이 '라디안은 각이다', '라디안은 실수이다', '각도 실수도 아니다'는 식의 반응을 보였다. 라디안의 이중적 의미를 주장한 경우에도 대부분의 학생들이 각이라고 볼 수 있는 이유와 실수라고 볼 수 있는 이유에 대해서 적절한 근거를 제시하지 못하였다. 이러한 결과는 대부분의 예비교사들이 라디안이 갖는 이중적 의미를 정의를 통해 타당한 방식으로 학습해 본 경험이 없기 때문으로 판단된다.

넷째, 예비교사들은 '삼각함수가 왜 실수에서 실수로의 함수라 할 수 있는가'에 대한 물음에 적절한 답을 하지 못함으로써 라디안 개념과 일반각 개념에 대한 미흡한 이해를 드러내었다. 많은 학생들이 삼각함수의 정의역이 실수인 이유를 '라디안의 단위를 제거하면 실수가 되기 때문'이라고 답하였으며, 일반각에 대해서 언급한 경우는 찾아볼 수 없었다. 이러한 설명 방식은 교사용지도서에서도 동일하게 제시되고 있었다. 이와 같은 결과는 라디안 개념뿐 아니라 일반각의 역할에 대해서도 학생들의 학습경험이 부족하다는 것을 의미한다.

다섯째, 학생들은 호도법을 사용에 관한 필요성과 유용성을 제대로 인식하지 못하고 있었다. 사실 라디안을 사용하면 그래프 표현에 용이하며 부채꼴의 호의 길이나 넓이 공식과 미적분 영역의 여러 가지 삼각함수 공식이 간단히 표현될 수 있으므로 계산과정이 간결해질 수 있다. 또한 라디안은 반지름과 같은 길이의 호의 길이를 단위로 하여 원주를 분할한다는 수학적 아이디어에 기초한다는 점에서 원주를 임의로 360등분한 육십분법에 비해 훨씬 자연스러운 단위이다. 그러나 예비교사들은 이러한 내용들을 다양하게 기술하지 못하였다.

본 연구의 조사 결과로부터 도출한 교수학적 시사점과 이에 따른 제언은 다음과 같다.

첫째, 교과서에서 라디안은 '반지름의 길이와 같은 호의 길이에 대한 중심각의 크기'로서 정의되어야 한다. 실제로 1라디안을 $\frac{180^\circ}{\pi}$으로 기억하는 학생들은 라디안의 정의를 활용하지 못한 채 비례식이나 육십분법을 사용함으로써 좀 더 복잡하고 긴 풀이과정을 나타내었다. 이에 대한 원인은 '$\frac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안이라고 한다'는 교과서의 현행 기술 방식에 있다. 교과서의 라디안 정의가 재정립되고 강조된다면, 라디안을 $\frac{180^\circ}{\pi}$라는 수치로만 기억하는 경우를 교정할 수 있을 것이다.

둘째, 교과서에서 라디안의 이중적 의미에 대한 사려 깊은 기술이 요구된다. 라디안 개념의 본질에 대해서는 서로 상이한 입장이 존재하지만 이는 잘 알려진 두 가지 정의 방식으로부터 설명가능하다. 즉 학생들에게 각의 크기와 '비'라는 라디안의 두 가지 의미를 기술하기 위해서는 라디안의 두 가지 정의방식에 대한 언급이 필요하며 이를 통해 라디안의 각의 속성과 실수 속성을 이해하도록 해야 한다.

셋째, 교과서에서 일반각을 도입하는 이유를 좀 더 강화하여 기술할 필요가 있으며, 교사용 지도서의 삼각함수의 정의역에 대한 설명을 수정할 필요가 있다. 다시 말해서, 교사용 지도서에서 삼각함수의 정의역이 실수인 이유가 라디안 단위를 생략했기 때문이라고 언급한 것을 수정해야 하며, 삼각비를 일반각으로 확장하는 이유를 삼각함수의 정의역이 실수와 일대일 대응을 이루게 하기 위함이라는 것과 삼각함수의 정의역이 실수가 되면 유용한 이유를 제시해야 한다. 이를 바탕으로 교사들이 일반각의 도입 이유와 유용성을 적절하게 이해하고 설명할 수 있도록 해야 한다.

본 연구에서 라디안 개념에 대한 예비교사들의 이해정도가 미흡하다는 것이 확인된 만큼, 앞으로 예비교사 교육과정에서 활용가능한 라디안과 호도법에 대한 교수·학습자료의 개발이 요청된다. 또한 측정 개념 중에서 상대적으로 덜 주목받았던 각의 측정에 대해서 교수학적 분석과 교수실험 등 다양한 측면에 대한 연구가 이루어질 필요가 있다.

참고문헌

교육과학기술부(2012), 교육과학기술부 고시 제 2011-361호(별책 8) **수학과 교육과정**.

강미광(2011). 호도법에 관한 교수학적 고찰. **수학교육, 50**(3), 355-365.

