대한수학교육학회지 <학교수학> 제 17 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 17, No. 2, 241 ~ 255. Jun 2015

몬테카를로 시뮬레이션의 난수 생성에 관한 교사들의 이해에 관한 연구

허 남 구* · 강 향 임**

본 연구는 35명의 예비교사와 현직교사를 대상으로 몬테카를로 시뮬레이션의 난수 생성 아이디어에 관한 이해를 분석하여 학교현장에 교육적 함의를 제공하는데 그 목적이 있다. 연구의 분석 결과, 실험 대상의 70%가 확률 문제 해결을 위해 제시된 세 가지 유형의 난수 생성 아이디어에서 적절한 아이디어를 선택하지 못했고, 자신의 선택을 설명하는 과정에서 오류를 나타냈다. 오류 유형으로는 첫째, 연속확률분포에서 한 점 또는 경계가 선택될 확률은 확률밀도함수에 대입한 값과 같다. 둘째, 교사B의 아이디어는 조건부확률로 문제를 변형하여 표본공간을 확장한 것임에도 처음 제시된 표본공간으로만 문제를 해석하려는 오류를 나타냈다. 셋째, 두 확률변수 X, Y가 독립일 때에만 $P(X=x, Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y \mid X=x)$이 성립한다는 오류를 나타냈다.

Ⅰ. 서 론

2009개정 교육과정에서 확률과 통계 과목의 목표 중에 하나는 수학적 및 통계적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러주는 것이다. 이는 확률과 통계 교과서의 확률단원에 기술되어있는 학습목표로서 '통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다'를 통해 쉽게 확인할 수 있다.

확률의 여러 측면 중 통계적 확률을 지도하기 위해서는 많은 횟수의 시행을 통한 실험적 접근이 필수적이다. 하지만 현재 수학 교실에서 학생이 많은 횟수의 시행을 직접 하기는 어려움이 있다. 이와 같은 어려움은 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하면 해결할 수 있다(Shaughnessy, 1997; 신보미, 이경화, 2006; 신보미, 이경화, 2008). 컴퓨터 시뮬레이션은 학생이 많은 횟수의 시행을 반복하고 시행 결과를 관찰할 수 있도록 도울 수 있으며, 통계적 확률로의 유연한 접근성을 확보해 줄 수 있는 도구이다.

컴퓨터 시뮬레이션을 통한 확률 교육의 중요성은 확률의 종류나 접근 방식 등 다양한 관점이 언급되면서 지속적으로 강조되어 왔다. 실제로, NCTM(2000)은 확률을 수학적 확률로만 지도하지 말고 시뮬레이션을 통해 통계적 확률과 수학적 확률을 모두 지도해야 한다고 제시한 바 있고 신동선과 류희찬(2002)은 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 구체적인 실험과 귀납적인 탐구 활동에서 확률의 다양한 측면을 이해할 수 있도록 지도해야 한다고 주장한 바 있다.

컴퓨터 시뮬레이션 중 난수를 이용한 확률적 모의 방법을 몬테카를로 시뮬레이션이라 한다.

* 대전송촌고등학교, mimirul@nate.com (제1 저자)
** 한국교원대학교 강사, hikang2002@hanmail.net (교신저자)

확률 교육에서 사용되는 컴퓨터 시뮬레이션은 주로 주사위를 던지는 시뮬레이션, 윷을 던지는 시뮬레이션, 동전을 던지는 시뮬레이션 등 난수를 통해 모의실험을 하는 몬테카를로 시뮬레이션이 대부분이다. 몬테카를로 시뮬레이션은 난수를 선택하고 주어진 시행을 여러 번 반복함으로써 확률을 계산한다. 이러한 몬테카를로 시뮬레이션에서는 난수를 생성하는 방법의 차이가 시뮬레이션의 결과의 차이를 만들 수 있다. 예를 들어, 주사위를 던졌을 때 1이 나올 확률을 구하는 몬테카를로 시뮬레이션을 제작한다고 하자. 0에서 1 사이의 난수 a를 선택하고 '$[10a]$를 6으로 나눈 나머지+1'이 주사위의 눈이 되도록 난수를 생성한다면 1, 2, 3, 4가 나올 가능성이 5, 6이 나올 가능성보다 높아 원하지 않은 결과가 나올 수 있다. 따라서 주어진 확률 문제를 시뮬레이션을 할 때 문제 상황에 적합한 난수를 생성하는 방법을 찾는 것이 중요하다.

2009개정 교육과정에서 기하학적 확률은 다루고 있지 않지만 교과서를 살펴보면, 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 Buffon의 바늘 문제를 접근함으로써 원주율(π)를 구한다거나(신항균 외, 2014, 이강섭 외, 2014, 이준열 외, 2014), 도형을 이용한 확률(우정호 외, 2014)과 Bertrand의 역설(김원경 외, 2014, 정상권 외, 2014)등 기하적 확률 문제를 구해보는 활동을 포함하고 있는 것을 쉽게 볼 수 있다. 이러한 문제들은 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하면 편리하게 시행 횟수를 조절할 수 있고 즉각적으로 그 결과를 탐구할 수 있다. 이때, 교사가 컴퓨터 시뮬레이션 과정을 이해하고 있다면 확률 지도를 위한 풍부한 교수학적 지식으로부터 보다 유연하고 효과적인 수업을 진행할 수 있을 것이다. 이를 위해 본 연구에서는 과녁 문제를 단순화하여 예비교사와 현직교사들을 대상으로 몬테카를로 시뮬레이션 난수 생성 아이디어에 관한 이해가 어떠한지를 분석하여 컴퓨터 시뮬레이션의 활용에 대한 교육적 시사점을 제공하고자 한다. 동시에 검사지의 반응에서 나타나는 오류를 분석하여 학교현장에 의미 있는 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 몬테카를로 시뮬레이션

시뮬레이션이란 연구하고자 하는 대상을 모델링한 후, 이를 모의실험을 통해 해를 구하고 그 해를 대상에 적용시키는 과정을 의미한다(양성민, 1998). 이러한 시뮬레이션 중 난수를 발생시켜 시뮬레이션을 하는 방법을 '몬테카를로 시뮬레이션'이라고 하고, 그렇지 않은 시뮬레이션을 '결정론적 시뮬레이션'이라고 한다(김상길, 1999).

몬테카를로 시뮬레이션은 1930년대 Enrico Fermi가 중성자 확산 실험에서 최초로 사용하였다. 하지만 Fermi는 몬테카를로 시뮬레이션에 대한 연구 기록을 남기지 않아 일반적으로 1949년에 발표된 Nick Metropolis와 Stanislaw Ulam의 논문 'The Monte Carlo Method'를 기원으로 보고 있다(Anderson, 1986; Metropolis, 1987; 김상길, 1999). 이후, Metropolis, Edward Teller, John von Neumann, Ulam과 Robert Richtmyer는 몬테카를로 방법을 사용하여 문제를 해결하는 알고리즘과 기술을 개발하였으며(Anderson, 1986), 이것을 von Neumann이 개발한 컴퓨터 'EDVAC'에 적용시켜 Manhattan Project에 사용하였다.

