



# 보강 아치의 해석 이론

## Analytical Theory for Stiffened Arch Bridges

### 1. 아치의 개요

아치교는 가장 오래된 교량 형식 가운데 하나로써 경간장 60m~200m 범위에서 가장 적용성이 높다고 알려져 있다.<sup>1)</sup>



그림 1 新藤川橋



그림 2 江藤橋



이승우

(株)長大 해외사업본부 해외사업부 이사



아리카도 아키라

(株)長大 해외사업본부 해외사업부장



미우라 켄야

(株)長大 해외사업본부부장

그러나 주변 조건과 재료 선택 등에 따라서는 아치 경간장 250m 이상의 경우에도 충분히 경제적으로 건설된다(그림 1, 2).<sup>2,3)</sup>

아치는 보통 무보강 아치와 보강 아치로 분류되며 무보강 아치는 다시 2회지 아치, 양단 고정 아치 등으로 분류되고 보강 아치는 보강형과 아치 리브 사이의 상대 강성에 따라 랭거 아치, 로제 아치, 타이드 아치 등으로 분류된다.

아치 리브인 상현재와 주형인 하현재를 힘 강성이 작은 부재로 서로 연결하여 아치로서의 특성을 유지하면서 전체 구조계에 작용하는 힘 모멘트를 아치 리브와 주형이 함께 저항하는 구조물을 보강 아치로 정의한다면 보강 아치에 포함되는 대표적인 구조물은 그림 3과 같다.

로제 아치는 각각 상현재 및 하현재를 구성하는 두 하중 전달 부재의 양단을 서로 연결하고 상현재와 하현재를 힘 강성이 작은 부재로 연결한 것이며

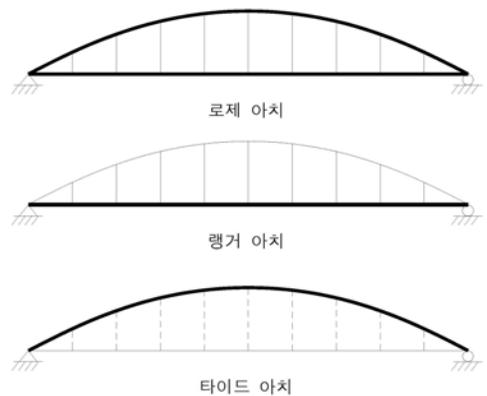


그림 3 보강 아치의 종류

보강 아치의 일종으로 고려할 수 있다.

로제 아치의 경우에 상현재와 하현재의 휨 강성이 동일할 필요는 없고 설계자의 의도대로 상하 현재 사이의 상대 강성을 조절할 수 있다. 아치 리브의 휨 강성을 주형의 휨 강성에 비하여 상당히 작게 설계할 수도 있고 주형의 휨 강성을 아치 리브의 휨 강성에 비하여 상당히 작게 설계할 수도 있다.

휨 강성이 상대적으로 큰 단순보를 축력 만을 전달할 수 있다고 생각할 수 있을 정도로 휨 강성이 작은 아치 형상의 부재로 보강한 것이 랭거 아치이고 하현재의 휨 강성이 상대적으로 작아서 하현재가 인장력 만을 전달할 수 있다고 생각할 수 있는 구조가 타이드 아치이며 모두 보강 아치의 범위에 포함되며 로제 아치의 일종으로 고려할 수 있다.

## 2. 아치 해석 이론

아치의 해석 이론은 크게 고전 이론과 변위법으로 분류된다. 고전 이론은 아치의 구조적 특성을 고려하여 단면력을 구조물의 기하 형상과 하중의 함수로 표현하는 것이며 다양한 구조 형상과 하중 상태에 대하여 이미 closed-form 형태로 해가 구하여졌기 때문에 해의 신뢰도가 높을 뿐만 아니라 계산이 편리하고 수식으로부터 아치 구조의 거동을 쉽게 이해할 수 있다.<sup>4)</sup> 그러나 기본적으로 연직 하중에 대한 면내 거동에 대하여만 해가 구하여졌고 교축 방향 해석, 면외 해석, 지점침하, 온도 변화 등에 대하여는 아직까지 만족할 만한 해가 존재하지 않는다.

1980년대 초반부터 시작된 전자 계산기의 급속한 대중화와 함께 변위법이 교량의 구조 해석에서 본격적으로 적용되기 시작하였다. 교량 구조를 바닥판, 주형, 횡형, 받침, 하부 구조, 기초 등의 개념으로 고려하는 고전 이론과는 달리 변위법은 교량의 전체 구조를 절점과 요소의 집합체로 고려하며 모든 교량 구조에 대하여 동일한 방법으로 구조 해석을 수행하며 고전 이론과는 기본 개념이 전혀 다른 새로운 구조 해석 이론이다.<sup>5)</sup> 변위법은 앞에서 설명한 고전 이론의 모든 문제점을 한꺼번에 해결한 강력한 구조 해석 이론으로서 현재에는 모든 교량 구조에 대하여 표준적인 구조 해석법으로 적용되고 있다.