김완재(2009). 라디안의 속성에 관한 연구: 1rad은 각인가 실수인가?. **수학교육학연구, 19**(3), 443-459.

김원경, 조민식, 방금성, 윤종국, 조정길, 이근주, 김기탁, 박수연, 박정숙, 박진호, 윤요섭, 정상일(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: (주)비상교육.

김창동, 장경윤, 김응환, 문광호, 이병헌, 이채형, 차순규, 박윤근, 이소영, 정지현, 이병하, 김성남, 주정오, 권백일, 장인선(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: (주)교학사.

나병채(2002). **고등학교 2학년 학생들의 삼각함수 개념에 대한 이해 실태 분석**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

남진영, 임재훈(2008). 라디안에 대한 교수학적 분석. **수학교육학연구, 18**(2), 263-281.

류희찬, 조완영, 이정례, 선우하식, 이진호, 손홍찬, 신보미, 조정묵, 이병만, 김용식, 임미선, 선미향, 유익승, 한명주, 박원균, 남선주, 김명수, 정성윤(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: (주)천재

교과서.

송은영(2008). **삼각함수 개념의 지도에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

신항균, 이광연, 박세원, 신범영, 이계세, 김정화, 박문환, 윤정호, 박상의, 서원호, 전제동, 이동훈(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: (주)지학사.

우정호, 이광연, 박세원, 신범영, 이계세, 김정화, 박문환, 윤정호, 박상의, 서원호, 전제동, 이동훈(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: 두산동아(주).

우정호, 박교식, 이종희, 박경미, 김남희, 임재훈, 권석일, 남진영, 김진환, 강현영, 이형주, 박재희, 전철, 오혜미, 김상철, 설은선, 황수영, 김민경, 최인선, 고현주, 이정연, 최은자, 김기연, 윤혜미, 천화정(2014b). **미적분Ⅱ 교사용 지도서**. 서울: 두산동아(주).

이강섭, 황석근, 김부윤, 심성아, 왕규채, 송교식, 김진석, 김경돈, 주창수, 양인웅, 차주연, 정재훈, 김원일, 조보관, 김원웅(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: (주)미래엔.

이상훈(1995). 각의 교육에 대한 소고: 60분법과 호도법을 중심으로. **논문집, 28**(2), 229-242.

이준열, 최부림, 이동재, 한대희, 전용주, 장희숙, 조석연, 조성철, 황선미, 박성훈(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: (주)천재교육.

장영수(2006). **삼각함수 개념의 이해 실태 분석 및 지도방안에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 최홍원, 민진원, 김호경(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: (주)금성출판사.

황선욱, 강병개, 김영록, 윤갑진, 김수영, 송미현, 이성원, 도종훈, 이문호, 박효정, 박진호(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: (주)좋은책신사고.

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. *International Journal Education in Science an Technology, 37*(7), 857-878.

Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy.* Ph.D. dissertation, University of Iowa, USA.

Jones, P. S (1953). Angular measure. *The Mathematics Teacher, 46*, 419-426.

Klein, R. J. & Hamilton, I (1997). Using technology to introduce radian measure. *The Mathematics Teacher, 90*(2), 168-172.

Maor, E. (2003). **사인 코사인의 즐거움**. (조윤정, 역). 서울: 파스칼북스. (영어 원작은 1998년 출판).

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 225-245.

Topçu, T., Kertil, M., Akkoc, H., Kamil, Y., & Osman, Ö. (2006). Pre-service and in-service mathematics teachers' concept images of radian. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 281–288). Prague: PME.

Yeshurun, S. (1982). The angle: a logical gap in teaching geometry and trigonometry and its remedy. *International Journal Education in Science an Technology, 13*(2), 133-138.

Stephan, M., & Clements, D.(2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp.3-16). Reston, VA: NCTM.

Pre-Service Teachers' Understanding of Radian

Kang, Hyangim (Korea National University of Education)
Choi, Eun Ah (Jeonju Ongoul Middle School)

This study is to provide didactical implications for teaching and learning of radian through a analysis of investigation result about pre-service teachers' understanding of radian. The results of this study are as follows. First, pre-service teachers understood the radian as $\frac{180^\circ}{\pi}$, rather than as the definition. Secondly, the definition style of radian affected the problem solving strategy for the measurement of the angle. Thirdly, pre-service teachers had insufficient content knowledge about properties of measurement as a pure number of radian. Lastly, They failed to describe the usefulness of circular measure.

We suggested the definition of radian in textbooks should be changed from $\frac{180^\circ}{\pi}$ to mathematical definition of radian. And the general angle should be stated as the reason why the domain of trigonometric function is real numbers.

* Key Words : radian(라디안), circular measure(호도법), trigonometric function(삼각함수), angular measure(각의 측도), pre-service teachers(예비교사)

논문접수 : 2015. 5. 10
논문수정 : 2015. 5. 28
심사완료 : 2015. 5. 28