몬테카를로 시뮬레이션의 방법은 매우 다양하지만 일반적으로 다음과 같은 4가지 절차를 거친다(이윤석, 2012, p17).

① 특정 문제에 대한 시뮬레이션 모델 구축
② 난수를 생성하여 입력할 값을 만들고 이를 모델에 입력
③ 모델에서 입력된 값에 대한 결과 계산
④ 계산된 결과 값을 이용하여 특정 문제에

대한 각종 분포나 특성 등을 추론함으로써 문제에 대한 해답 유추

위의 절차를 따르는 몬테카를로 시뮬레이션의 대표적인 예는 π의 근삿값을 계산하는 것이 다. 먼저 한 변의 길이가 1인 정사각형을 그린 후, 컴퓨터로 난수를 발생시켜 정사각형 내부에 무작위로 점을 찍는다. 이 때, 정사각형에 찍힌 전체 점의 개수와 정사각형의 한 꼭짓점으로부터 반지름이 1인 사분원의 내부에 포함된 점의 개수의 비를 계산하여 $\frac{\pi}{4}$의 근삿값을 구할 수 있다. 몬테카를로 시뮬레이션을 사용하여 π의 근삿값을 구하는 또 다른 예로는 Buffon의 바늘 문제가 있다(Tarantola, 2005). Buffon의 바늘 문제는 일정한 간격의 평행선이 그어져 있는 바닥에 길이가 일정한 바늘을 떨어뜨렸을 때 바늘이 평행선에 닿을 확률을 구하는 것으로 바늘을 던지는 시행을 반복 수행하여 원하는 근삿값을 얻을 수 있다.

위의 예에서 확인할 수 있듯이 몬테카를로 시뮬레이션에서는 난수를 발생시켜 근삿값을 계산한다. 따라서 몬테카를로 시뮬레이션에서 난수를 발생시키는 방법이 중요하다. 이는 난수의 발생 방법에 따라 표본공간이 다르게 나타나기 때문에 시뮬레이션의 결과가 다르게 나타날 수 있다(김원경, 2011, p121)는 사실에서 확인 가능하다. 즉, 올바른 난수 생성 함수를 선택할 경우에는 현실을 반영한 좋은 시뮬레이션이 되지만, 잘못된 난수 생성 함수를 선택할 경우에는 현실을 반영하지 못한 시뮬레이션이 될 수 있다. 몬테카를로 시뮬레이션을 설계하는 과정에서 일반적으로 좋은 난수 생성 함수를 찾는 것은 쉽지 않다(Park & Miller, 1988; Hellekalek, 1998).

Ⅲ. 확률 교육과 시뮬레이션

확률 교육에 있어 반복적인 시행을 통한 실험적인 접근은 중요하다. 하지만 교실 환경에서 많은 횟수의 시행을 하는 것은 현실적인 어려움이 따르기 때문에 컴퓨터를 활용한 시뮬레이션의 필요성이 요구된다. 또한 확률 교육에서 컴퓨터 시뮬레이션의 활용에 관한 연구(김상길, 1999; 양은순, 2008; 신보미, 이경화, 2006; Chance, delMas & Garfield, 2004; Shaughnessy, 1993)는 인지적·정의적 측면에서 유의미한 변화와 학생들에게 조작의 기회를 제공한다는 점에서 확률 지도를 위한 긍정적인 측면, 그리고 문제해결능력이나 추론 능력의 향상에 대해서 언급했다.

인지적 측면에서, 컴퓨터 시뮬레이션을 활용한 확률 교육은 학생이 확률에 관한 개념 이해를 도와줄 수 있으며, 학생이 기존의 경험으로부터 획득한 확률에 대한 오개념을 고칠 수 있다(Shaughnessy, 1993). 실제로, 김상길(1999)은 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 확률과 기댓값을 지도한 결과, 학생이 확률과 기댓값에 대한 의미를 ‘대수적 법칙’과 관련지어 구체적으로 이해하게 되었음을 보였다.

정의적 측면에서, 컴퓨터 시뮬레이션을 활용한 확률 교육은 학생들의 흥미를 유발(양은순, 2008) 할 수 있으며 확률에 대한 오개념을 반성적으로 사고(김상길, 1999; Shaughnessy, 1993)할 수 있는 기회를 제공한다. 실제로, 김상길(1999)은 학생이 수학적 확률에 대해 신뢰를 갖게 되었으며, 확률에 대한 잘못된 직관과 오개념을 반성하는 모습을 확인하였다. 이러한 측면은 학생에게 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 귀납적으로 조작할 기회를 제공함으로써 통계적 확률의 의미를 지도할 수 있다(신보미, 이경화, 2006)는 주장을 지지한다고 볼 수 있다.

한편, 컴퓨터 시뮬레이션의 활용은 실생활 문

제 해결력 신장시킬 수 있고 확률적 상황에 대한 예측, 실험, 수학적 사고, 문제해결의 과정을 거치면서 추론 능력의 향상(양은순, 2008)에 도움을 줄 수 있다. 다시 말해서, 기존의 확률 문제는 표본공간, 순열, 조합, 확률과 관련된 법칙 등 많은 수학적 개념 중 일부를 알지 못할 경우에 해결하지 못하지만, 몬테카를로 시뮬레이션을 활용하면 최소한의 수학 지식과 기술만으로 확률을 쉽게 계산할 수 있다(Travers, Gray, 1981). 심지어 학생이 컴퓨터 시뮬레이션 없이 확률 문제에 대한 수학적인 해를 알고 있더라도, 시뮬레이션은 수학적인 해를 확인하고 반성적 사고를 할 수 있도록 도와준다(Shaughnessy, 1993).

Chance, delMas와 Garfield(2004)는 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 학생이 중심극한정리와 표집분포에 대해 구체적으로 이해할 수 있다고 하였다. 또한 시뮬레이션과의 상호작용을 통해 학생들은 표집분포의 과정을 보다 잘 이해할 수 있으며 통계적 추정과 관련된 개념을 이해하고 발달시킬 수 있을 것이라고 하였다.

이러한 선행 연구들에 의하면 학생들은 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 모의실험과 귀납적 탐구 과정에서 확률의 이해에 한층 가까워질 수 있으며, 더 나아가 표집분포와 통계적 추정에 관련된 내용을 구체적으로 이해할 수 있다. 그런데 선행 연구에서 드러난 많은 장점에도 불구하고 컴퓨터 시뮬레이션에 관한 교사들의 인식에 관한 연구가 없었다는 점에서 몬테카를로 시뮬레이션의 난수 생성에 관한 교사들의 이해를 분석해 보는 것은 의미가 있다.