## 3. 본 연구의 목적

변위법은 교량 형식이나 작용 하중의 특성과는 상관없이 일관된 방법으로 구조 해석을 수행할 수 있으며 트러스 요소나 보 요소를 적용하는 경우, 정적 및 선형 해석의 범위에서는 수렴성이 보장되며 안정적이고 일의적인 해석법이 확립되어 있다.

그러나 변위법은 이론적 특성상 해의 오류를 발견하기 어렵고 이러한 문제점을 해결할 수 있는 새로운 개념의 구조 해석법에 대한 요구가 계속 있어 왔지만 아직까지는 뚜렷한 대안이 없다.

전자 계산기의 발달에 따라서 교량 구조의 경우에 수치 계산의 양이나 복잡함 등은 더 이상 문제가 되지 않으며 과거에 수치 계산의 양을 줄이기 위하여 개발되었던 간이화 이론 등은 현 시점에서 큰 의미가 없고 이론 전개 과정에서의 논리적 정확성과 일관성이 보다 중요한 문제로 대두되었다.

본 연구에서는 전자 계산기의 이용을 전제로 한 보강 아치의 확장된 고전 이론을 설명하고 각 식에 대한 고찰을 통하여 보강 아치의 거동을 설명한다. 그리고 마지막으로 예제를 통하여 변위법 등의 결과와 비교한다.

## 4. 아치의 고전 해석 이론

무보강 아치에 대한 고전 해석 이론은 구조 해석 교과서<sup>6)</sup> 및 공식집<sup>7)</sup> 등에 잘 설명되어 있으나 보강 아치에 대한 선행 연구는 많지 않고 Bleich가 제안한 사연 모멘트법을 행렬의 개념을 도입하여 확장한 쥘의 연구가 대표적이다.<sup>8)</sup>

쥘은 로제 아치를 표준적인 보강 아치로 고려하고 로제 아치의 범용 해석 이론을 확립하여 랭거 아치와 타이드 아치도 로제 아치의 특수한 경우라는 것을 이론적으로 설명하였고 이러한 이론적 연구 성과를 바탕으로 실제 로제 아치의 설계를 수행하였고 완공된 구조물에 대한 실측치와 비교, 검토하여 그가 제시한 해석법의 유효성을 검증하였다.

그러나 쥘의 연구 당시에는 전자 계산기의 용량이 제한되어 있었으므로 쥘은 연구의 상당 부분을 연립 방정식의 해석 과정을 제거하거나 최소화하기 위하여 노력하였고 이를 위하여 인접된 상하 현재 사이에서는 아치 리브와 하현재 사이의 강비가 일정하다는 등의 가정을 도입하였다.

### 4.1 로제 아치의 기본 방정식

행거의 개수가  $n$ 개인 로제 아치의 경우 격간수는  $(n+1)$ 개이며 격간장이  $\lambda$  로 동일하다고 가정하면 전체 시간장은  $L=(n+1)\lambda$  이 된다. 이 경우 적절한 부정정량을 선정하면 이들 부정정량을 미지수로 하는  $(n+1)$ 개의 연립 방정식이 얻어진다.

상현재의 격점 모멘트  $M_k^{top}$ 과 현재 축력의 수평 성분  $H$ 를 부정정량으로 선택한다면 다음과 같은 가정 하에서 삼연 모멘트 정리를 응용하여 보강 아치의 구조 해석을 수행할 수 있다.

(1) 격간장  $\lambda$  는 전 격간에 걸쳐 일정하다.

- (2) 하중은 모두 격점에만 작용한다.
- (3) 행거 축 변형의 영향은 무시할 수 있을 정도로 작다.
- (4) 각 격간 내에서 현재는 직선 부재로 고려한다.
- (5) 각 격간 내에서 단면 제원은 일정하다.
- (6) 현재의 축 변형과 전단 변형의 영향은 무시할 수 있을 정도로 작다.

본 연구에서 적용하는 주요한 기호를 정리하면 다음과 같다.

- $A_k^{top}$  : 행거 (k-1), (k)사이(격간 k)에서 상현재의 단면적
- $A_k^{bot}$  : 행거 (k-1), (k)사이(격간 k)에서 하현재의 단면적
- $E$  : 탄성 계수
- $[E]$  : 단위 행렬
- $H_i$  : 하중 경우 I에 대하여 현재 축력의 수평 성분, 전 부재에 대하여 일정하며 하현재에서는 인장이 (+), 상현재에서는 압축이 (+)
- $h_k$  : 격점 k에서 행거의 길이
- $I_k^{top}$  : 행거 (k-1),(k)사이 (격간 k)에서 상현재의 관성 모멘트
- $I_k^{bot}$  : 행거 (k-1),(k)사이 (격간 k)에서 하현재의 관성 모멘트
- $K_k^{top}$  : 행거 (k-1),(k)사이 (격간 k)에서 상현재의 강성비 ( $=L_k^{top}/I_k^{top}$ )
- $K_k^{bot}$  : 행거 (k-1),(k)사이 (격간 k)에서 하현재의 강성비 ( $=L_k^{bot}/I_k^{bot}$ )
- $L=(n+1)\lambda$  : 지간장
- $L_k^{top}$  : 행거 (k-1),(k) 사이 (격간 k)에서 상현재의 길이
- $L_k^{bot}$  : 행거 (k-1),(k) 사이 (격간 k)에서 하현재의 길이
- $M_{k,i}^{top}$  : 하중 경우 i에 대하여 상현 격점 (k)에서 휨 모멘트, 부재에 하향으로 처짐을 발생시키는 휨 모멘트가 (+)
- $M_{k,i}^{bot}$  : 하중 경우 i에 대하여 하현 격점 (k)에서 휨 모멘트, 부재에 하향으로 처짐을 발생시키는 휨 모멘트가 (+)
- $m_{k,i}$  : 하중 경우 i에 대하여 격점 k에서 전체계의 단순 보로서의 휨 모멘트
- $m_{k,i}^{top}$  : 하중 경우 i에 대하여 격점 k에서 상현재의 단순 보로서의 휨 모멘트
- $m_{k,i}^{bot}$  : 하중 경우 i에 대하여 격점 k에서 하현재의 단순 보로서의 휨 모멘트
- $n$  : 행거의 개수
- $N_{k,i}^{top}$  : 하중 경우 i에 대하여 상현재의 격간 k에서의 축

- 력, 인장이 (+)
- $N_{k,i}^{bot}$  : 하중 경우 i에 대하여 하현재의 격간 k에서의 축력, 인장이 (+)
- $Q_{k,i}^{top}$  : 하중 경우 i에 대하여 상현 격점 k의 우측에서 상현재에 작용하는 부재 축에 수직 방향 전단력
- $Q_{k,i}^{bot}$  : 하중 경우 i에 대하여 하현 격점 k의 우측에서 하현재에 작용하는 부재 축에 수직 방향 전단력
- $t$  : 휨 모멘트 분배 계수
- $V_{k,i}^{top}$  : 하중 경우 i에 대하여 상현 격점 k의 우측에서 상현재에 작용하는 중력 방향 전단력
- $V_{k,i}^{bot}$  : 하중 경우 i에 대하여 하현 격점 k의 우측에서 하현재에 작용하는 중력 방향 전단력
- $Z_{k,i}$  : 하중 경우 i에 대하여 격점 k에서 행거 축력
- $\alpha_k$  : 행거 (k-1),(k) 사이 (격간 k)에서 상현재가 지점 (0),(n+1)을 연결하는 선과 이루는 각, 반시계 방향이 (+)
- $\beta_k$  : 행거 (k-1),(k) 사이 (격간 k)에서 하현재가 지점 (0),(n+1)을 연결하는 선과 이루는 각, 시계 방향이 (+)
- $\Delta L$  : 부재의 신장량
- $\lambda$  : 격간장
- $\theta_k^{top}$  : 행거 (k-1),(k)사이 (격간 k)에서 상현재의 회전각
- $\theta_k^{bot}$  : 행거 (k-1),(k)사이 (격간 k)에서 하현재의 회전각
- $\theta_k^v$  : 격간(k)에서 행거의 회전각

### 4.3 삼연 모멘트 방정식

보강 아치의 양단, 즉 격점 (0) 및 격점 (n+1)의 두점에서 상하 현재가 힌지 연결되어 있다고 가정하면 상하 현재 각각에 대하여 (0)점에서 (n+1)점 방향으로 삼연 모멘트 정리를 적용시켜 갈 수 있다. 행거가 현재와 힌지 연결되어 있다고 가정하면 모멘트 방정식에서는 고려할 필요가 없다.

그림 4에 보이는 로제 아치의 임의 격점(k)에 대하여 이 점을 중심으로 상하 현재 각각에 삼연 모멘트 방정식을 적용하면 다음 두식이 얻어진다(이하에서는 영향선에 대한 논의 이외에서는 하중 상태를 의미하는 첨자 i는 생략한다).