Ⅳ. 연구 방법

본 연구에서는 기하학적 확률 문제의 해결을 위한 몬테카를로 시뮬레이션 난수 생성 아이디어에 관한 교사들의 이해를 확인하고자 반응 분석과 각 반응에 대한 해결 전략을 분석하였다. 본 연구는 충청북도 소재 H대학교 대학원에 재학 중인 예비교사와 현직교사 35명(예비교사 29명, 현직교사 6명)을 대상으로 하였다. 본 연구에 참여한 35명은 연구자 중 한 사람의 강좌를 수강한 학생들로 교육대학원의 예비교사와 일반대학원의 현직교사로 이루어져 있으며 컴퓨터 시뮬레이션에 관한 기본 지식을 가진 1명의 예비교사를 제외하면 시뮬레이션에 관한 사전경험이 없는 상태였다.

본 연구의 검사문항을 구성하기 위해 과녁 문제를 참고하였다. 과녁 문제는 기하학적 확률의 지도에서 흔히 사용되고(조차미 외, 2008), 초기 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 π의 근삿값을 구하는 대표적인 문제이다. 본 연구에서 사용된 과녁 문제는 '반지름이 10인 원의 내부의 임의의 한 점을 선택하였을 때, 중심으로부터 떨어진 거리가 5 이하일 확률은 얼마인가? (단, 모든 점이 선택될 확률이 같다.)'이고 이 문제를 해결하기 위해 가상으로 설정한 세 명의 교사가 제시한 몬테카를로 시뮬레이션의 난수 생성에 관한 아이디어를 평가하는 것이 검사문항이다(<표 IV-1> 참고). 몬테카를로 시뮬레이션의 난수 생성을 위한 접근 방식으로 극좌표계와 직교좌표계, 두 변수 사이의 독립과 종속을 고려할 수 있다. 따라서 극좌표의 사용, 직교좌표계에서 두 변수 사이의 독립, 그리고 직교좌표에서 두 변수 사이의 종속과 관련하여 세 가지 아이디어를 제시하였다. 즉, 본 연구의 과제는 세 가지 유형의 난수 생성 아이디어 중 가장 적절하다고 생각하는 답안을 선택한 후, 적절하다고 생각한 것과 적절하지 않다고 생각한 것에 대한 이유를 서술하는 것이다. 이 과제는 통계학 전공 교수 2명과 동료교사 2명의 검토를 거쳐 문항을 확정하였다.

<표 IV-1> 세 가지 유형의 아이디어

교사A의 아이디어

원의 중심을 원점으로 하였을 때, 반지름이 10인 원의 내부의 한 점은 극좌표로 표현될 수 있다.

임의의 한 점을 A라고 하였을 때, 점 A의 좌표는 r과 θ를 이용하여 구할 수 있다. 이 때, r과 θ의 범위는 각각 $0 \le r \le 10$, $0 \le \theta < 2\pi$이다.

따라서 0과 10 사이에서 random하게 하나의 실수를 선택하여 r이라 하고, 0과 2π 사이에서 random하게 하나의 실수를 선택하여 θ라고 하자. 그러면 r과 θ가 선택될 확률은 각각 일정하기 때문에 원 내부의 모든 점이 선택될 확률은 같을 것이다. 이러한 시행을 70,000번을 한 후, 원점으로부터 거리가 5이하인 점의 개수를 n이라고 하면 $\frac{n}{70000}$은 기하학적 확률의 근삿값이 될 것이다.

교사B의 아이디어

원의 중심을 원점으로 하였을 때, 반지름이 10인 원의 내부의 한 점은 직교좌표로 표현될 수 있다.

임의의 한 점을 A라고 하였을 때, 점 A의 좌표는 x좌표와 y좌표를 이용하여 구할 수 있고, $-10 \le x, y \le 10$이다.

따라서 -10과 10 사이에서 random하게 하나의 실수를 선택하여 x이라 하고, -10과 10 사이에서 random하게 다른 하나의 실수를 선택하여 y라고 하자. 그러면 x과 y가 선택될 확률은 각각 일정하기 때문에 한 변의 길이가 20인 정사각형의 모든 점이 선택될 확률은 같을 것이다. 결국, 반지름이 10인 원의 내부의 점들도 모두 선택될 확률은 같게 될 것이다. 이러한 시행을 70,000번을 한 후, 원점으로부터 거리가 10이하인 점의 개수를 n개, 원점으로부터 거리가 5이하인 점들의 개수를 r개라 하면 $\frac{r}{n}$은 기하학적 확률의 근삿값이 될 것이다.

교사C의 아이디어

원의 중심을 원점으로 하였을 때, 반지름이 10인 원의 내부의 한 점은 직교좌표로 표현될 수 있다.

임의의 한 점을 A라고 하였을 때, 점 A의 좌표는 x좌표와 y좌표를 이용하여 구할 수 있다. 이 때, $-10 \le x \le 10$이고, y의 좌표는 $x=k$일 때,

$-\sqrt{100-k^2} \le y \le \sqrt{100-k^2}$ 이 된다.

-10과 10 사이에서 random하게 하나의 실수를 선택하여 x이라 하고, $x=k$로 정해지면 $-\sqrt{100-k^2}$ 과 $\sqrt{100-k^2}$ 사이에서 random하게 다른 하나의 실수를 선택하여 y라고 하자. 그러면 x가 선택될 확률을 일정하며, x가 선택된 이후 y가 선택될 확률이 일정하므로 확률의 곱셈법칙을 이용하면 반지름이 10인 원의 내부의 점 $A(a,b)$가 선택될 확률은

$$\mathrm{P}(X=a, Y=b)$$
$$=\mathrm{P}(X=a) \times \mathrm{P}(Y=b|X=a)$$

가 되어 선택될 확률은 모두 같게 될 것이다. 이러한 시행을 70,000번을 한 후, 원점으로부터 거리가 5이하인 점들의 개수를 n개라 하면 $\frac{n}{70000}$은 기하학적 확률의 근삿값이 될 것이다.

본 연구는 2014년 4월에 예비교사와 현직교사 35명을 대상으로 검사를 실시하여 35명 전원의 자료를 수집하였다. 검사지 분석은 세 가지 아이디어에 대한 반응 유형별 빈도수를 중심으로 분석하였으며 필요한 경우 백분율을 제시하였다. 검사지의 분석에 있어 확률과 통계에 대한 오류에 대한 분석이 동시에 이루어졌다. 검사지 분석의 효율성을 위해 본 연구에 참여한 예비교사와 현직교사는 학생1에서 학생35까지 번호를 부여하여 분석하였다.