상현재에 대하여

$$K_k^{top} M_{k-1}^{top} + 2(K_k^{top} + K_{k+1}^{top}) M_k^{top} + K_{k+1}^{top} M_{k+1}^{top} - 6E(\theta_k^{top} - \theta_{k+1}^{top}) = 0 \tag{1}$$

하현재에 대하여

$$K_k^{bot} M_{k-1}^{bot} + 2(K_k^{bot} + K_{k+1}^{bot})M_k^{bot} + K_{k+1}^{bot} M_{k+1}^{bot} - 6E(\theta_k^{bot} - \theta_{k+1}^{bot}) = 0 \quad (2)$$

연속 조건으로 부재의 신장량  $\Delta L$ 과 회전각  $\theta$  와의 관계를 고려한다. 그림 5와 같이 1, 2, ..., n으로 구성되는 구조물이 하중 작용 후에 점선 1', 2', ..., n'으로 변형하고 변형 후 각 부재의 회전각을  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 이라고 한다. 그림 5에서 부재 (1)-(n)의 방향은 변화하지 않는다고 가정한다. 각  $\alpha$  는 변호가 낮은 단부에서 x축의 정방향으로부터 반시계 방향으로 측정된 부재의 각도이다.  $\Delta L$ 은 부재의 신장을 정으로 하고  $\theta$  는 각도  $\alpha$  의 감소를 정으로 한다. 따라서 변호가 앞선 단부에서 시계 방향의 회전이 정의  $\theta$  에 대응한다.

폐합 구조물이므로 변형 전후의 각 상태에 대하여 각 변을 x축 및 y축에 투영하면 각 투영의 전체 합은 0이 된다.

변형 전

$$\sum(L\cos\alpha) = 0 \quad (3)$$

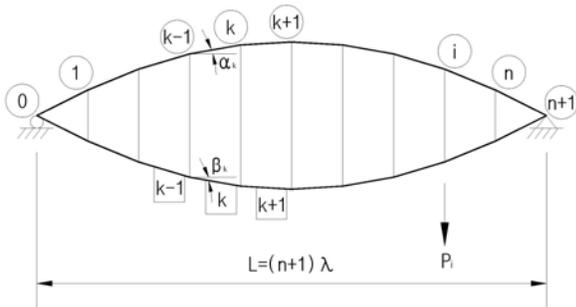


그림 4 로제 아치 일반도

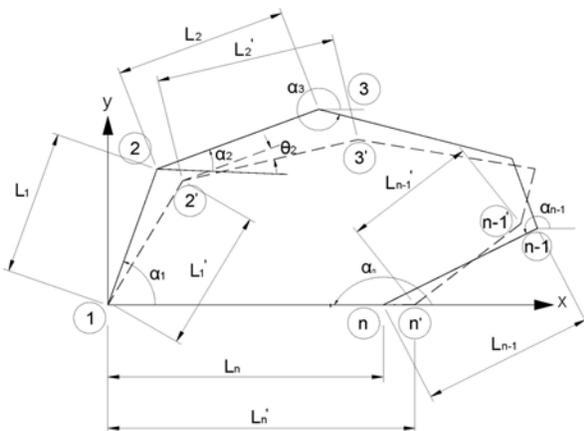


그림 5 변형 발생 전후의 형상

$$\sum(L\sin\alpha) = 0 \quad (4)$$

변형 후

$$\sum\{(L + \Delta L)\cos(\alpha - \theta)\} = 0 \quad (5)$$

$$\sum\{(L + \Delta L)\sin(\alpha - \theta)\} = 0 \quad (6)$$

식 (5)를 전개하면

$$= \sum\{(L + \Delta L)(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta)\}$$

$\theta$  는 작은 값이므로 근사적으로  $\cos\theta \approx 1, \sin\theta \approx \theta$  라고 가정하면

$$= \sum\{(L + \Delta L)(\cos\alpha + \theta\sin\alpha)\}$$

$$= \sum(L\cos\alpha + \Delta L\cos\alpha + \theta L\sin\alpha + \theta\Delta L\sin\alpha)$$

식 (3)을 대입하고 미소항  $\theta$  와 역시 미소항인  $\Delta L$ 의 곱으로 표현되는( $\Delta L\sin\alpha$ )의 영향을 무시하면 최종적으로

$$\sum(\Delta L\cos\alpha + \theta L\sin\alpha) = 0 \quad (7)$$

같은 방법으로

$$\sum(\Delta L\sin\alpha + \theta L\cos\alpha) = 0 \quad (8)$$

식 (7), (8)을 로제 아치의 (k)번째 격간과 (k+1)번째 격간에 대하여 적용한다.

행거 신장의 영향을 무시하면(k)번째 격간에 대하여는 그림 6으로 부터

$$\Delta L_k^{top} \cos\alpha_k + \Delta L_k^{bot} \cos(\pi - \beta_k) + \theta_{k-1}^v h_{k-1} \sin \frac{\pi}{2} + \theta_k^{top} L_k^{top} \sin\alpha_k + \theta_k^v h_k \sin \left(\frac{3}{2}\pi\right) + \theta_k^{bot} L_k^{bot} \sin(\pi - \beta_k) = 0$$

$$\Delta L_k^{top} \sin\alpha_k + \Delta L_k^{bot} \sin(\pi - \beta_k) - \theta_{k-1}^v h_{k-1} \cos \frac{\pi}{2} - \theta_k^{top} L_k^{top} \cos\alpha_k - \theta_k^v h_k \cos \left(\frac{3}{2}\pi\right) - \theta_k^{bot} L_k^{bot} \cos(\pi - \beta_k) = 0$$

각각을 정리하면

$$\Delta L_k^{top} \cos\alpha_k - \Delta L_k^{bot} \cos\beta_k + \theta_{k-1}^v h_{k-1} + \theta_k^{top} L_k^{top} \sin\alpha_k - \theta_k^v h_k + \theta_k^{bot} L_k^{bot} \sin\beta_k = 0$$

$$\Delta L_k^{top} \sin\alpha_k + \Delta L_k^{bot} \sin\beta_k - \theta_k^{top} L_k^{top} \cos\alpha_k + \theta_k^{bot} L_k^{bot} \cos\beta_k = 0$$

같은 방법으로 (k+1)번째 격간에 대하여는

$$\Delta L_{k+1}^{top} \cos \alpha_{k+1} - \Delta L_{k+1}^{bot} \cos \beta_{k+1} + \theta_{k+1}^v h_k + \theta_{k+1}^{top} L_{k+1}^{top} \sin \alpha_{k+1} -$$

$$\theta_{k+1}^v h_{k+1} + \theta_{k+1}^{bot} L_{k+1}^{bot} \sin \beta_{k+1} = 0$$

$$\Delta L_{k+1}^{top} \sin \alpha_{k+1} + \Delta L_{k+1}^{bot} \sin \beta_{k+1} - \theta_{k+1}^{top} L_{k+1}^{top} \cos \alpha_{k+1} +$$

$$\theta_{k+1}^{bot} L_{k+1}^{bot} \cos \beta_{k+1} = 0$$

여기에

$$L_k^{top} \cos \alpha_k = L_k^{bot} \cos \beta_k = \lambda \quad (9)$$

$$L_k^{top} \sin \alpha_k = \lambda \tan \alpha \quad (10)$$

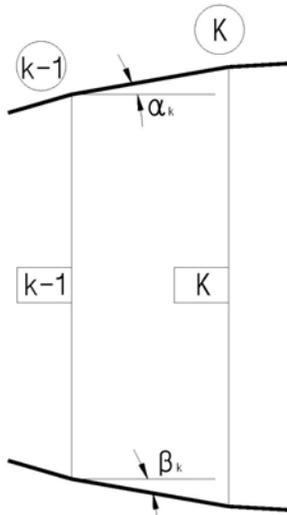


그림 6 격간k에서의 연속 조건

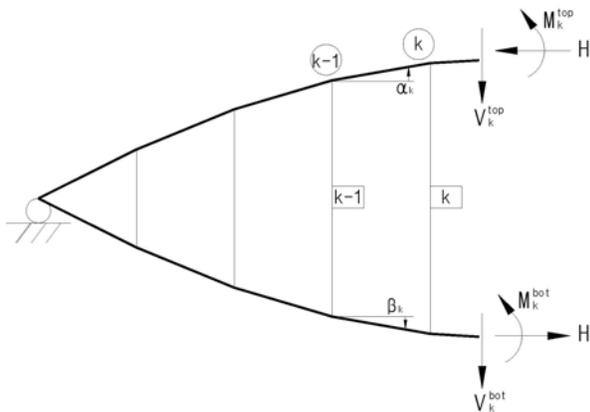


그림 7 로제 아치 자유 물체도

$$L_k^{bot} \sin \beta_k = \lambda \tan \beta \quad (11)$$

을 대입하고 정리하면

$$\Delta L_k^{top} \cos \alpha_k - \Delta L_k^{bot} \cos \beta_k + (\theta_{k-1}^v h_{k-1} - \theta_k^v h_k) + \lambda(\theta_k^{top} \tan \alpha_k + \theta_k^{bot} \tan \beta_k) = 0 \quad (12)$$

$$\Delta L_k^{top} \sin \alpha_k + \Delta L_k^{bot} \sin \beta_k + \lambda(-\theta_k^{top} + \theta_k^{bot}) = 0 \quad (13)$$

$$\Delta L_{k+1}^{top} \cos \alpha_{k+1} - \Delta L_{k+1}^{bot} \cos \beta_{k+1} + (\theta_k^{bot} h_k - \theta_{k+1}^{top} h_{k+1}) + \lambda(\theta_{k+1}^{top} \tan \alpha_{k+1} + \theta_{k+1}^{bot} \tan \beta_{k+1}) = 0 \quad (14)$$

$$\Delta L_{k+1}^{top} \sin \alpha_{k+1} + \Delta L_{k+1}^{bot} \sin \beta_{k+1} + \lambda(-\theta_{k+1}^{top} + \theta_{k+1}^{bot}) = 0 \quad (15)$$