교사A의 아이디어를 선택할 경우, 극좌표를 도입하는 것이 효과적이라고 판단할 것으로 예측되며 교사C의 아이디어를 선택할 경우, 표본공간이 원의 내부와 같아야 한다고 판단할 것으로 예상하였다.

Ⅴ. 세 교사의 아이디어에 대한 몬테카를로 시뮬레이션의 과정 및 수학적 확률

1. 몬테카를로 시뮬레이션의 과정

EXCEL을 이용하여 세 가지 아이디어에 대한

몬테카를로 시뮬레이션을 실시하였다.

가. 교사A의 아이디어에 대한 시뮬레이션

교사A의 아이디어를 엑셀의 매크로기능을 이용하여 시뮬레이션을 하였다. 매크로의 소스코드는 다음과 같다. ‘직사각형1’을 클릭하면 매크로가 실행된다. 매크로가 실행되면 A열에는 0부터 10까지의 난수가 생성되고, B열에는 0부터 2π까지의 난수가 생성된다. C열에는 ‘A열에 생성된 난수의 값’에 ‘B열에 생성된 난수의 코사인 값’을 곱하고, D열에는 ‘A열에 생성된 난수의 값’에 ‘B열에 생성된 난수의 사인 값’을 곱한다. 위의 작업을 70,000번 반복한다. 엑셀의 매크로에 입력된 Visual Basic의 소스코드는 [그림 V-1]과 같다.

```
Sub 직사각형1_Click()
Dim i  As Double
For i = 1 To 70000
Cells(i + 1, 1) = Rnd() * 10
Cells(i + 1, 2) = Rnd() * 2 * WorksheetFunction.Pi()
Cells(i + 1, 3) = Cells(i + 1, 1) * Cos(Cells(i + 1, 2))
Cells(i + 1, 4) = Cells(i + 1, 1) * Sin(Cells(i + 1, 2))
Next i

End Sub
```

[그림 V-1] 아이디어 A에 대한 소스코드

매크로의 실행 결과는 엑셀 화면에 나타나도록 설계하였다. 매크로의 실행 결과가 A열부터 D열까지 나타나며, C열에 나타난 x좌표와 D열에 나타난 y좌표를 이용하여 점 (x,y)가 중심으로부터 반지름이 5인 원의 내부에 포함되는지를 판정하여 E열에 내부의 점이면 ‘1’, 외부의 점이면 ‘0’으로 결과를 나타낸다. 셀 ‘F2’에는 70,000개의 점 중 반지름이 5인 원의 내부의 점의 개수를 상대도수로 나타낸 값이다. 매크로 실행 결과가 나타난 엑셀 화면은 [그림 V-2]와 같다.

	A	B	C	D	E	F
1	r값	theta값	x좌표	y좌표	판정	확률
2	9.796316	5.290638	5.354256	-8.20364	0	0.502357
3	2.611192	2.654615	-2.30764	1.221925	1	
4	3.699469	1.070358	1.775042	3.245812	1	
5	0.283514	0.717582	0.213599	0.186429	1	
6	5.645873	0.170309	5.564191	0.956899	0	
7	3.86072	3.186262	-3.85687	-0.1724	1	
8	2.376861	4.413241	-0.70048	-2.2713	1	
9	5.264807	5.259679	2.739672	-4.49582	0	
10	2.440407	5.933286	2.292536	-0.83658	1	
11	2.677539	2.903845	-2.60222	0.630598	1	

[그림 V-2] 교사A의 시뮬레이션 시행 결과

나. 교사B의 아이디어에 대한 시뮬레이션

교사B의 아이디어를 엑셀의 매크로기능을 이용하여 시뮬레이션을 하였다. 매크로의 소스코드는 다음과 같다. ‘직사각형6’을 클릭하면 매크로가 실행된다. 매크로가 실행되면 A열에는 -10부터 10까지의 난수가 생성되고, B열에는 -10부터 10까지의 난수가 생성된다. 위의 작업을 70,000번 반복한다. 엑셀의 매크로에 입력된 Visual Basic의 소스코드는 [그림 V-3]과 같다.

```
Sub 직사각형6_Click()
Dim i As Double

For i = 1 To 70000
Cells(i + 1, 1) = -10 + Rnd() * 20
Cells(i + 1, 2) = -10 + Rnd() * 20
Next i

End Sub
```

[그림 V-3] 교사B 아이디어에 대한 소스코드

매크로의 실행 결과는 엑셀 화면에 나타나도록 설계하도록 설계하였다. 매크로의 실행 결과가 A열부터 B열까지 나타난다. A열에 나타난 x좌표와 B열에 나타난 y좌표를 이용하여 점 (x,y)가 중심으로부터 반지름이 10인 원의 내부에 포함되는지를 판정하여 내부의 점이면 ‘1’, 외부의 점이면 ‘0’으로 결과를 C열에 나타내며, 중심으로부터 반지름이 5인 원의 내부에 포함되는지를 판정하여 내부의 점이면 ‘1’, 외부의 점이면 ‘0’으로 결과를 D열에 나타낸다. 셀‘E2’에

는 70,000개의 점 중 반지름이 5인 원의 내부의 점의 개수를 반지름이 10인 원의 내부의 점의 개수로 나눈 값을 나타낸 것이다. 매크로 실행 결과가 나타난 엑셀 화면은 [그림 V-4]와 같다.

	A	B	C	D	E
1	x좌표	y좌표	판정1	판정2	확률
2	-2.71061	3.984711	1	1	0.251174
3	3.086993	-3.03455	1	1	
4	-4.47583	-1.98426	1	1	
5	-0.21216	-4.51892	1	1	
6	-0.87721	-5.21663	1	0	
7	-8.20546	-2.46775	1	0	
8	3.755416	-6.47292	1	0	
9	2.638608	8.774471	1	0	
10	3.705505	-2.35347	1	1	
11	3.371054	-7.69533	1	0	

[그림 V-4] 교사B의 시뮬레이션 시행 결과

다. 교사C의 아이디어에 대한 시뮬레이션

교사C의 아이디어를 엑셀의 매크로기능을 이용하여 시뮬레이션을 하였다. 매크로의 소스코드는 다음과 같다. '직사각형1'을 클릭하면 매크로가 실행된다. 매크로가 실행되면 A열에는 -10부터 10까지의 난수가 생성된다. A열에 나타난 x 좌표의 값에 대해, B열에는 $-\sqrt{100-x^2}$ 부터 $\sqrt{100-x^2}$ 까지의 난수가 생성된다. 위의 작업을 70,000번 반복한다. 엑셀의 매크로에 입력된 Visual Basic의 소스코드는 [그림 V-5]과 같다.

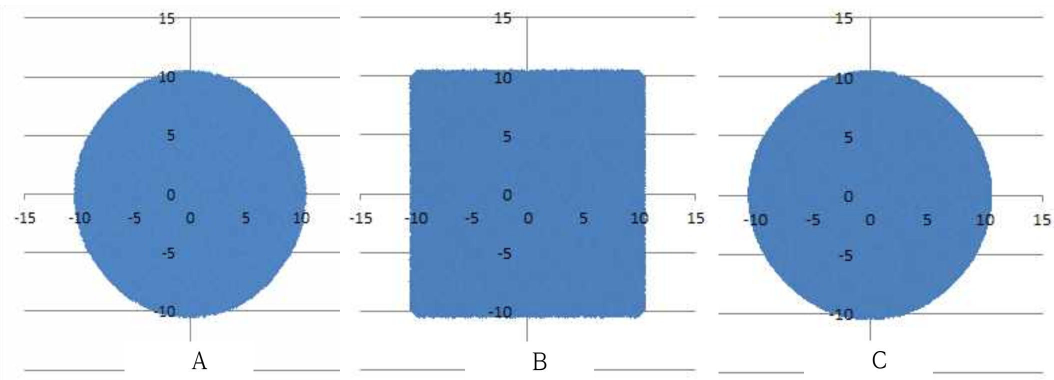
```
Sub Sheet3_직사각형1_Click()

Dim i As Double

For i = 1 To 70000
Cells(i + 1, 1) = -10 + Rnd() * 20
Cells(i + 1, 2) = -Sqr(100 - Cells(i + 1, 1) ^ 2) + 2 * Rnd() * Sqr(100 - Cells(i + 1, 1) ^ 2)
Next i
End Sub
```

[그림 V-5] 교사C 아이디어에 대한 소스코드

매크로의 실행 결과는 엑셀 화면에 나타나도록 설계하도록 설계하였다. 매크로의 실행 결과가 A열부터 B열까지 나타난다. A열에 나타난 x 좌표와 B열에 나타난 y좌표를 이용하여 점 (x,y)가 중심으로부터 반지름이 5인 원의 내부에 포함되는지를 판정하여 내부의 점이면 '1', 외부의 점이면 '0'으로 결과를 C열에 나타낸다. 셀 'D2'에는 70,000개의 점 중 반지름이 5인 원의 내부의 점의 개수를 상대도수로 나타낸 값이다. 매크로 실행 결과가 나타난 엑셀 화면은 [그림 V-6]과 같다.

	A	B	C	D
1	x좌표	y좌표	판정	확률
2	-6.74553	-4.64591	0	0.202629
3	1.06959	1.563327	1	
4	6.039418	-5.21083	0	
5	-7.52803	0.235891	0	
6	-4.29812	-7.75312	0	
7	2.803265	1.738171	1	
8	-0.99423	3.500756	1	
9	5.43871	1.723529	0	
10	-1.1717	7.344397	0	
11	8.773085	-3.76586	0	

[그림 V-6] 시뮬레이션 시행 결과 (C)



[그림 V-7] 몬테카를로 시뮬레이션의 결과 (70,000회 시행)

2. 몬테카를로 시뮬레이션의 결과

세 교사의 아이디어에 대하여 몬테카를로 시뮬레이션을 5회 실시한 결과는 <표 V-1>과 같다.

<표 V-1> 몬테카를로 시뮬레이션 결과

	A	B	C
1회	0.502357	0.251174	0.202629
2회	0.497543	0.248710	0.203900
3회	0.502329	0.247843	0.202757
4회	0.502729	0.250860	0.203186
5회	0.497543	0.247995	0.202886
평균	0.500500	0.249316	0.203072

<표 V-1>에 나타난 시뮬레이션을 5회 시행한 평균으로부터 주어진 확률 문제의 몬테카를로 시뮬레이션에 적합한 난수 생성 아이디어는 교사B의 것임을 알 수 있다.

세 교사의 아이디어를 몬테카를로 시뮬레이션으로 구현한 그래프는 [그림 V-7], [그림 V-8]과 같다. [그림 V-7]은 세 교사의 아이디어에 따라 임의의 점 70,000개가 나타나도록 시뮬레이션 한 그래프이다. 이 그림에서는 모든 점이 선택될 확률이 같게 보인다. 하지만 임의의 점 500개가 나타나도록 시뮬레이션 한 [그림 V-8]에서는 세 교사의 아이디어에 대한 그래프에서 차이가 보인다. 교사B의 그래프는 비교적 균일하게 점이 선택된 반면, 교사A의 그래프에서는 점이 원의 중심 근방에 많이 분포되어 있으며 교사C의 그래프에서는 점 $(\pm 10,0)$의 근방에 많이 분포되어 있다. [그림 V-8]의 점의 분포로부터 주어진 확률 문제의 몬테카를로 시뮬레이션에 적합한 난수 생성 아이디어는 교사B의 것임을 알 수 있다.

2. 수학적 확률의 계산

가. 교사A의 아이디어

실수 r을 닫힌 구간 $[0,10]$에서 임의로 선택한 후, 실수 θ를 구간 $[0,2\pi)$에서 임의로 선택하였으므로 표본공간은

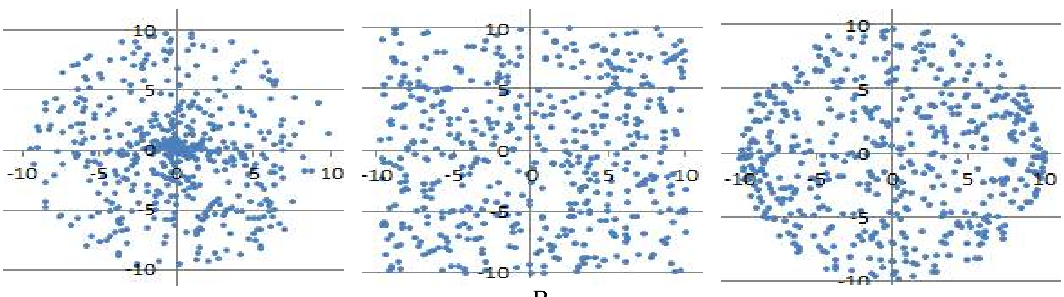
$\{(r,\theta)|0 \le r \le 10, 0 \le \theta \le 2\pi\}$이고, 확률밀도 함수는 $f(r,\theta) = \dfrac{1}{20\pi}$이다.

$$p = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^5 \frac{1}{20\pi} dr d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{10} \frac{1}{20\pi} dr d\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{20\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^5 dr d\theta}{\frac{1}{20\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{10} dr d\theta}$$

$$= \frac{10\pi}{20\pi} = \frac{1}{2}$$

이다.