식 (12), (14)를 이용하여 식 (1), (2)에서  $(\theta_k^{top} - \theta_k^{bot})$ ,  $(\theta_{k+1}^{top} - \theta_{k+1}^{bot})$ 를 제거하면

$$K_k^{top} M_{k-1}^{top} - K_k^{bot} M_{k-1}^{bot} + 2\{(K_k^{top} + K_{k+1}^{top})M_k^{top} - (K_k^{bot} + K_{k+1}^{bot})M_k^{bot}\} + K_{k+1}^{top} M_{k+1}^{top} - K_{k+1}^{bot} M_{k+1}^{bot} - \frac{6E}{\lambda}(\Delta L_k^{top} \sin \alpha_k - \Delta L_{k+1}^{top} \sin \alpha_{k+1} + \Delta L_k^{bot} \sin \beta_k - \Delta L_{k+1}^{bot} \sin \beta_{k+1}) = 0 \quad (16)$$

식 (16)에는 부재 회전각의 항이 포함되어 있지 않으며 이 식은 격점 k에 대하여 구한 것 이므로 k=1, 2, ..., n을 차례로 대입하면 n개의 식이 얻어진다. 그러나 로제 아치는 (n+1)차 부정정 구조물이므로 한개의 식이 추가로 필요하다.

그림 7과 같이 격점 k의 바로 우측에서 로제 아치를 연직 방향으로 절단하고 좌측 부분에 대하여 평형 조건식을 고려하면

$$M_k^{top} + M_k^{bot} = m_k - h_k H \quad (17)$$

식 (17)에서  $m_k$ 는 작용 하중에 대한 로제 아치의 단순보로서의 휨 모멘트이며  $m_k - h_k H$ 는 로제 아치의 아치 구조계로서의 휨 모멘트로서 상하 현재의 휨 모멘트 합계  $M_k^{top} + M_k^{bot}$ 을 의미한다.

$$M_k^{bot} = (m_k - h_k H) - M_k^{top} \quad (18)$$

를 식 (16)에 대입하고 정리하면

$$\begin{aligned}
 & K_k^{top} M_{k-1}^{top} - K_k^{bot} (m_{k-1} - h_{k-1}H - M_{k-1}^{top}) + 2\{(K_k^{top} + K_{k+1}^{top})M_k^{top} - \\
 & (K_k^{bot} + K_{k+1}^{bot})(m_k - h_kH - M_k^{top})\} \\
 & + K_{k+1}^{top} M_{k+1}^{top} - K_{k+1}^{bot} (m_{k+1} - h_{k+1}H - M_{k+1}^{top}) \\
 & - \frac{6E}{\lambda} (\Delta L_k^{top} \sin \alpha_k - \Delta L_{k+1}^{top} \sin \alpha_{k+1} + \Delta L_k^{bot} \sin \beta_k - \Delta L_{k+1}^{bot} \sin \beta_{k+1}) = 0 \\
 & (K_k^{top} + K_{k+1}^{top})M_{k-1}^{top} + 2\{(K_k^{top} + K_{k+1}^{top}) + (K_{k+1}^{top} + K_{k+2}^{top})\}M_k^{top} + \\
 & (K_{k+1}^{top} + K_{k+2}^{top})M_{k+1}^{top} \\
 & - \{K_k^{bot} m_{k-1} + 2(K_k^{bot} + K_{k+1}^{bot})m_k + K_{k+1}^{bot} m_{k+1}\} \\
 & + \{K_k^{bot} h_{k-1} + 2(K_k^{bot} + K_{k+1}^{bot})h_k + K_{k+1}^{bot} h_{k+1}\}H \\
 & - \frac{6E}{\lambda} (\Delta L_k^{top} \sin \alpha_k - \Delta L_{k+1}^{top} \sin \alpha_{k+1} + \Delta L_k^{bot} \sin \beta_k - \Delta L_{k+1}^{bot} \sin \beta_{k+1}) = 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

상하 현재의 길이 변화  $\Delta L_k^{top}$  및  $\Delta L_k^{bot}$ 를 계산할 때 전단력의 영향을 무시한다면 부재의 축력  $N_k^{top}$  및  $N_k^{bot}$ 는 각각

$$N_k^{top} = -H \cos \alpha_k - V_{k-1}^{top} \sin \alpha_k \tag{20}$$

$$\approx -H \cos \alpha_k \tag{21}$$

$$N_k^{bot} = H \cos \beta_k + V_{k-1}^{bot} \sin \beta_k \tag{22}$$

$$\approx H \cos \beta_k \tag{23}$$

따라서 상하 현재의 길이 변화  $\Delta L_k^{top}$  및  $\Delta L_k^{bot}$ 는 근사적으로

$$\Delta L_k^{top} = \frac{N_k^{top} L_k^{top}}{EA_k^{top}} \approx \frac{(-H)(L_k^{top} \cos \alpha_k)}{EA_k^{top}} = -\frac{H\lambda}{EA_k^{top}} \tag{24}$$

$$\Delta L_k^{bot} = \frac{N_k^{bot} L_k^{bot}}{EA_k^{bot}} \approx \frac{(H)(L_k^{bot} \cos \beta_k)}{EA_k^{bot}} = \frac{H\lambda}{EA_k^{bot}} \tag{25}$$