A B C

[그림 V-8] 몬테카를로 시뮬레이션의 결과 (500회 시행)

나. 교사B의 아이디어

실수 x,y를 닫힌구간 $[-10,10]$에서 임의로 선택하였으므로 표본공간은

$\{(x,y)|-10 \le x,y \le 10\}$이고, 확률밀도함수는 $f(x,y)=\dfrac{1}{400}$이다.

$$p=\frac{\int_{-5}^{5}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}}\frac{1}{400}dydx}{\int_{-10}^{10}\int_{-\sqrt{100-x^2}}^{\sqrt{100-x^2}}\frac{1}{400}dydx}$$

$$=\frac{\frac{1}{400}\int_0^{2\pi}\int_0^5 rdrd\theta}{\frac{1}{400}\int_0^{2\pi}\int_0^{10} rdrd\theta}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}\frac{25}{2}d\theta}{\int_0^{2\pi}50d\theta}$$

$$=\frac{25\pi}{100\pi}=\frac{1}{4}$$

다. 교사C의 아이디어

$-10 \le x \le 10$에서 임의로 선택한 후, $-\sqrt{100-x^2} \le y \le \sqrt{100-x^2}$에서 임의로 선택하였으므로 표본공간은

$\{(x,y)||x| \le 10, -\sqrt{100-x^2} \le y \le \sqrt{100-x^2}\}$이고, 확률밀도함수는

$f(x,y)=\dfrac{1}{40\sqrt{100-x^2}}$이다.

$$p=\frac{\int_{-5}^{5}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}}\frac{1}{40\sqrt{100-x^2}}dydx}{\int_{-10}^{10}\int_{-\sqrt{100-x^2}}^{\sqrt{100-x^2}}\frac{1}{40\sqrt{100-x^2}}dydx}$$

$$=\frac{\int_{-5}^{5}\frac{\sqrt{25-x^2}}{20\sqrt{100-x^2}}dx}{\int_{-10}^{10}\frac{1}{20}dx}$$

$$=\frac{1}{10}\int_0^5\frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{100-x^2}}dx$$

$x=5\sin\theta$라 하면

(준식) $=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2\theta}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4-\sin^2\theta-3}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta)-3}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}\,d\theta-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}}d\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(2E(\frac{1}{2})-\frac{3}{2}K(\frac{1}{2}))^*$$

$$=E(\frac{1}{2})-\frac{3}{4}K(\frac{1}{2})$$

이때, $E(\frac{1}{2})-\frac{3}{4}K(\frac{1}{2})$의 근삿값을 계산하면 0.203이 된다.

세 가지 유형의 난수 생성 아이디어를 수학적

* 제 1종 타원정적분 : $K(k)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta$

제 2종 타원정적분 :$E(k)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$

확률로 계산해 본 결과, 주어진 확률 문제의 몬테카를로 시뮬레이션에 적합한 난수 생성 아이디어는 교사B의 것임을 알 수 있다.

Ⅵ. 연구 결과

1. 반응 분석

본 연구에서는 몬테카를로 시뮬레이션에서의 난수 생성 방법에 관한 이해의 특징을 알아보기 위해 예비교사와 현직교사 35명(이하 학생들)을 대상으로 검사를 실시하였다. 검사 결과, 학생들은 제시된 확률문제를 해결하기 위한 몬테카를로 시뮬레이션의 시행에 있어 적절한 난수 생성 아이디어를 선택하는데 어려움을 나타냈다. 학생들의 반응은 <표 VI-1>로 요약될 수 있다.

<표 VI-1> 지필 검사 결과 분석

	A	B	C
응답자 수	11	11	13
응답 비율	31.43%	31.43%	37.14%

반응에서 교사A와 교사B, 교사C의 아이디어를 선택한 응답자의 비율이 거의 유사하였다. 가장 적절한 난수 생성 아이디어로 여겨지는 교사B의 아이디어는 31.43%의 응답자가 선택하였고, 부적절한 응답자는 약 70%에 해당하였다. 이 결과는 컴퓨터 시뮬레이션의 난수 생성에 관한 교사들의 이해가 부족하다는 판단을 가능하게 한다.

다음으로 교사A와 교사C의 아이디어가 옳다고 선택한 응답자가 자신의 생각을 설명하는 과정에서 나타낸 오류를 살펴보자.

2. 응답자 반응에서 나타난 오류

검사지에 대한 응답자의 반응을 분석한 결과, 다음과 같은 오류를 확인할 수 있었다.

첫째, 연속확률분포에서 한 점 또는 경계가 선택될 확률을 확률밀도함수에 대입한 값과 같다고 판단하였다. 이산확률분포에서 한 점이 선택될 확률은 그 점에서의 확률질량함수의 값과 같다. 하지만 연속확률분포에서 한 점 또는 경계에서의 측도가 0이 되기 때문에 한 점 또는 경계가 선택될 확률은 0이다.

예를 들어 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\begin{cases}1 & (0<x<1)\\ 0 & (x\le 0 \text{ or } x\ge 1)\end{cases}$일 경우, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\frac{1}{2})=0$이지만 $f(\frac{1}{2})=1$이 된다.

[그림 VI-1]에서 응답자는 원점이 나올 확률을 전체의 넓이가 400인 정사각형의 경우에는 $\frac{1}{400}$이 나오며, 전체의 넓이가 100π인 원의 경우에는 $\frac{1}{100\pi}$가 된다고 설명하고 있다. 이는 연속확률분포에서 원점이 나타날 확률은 0이 아닐 수 있다는 오개념에서 비롯된 것으로 판단된다.

[그림 VI-2]에서 응답자는 $x=0$일 때 $-10\le y\le 10$의 확률은 $\frac{1}{10}$이고, $x=1$일 때 $-\sqrt{99}\le y\le\sqrt{99}$의 확률은 $\frac{1}{\sqrt{99}}$가 된다고 설명하고 있다. 이는 연속확률분포에서 경계가 나타날 확률은 0이 아닐 수 있다는 오개념에서 비롯된 것으로 판단된다.

난다고 생각한다. 전체를 넓이가 400인 정사각형 이었을 때의 원점이 나올 확률은 $\frac{1}{400}$이 될 것이고, 나머지의 확률도 모두 $\frac{1}{400}$로 같을 것이다. 그러나 전체의 넓이가 100π인 원에서의 원점이 나올 확률은 $\frac{1}{100\pi}$로 $\frac{1}{400}\neq\frac{1}{100\pi}$ 이기 때문에 B교사의 논리는 문제가 있다.

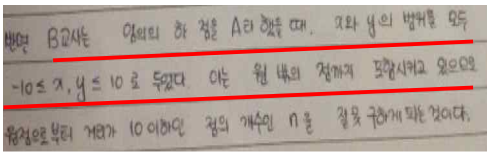
[그림 VI-1] 교사 5의 사례

$x=1$일 때, 범위는 $-10\le y\le 10$이므로 $P(-1\le y\le 1|x=0)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$이다 반면 $x=1$일 때, y의 범위는 $-\sqrt{99}\le y\le\sqrt{99}$이므로 $P(-1\le y\le 1|x=1)=\frac{2}{2\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}$이다.

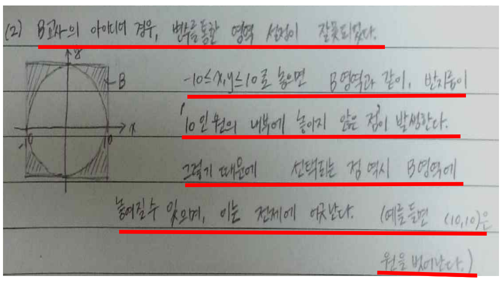
[그림 VI-2] 교사 6의 사례

둘째, 교사B의 아이디어는 조건부확률로 문제를 변형하여 표본공간을 확장한 것임에도 처음 제시된 표본공간으로만 문제를 해석하려고 하였다. 예를 들어, 주사위를 던져 홀수의 눈이 나왔을 때, 나온 눈이 소수일 확률을 구하는 문제를 생각하자. 표본공간을 홀수의 눈이 나오는 사건 S, 소수의 눈이 나오는 사건을 A라 하면 $S=\{1,3,5\}$, $A=\{3,5\}$가 되어 구하고자 하는 확률은 $\frac{2}{3}$이 된다. 또 다른 방법으로는, 표본공간을 주사위를 던져 나올 수 있는 눈의 수를 S, 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,3,5\}$가 되어 구하고자 하는 확률은 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{3}$이 된다. 후자의 경우 전자의 표본공간을 확장하여 조건부확률 로 변형한 문제라 할 수 있다.

[그림 VI-3]과 [그림 VI-4]에서 나타난 것처럼 다수의 학생들은 주어진 과녁의 외부 영역을 포함하고 있어 교사B의 아이디어가 잘못되었다고 주장하였다.

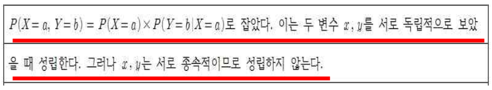


[그림 VI-3] 교사 1의 사례

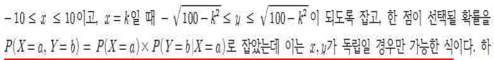


[그림 VI-4] 교사 20의 사례

셋째, 결합확률분포의 조건부확률에 대한 오개념을 보였다. 확률변수 X, Y의 결합확률분포를 $P(X=x, Y=y)$라 하면 조건부확률에 의해 $P(X=x, Y=y)=P(X=x)\times P(Y=y\,|\,X=x)$이 성립한다(Hogg & Craig, 1995, p94). 만약 두 확률변수 X, Y가 독립이면 $P(X=x, Y=y)=P(X=x)\times P(Y=y)$이 성립한다. 그런데 다수의 응답자가 [그림 VI-5]와 [그림 VI-6]과 같이 두 확률변수 X, Y가 독립일 때에만 $P(X=x, Y=y)=P(X=x)\times P(Y=y\,|\,X=x)$이 성립한다고 답했다.


$P(X=a, Y=b) = P(X=a)\times P(Y=b|X=a)$로 잡았다. 이는 두 변수 x, y를 서로 독립적으로 보았을 때 성립한다. 그러나 x, y는 서로 종속적이므로 성립하지 않는다.

[그림 VI-5] 교사 4의 사례


$-10 \le x \le 10$이고, $x=k$일 때 $-\sqrt{100-k^2} \le y \le \sqrt{100-k^2}$이 되도록 잡고, 한 점이 선택될 확률을 $P(X=a, Y=b) = P(X=a)\times P(Y=b|X=a)$로 잡았는데 이는 x, y가 독립일 경우만 가능한 식이다. 하

[그림 VI-6] 교사 7의 사례

세 교사의 아이디어에서 나타난 오류 유형의 빈도를 살펴보면 <표 VI-2>로 요약될 수 있다.

<표 VI-2> 아이디어에 따른 오류별 빈도 수

	A	B	C
오류 1	3	-	5
오류 2	-	19	-
오류 3	-	-	6

Ⅶ. 요약 및 결론

오늘날 확률과 통계 교육에 있어 교육 공학의 중요성은 지속적으로 강조되고 있다. 2009 개정 교육과정에서는 확률과 통계의 지도에 있어 계

산 능력의 배양을 목표로 하지 않는 경우에는 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등을 사용하여 구체적인 조작 활동과 탐구 활동을 통해 학생의 개념, 원리, 법칙을 발견하고 수학 주제에 대해 모둠으로 토론할 수 있는 기회를 제공해야 함을 제시하였다(교육과학기술부, 2012). '제2차 수학교육 종합 계획'에서도 통계 교육에 있어 생활 속에서 나타나는 내용을 활동 중심으로 지도해야 함을 강조하고 있으며, 그 교육 방법으로 공학 도구의 활용을 제시하고 있다(교육부, 2015). 또한 확률의 지도에 있어 컴퓨터 시뮬레이션의 활용에 대한 필요성은 지속적으로 강조되어 왔다(Travers & Gray, 1981; Shaughnessy, 1993; 김상길, 1999; NCTM, 2000; 신동선, 류희찬, 2002; 신보미, 이경화, 2006; 신보미, 이경화, 2008). 그러나 학교 현장에서는 컴퓨터 시뮬레이션의 활용이 잘 이루어지지 않고 있다(신보미, 이경화, 2006). 이에 본 연구에서는 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 통계적으로 접근 가능한 과녁 문제를 해결하기 위한 세 가지 난수 생성 아이디어를 예비교사와 현직교사에게 제시하고, 이 세 가지 몬테카를로 시뮬레이션 난수 생성 아이디어를 어떻게 해석하는지를 분석하였다. 분석 결과는 다음과 같다.

첫째, 예비 교사와 현직 교사는 몬테카를로 시뮬레이션의 난수 생성 아이디어에 대한 이해가 부족하였다. 35명의 응답자 중 11명(31.43%)의 교사만이 옳은 아이디어를 선택하였다. 이로부터 컴퓨터 시뮬레이션을 활용한 확률 지도를 위해, 교사는 컴퓨터 시뮬레이션의 과정에서 사용된 수학적 아이디어를 학습할 필요가 있다는 것을 알 수 있었다.