식 (24), (25)를 식(19)에 대입하면 부정정량  $M_1^{top}$ ,  $M_2^{top}$ , ...,  $M_n^{top}$  및  $H$ 에 대한 기본식은

$$\begin{aligned}
 & (K_k^{top} + K_{k+1}^{top})M_{k-1}^{top} + 2\{(K_k^{top} + K_{k+1}^{top}) + \\
 & (K_{k+1}^{top} + K_{k+2}^{top})\}M_k^{top} + (K_{k+1}^{top} + K_{k+2}^{top})M_{k+1}^{top} \\
 & - \{K_k^{bot} m_{k-1} + 2(K_k^{bot} + K_{k+1}^{bot})m_k + K_{k+1}^{bot} m_{k+1}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \{K_k^{bot} h_{k-1} + 2(K_k^{bot} + K_{k+1}^{bot})h_k + K_{k+1}^{bot} h_{k+1}\}H \\
 & + 6H \left\{ \left( \frac{1}{A_k^{top}} \right) \sin \alpha_k - \left( \frac{1}{A_{k+1}^{top}} \right) \sin \alpha_{k+1} - \right. \\
 & \left. \left( \frac{1}{A_k^{bot}} \right) \sin \beta_k + \left( \frac{1}{A_{k+1}^{bot}} \right) \sin \beta_{k+1} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

일반적으로 부재의 길이 변화 영향은 무시할 수 있을 정도로 작기 때문에 좌변에서 마지막 항의 영향을 무시하면

$$\begin{aligned}
 & (K_k^{top} + K_{k+1}^{top})M_{k-1}^{top} + 2\{(K_k^{top} + K_{k+1}^{top}) + \\
 & (K_{k+1}^{top} + K_{k+2}^{top})\}M_k^{top} + (K_{k+1}^{top} + K_{k+2}^{top})M_{k+1}^{top} \\
 & - \{K_k^{bot} m_{k-1} + 2(K_k^{bot} + K_{k+1}^{bot})m_k + K_{k+1}^{bot} m_{k+1}\} \\
 & + \{K_k^{bot} h_{k-1} + 2(K_k^{bot} + K_{k+1}^{bot})h_k + K_{k+1}^{bot} h_{k+1}\}H = 0
 \end{aligned} \tag{26}$$

식 (26)으로부터 상현재의 격점 모멘트  $M_k^{top}$ 은 구조계의 기하 특성  $K_k$ 와 하중  $m_k$  및 현재 축력의 수평 성분  $H$ 의 함수라는 것을 알 수 있다. 즉 구조계에 작용하는 하중으로 인한 현재 축력의 수평 성분을 알고 있다면 식 (26)으로 상현재의 격점 모멘트는 쉽게 구할 수 있다.

### 4.3 적합 조건식

식 (1)의 각 항에 각각  $h_1, h_2, \dots, h_n$ 을 차례로 곱하고 전체 항을 합산하면

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \{ [K_k^{top} M_{k-1}^{top} + 2(K_k^{top} + K_{k+1}^{top})M_k^{top} + K_{k+1}^{top} M_{k+1}^{top}] h_k \} - \\
 & 6E \sum_{k=1}^n \{ (\theta_k^{top} - \theta_{k+1}^{top}) h_k \} = 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

제1항을  $M_k^{top}$ 의 값을 기준으로 다시 정리하면

$$\begin{aligned}
 & \dots + \{K_{k-1}^{top} h_{k-1} M_k^{top} + 2(K_{k-1}^{top} + K_k^{top}) h_{k-1} M_{k-1}^{top} + \\
 & K_k^{top} h_{k-1} M_k^{top}\} \\
 & + \{K_k^{top} h_k M_{k-1}^{top} + 2(K_k^{top} + K_{k+1}^{top}) h_k M_k^{top} + \\
 & K_{k+1}^{top} h_k M_{k+1}^{top}\} \\
 & + \{K_{k+1}^{top} h_{k+1} M_k^{top} + 2(K_{k+1}^{top} + K_{k+2}^{top}) h_{k+1} M_{k+1}^{top} + \\
 & K_{k+2}^{top} h_{k+2} M_{k+2}^{top}\} + \dots \\
 & = \sum_{k=1}^n \{ [K_k^{top} h_{k-1} + 2(K_k^{top} + K_{k+1}^{top}) h_k + K_{k+1}^{top} h_{k+1}] M_k^{top} \}
 \end{aligned} \tag{28}$$