둘째, 예비 교사와 현직 교사는 확률과 통계의 수학적 지식에 대해 다양한 오류를 보였다. 오류 유형 중에 하나는 확률과 통계 영역에서 잘 알려져 있는 것으로, 연속확률분포에서 한 점이나 영역의 경계가 선택될 확률을 0이 아닌 값으로 계산하는 경우를 들 수 있다. 다른 유형으로, 교사B의 아이디어는 제시된 문제를 표본공간이 확장된 조건부확률 문제로 변형하여 해결한 것임에도 처음 제시된 표본공간으로 문제를 해석하였다. 즉, 조건부확률을 이용하면 표본공간을 확장하여 주어진 문제를 해결할 수 있지만, 다수의 교사는 주어진 과녁 문제의 몬테카를로 시뮬레이션에 있어 과녁의 영역보다 큰 표본 공간을 사용하였기 때문에 몬테카를로 시뮬레이션을 위한 잘못된 아이디어라 답했다. 그 밖에, 결합확률분포의 조건부확률에 대한 오류를 보였다. 일반적으로 확률변수 X, Y에 대해 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x, \mathrm{Y}=y)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)\times\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y \mid \mathrm{X}=x)$이 성립하지만, 다수의 교사들은 두 확률변수 X, Y가 독립일 경우에만 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x, \mathrm{Y}=y)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)\times\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y \mid \mathrm{X}=x)$이 성립하므로 몬테카를로 시뮬레이션을 위한 잘못된 아이디어라고 답하였다.

결과 분석으로부터 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다. 컴퓨터 시뮬레이션을 활용한 확률과 통계의 지도는 학생의 인지적인 측면과 정의적인 측면에 긍정적인 영향을 준다(Shaughnessy, 1993; 김상길, 1999; 신보미, 이경화, 2006; 양은순, 2008). 그러나 이를 학교현장에 적용하기 위해서는 예비교사 교육에 변화가 이루어져야 한다. 예를 들어, 기존 교과서 방식으로 확률과 통계를 지도할 때 일변수 확률분포로 접근 가능한 것이, 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하기 위해 때로는 결합확률분포 등 보다 심도있는 확률과 통계 영역의 지식을 요구할 수 있다. 같은 맥락에서 컴퓨터 시뮬레이션을 활용한 확률과 통계의 지도의 현장 적용을 위해서는 현직교사의 재교육이 필요하다. 결론에서 언급한 세 가지 유형의 오류는 현직교사의 반응에서도 확인된 바 있기 때문이다.

본 연구는 교사들의 몬테카를로 시뮬레이션의 난수 생성 아이디어에 대한 이해를 살펴보고, 교사들의 반응에서 나타난 오류를 분석해 보았다. 향후 컴퓨터 시뮬레이션을 활용한 확률과 통계 교육에 있어, 교사의 시뮬레이션 과정에 대한 이해와 교수학적 효과에 대한 후속 연구가 진행되길 기대한다.

참고문헌

교육과학기술부(2012). **수학과 교육과정**. (교육과학기술부 고시 제 2011-361 [별책 8]). 서울: 우신기획.

교육부(2015). **제2차 수학교육 종합 계획**.

김상길(1999). **컴퓨터 시뮬레이션 프로그램 (Interactive probability)을 이용한 확률 및 기댓값 지도에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

김원경(2011). **교사를 위한 확률과 통계학**. 서울: 교우사.

김원경 외(2014). **고등학교 확률과 통계**. 서울: (주)비상교육.

신동선, 류희찬(2002). **수학교육과 컴퓨터**. 서울: 경문사.

신보미, 이경화(2006). 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 통계적 확률 지도에 대한 연구. **수학교육학연구, 16**(2), 139-156.

신보미, 이경화(2008). 시뮬레이션을 활용한 확률 지식의 교수학적 변환. **수학교육학연구, 18**(1), 25-50.

신항균 외(2014). **고등학교 확률과 통계**. 서울: (주)지학사.

양성민(1998). **시뮬레이션 기초**. 서울: 경성대학교 출판부.

양은순(2008). **중등수학 확률영역에서의 컴퓨터 시뮬레이션 연구**. 부산대학교 교육대학원 석사학위논문.

우정호 외(2014). **고등학교 확률과 통계**. 서울: 두산동아(주).

이강섭 외(2014). **고등학교 확률과 통계**. 서울: (주)미래엔.

이윤석(2012). **몬테카를로 시뮬레이션을 활용한 도로에서 차량 당 CO_2 배출량 연구**. 경기대학교 대학원 석사학위논문.

이준열 외(2014). **고등학교 확률과 통계**. 서울: (주)천재교육.

정상권 외(2014). **고등학교 확률과 통계**. 서울: (주)금성출판사.

조차미, 박종률, 강순자(2008). Bertrand's paradox의 분석을 통한 기하학적 확률에 관한 연구. **학교수학, 10**(2), 181-197.

Anderson, H. L. (1986). Metropolis, Monte Carlo, and the Maniac. *Los Alamos Science, 14*, 96-108.

Chance, B., delMas, R., & Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. In Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.), *The challenge of developing statistics literacy*, 295-323. the Netherlands, BV: Kluwer academic publishers.

Hellekalek, P. (1998). Good random number generators are (not so) easy to find. *Mathematics and computers in simulation, 46*, 485-505.

Hogg, R. V. & Craig, A. T. (2002). **수리통계학개론**(이재창, 이용구 역), 서울: 경문사. (영어 원작은 1995년 출판)

Metropolis, N. (1987). The beginning of the Monte Carlo method. *Los Alamos Science* (1987 Special Issue dedicated to Stanislaw Ulam), 125-130.

NCTM(2000). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Park, S. K. & Miller, K. W. (1988). Random number generators : good ones are hard to find. *Communications of the ACM, 31*(10), 1192-1201.

Shaughnessy, J. M. (1993). Probability and statistics. *Mathematics teacher, 86*(3), 244-248.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In Biddulph, F., & Carr, K. (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1*, 6-22. Rotorua, NZ: University of Waikato.

Tarantola, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation.* Philadelphia, PA: SIAM.

Travers, K. J. & Gray, K. G. (1981). The Monte Carlo method: A fresh approach to teaching probabilistic concepts. *Mathematics teacher, 74*(5), 327-334.

Study on Teachers' Understanding on Generating Random Number in Monte Carlo Simulation

Heo, Nam Gu (Daejeon Songchon High School)
Kang, Hyangim (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to analyze teachers' understanding on generating random number in Monte Carlo simulation and to provide educational implications in school practice. The results showed that the 70% of the teachers selected wrong ideas from three types for random-number as strategies for problem solving a probability problem and also they make some errors to justify their opinion. The first kind of the errors was that the probability of a point or boundary was equal to the value of the probability density function in the continuous probability distribution. The second kind of the errors was that the teachers failed to recognize that the sample space has been changed by conditional probability. The third kind of the errors was that when two random variables X, Y are independence of each other, then only, joint probability distribution is satisfied $P(X=x, Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y \mid X=x)$.

* Key Words : Monte Carlo simulation(몬테카를로 시뮬레이션), Computer simulation(컴퓨터 시뮬레이션), Statistical probability(통계적 확률), Random-number(난수)

논문접수 : 2015. 5. 9
논문수정 : 2015. 5. 30
심사완료 : 2015. 6. 9