제2항을 풀어 쓰면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{(\theta_k^{top} - \theta_{k+1}^{top})h_k\} &= \sum_{k=1}^n (\theta_k^{top}h_k - \theta_{k+1}^{top}h_k) \\ &= (\theta_1^{top}h_1 - \theta_2^{top}h_1) + (\theta_2^{top}h_2 - \theta_3^{top}h_2) + \dots + \\ &(\theta_k^{top}h_k - \theta_{k+1}^{top}h_k) + \dots \\ &+ (\theta_{n-1}^{top}h_{n-1} - \theta_n^{top}h_{n-1}) + (\theta_n^{top}h_n - \theta_{n+1}^{top}h_n) \\ &= \theta_1^{top}(h_1) + \theta_2^{top}(h_2 - h_1) + \dots + \theta_k^{top}(h_k - h_{k-1}) + \dots + \\ &\theta_n^{top}(h_n - h_{n-1}) + \theta_{n+1}^{top}(h_n) \end{aligned}$$

간단히 표현하기 위하여 처음 항과 마지막 항에  $h_0=h_{n+1}=0$ 을 삽입하면

$$\begin{aligned} &= \theta_1^{top}(h_1 - h_0) + \theta_2^{top}(h_2 - h_1) + \dots + \theta_k^{top}(h_k - h_{k-1}) + \dots + \\ &\theta_n^{top}(h_n - h_{n-1}) + \theta_{n+1}^{top}(h_{n+1} - h_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \{\theta_k^{top}(h_k - h_{k-1})\} \end{aligned} \quad (29)$$

식 (28), (29)를 식 (27)에 대입하면

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n [\{K_k^{top}h_{k-1} + 2(K_k^{top} + K_{k+1}^{top})h_k + K_{k+1}^{top}h_{k+1}\}M_k^{top}] - \\ &6E \sum_{k=1}^{n+1} \{\theta_k^{top}(h_k - h_{k-1})\} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

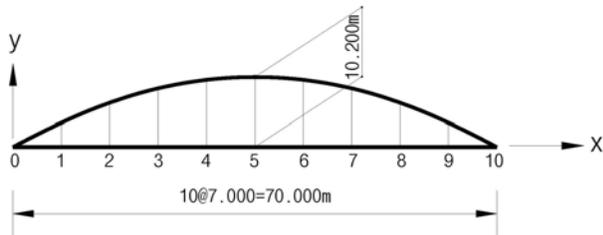


그림 8 기본 치수

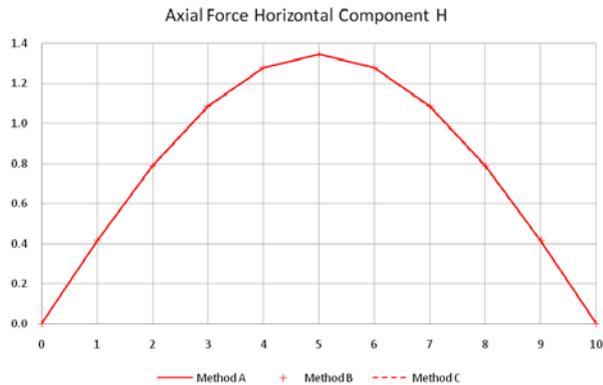


그림 9 H의 영향선

식 (12), (14)에서  $\lambda \theta_k^{bot}$ 를 제거하면

$$\begin{aligned} &\Delta L_k^{top} \cos \alpha_k - \Delta L_k^{bot} \cos \beta_k + (\theta_{k-1}^v h_{k-1} - \theta_k^v h_k) + \\ &\lambda \theta_k^{top} \tan \alpha_k \\ &+ \{\lambda \theta_k^{top} - (\Delta L_k^{top} \sin \alpha_k + \Delta L_k^{bot} \sin \beta_k)\} \tan \beta_k = 0 \end{aligned}$$

여기서  $k=1, 2, \dots, n, n+1$ 이므로  $(n+1)$ 개의 식이 얻어진다. 이들 식을 모두 합산하면  $\theta_k^v h_k$ 의 전항이 소거되면서 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n+1} \{\Delta L_k^{top} (\cos \alpha_k - \sin \alpha_k \tan \beta_k) - \Delta L_k^{bot} (\cos \beta_k + \sin \beta_k \tan \beta_k)\} + \\ &\sum_{k=1}^{n+1} \{\lambda \theta_k^{top} (\tan \alpha_k + \tan \beta_k)\} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

식 (31)의 제1항을 정리하면

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n+1} \left( \Delta L_k^{top} \frac{\cos \alpha_k \cos \beta_k - \sin \alpha_k \sin \beta_k}{\cos \beta_k} - \Delta L_k^{bot} \frac{\cos^2 \beta_k + \sin^2 \beta_k}{\cos \beta_k} \right) = \\ &\sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \Delta L_k^{top} \frac{\cos(\alpha_k + \beta_k)}{\cos \beta_k} - \Delta L_k^{bot} \frac{1}{\cos \beta_k} \right\} \end{aligned}$$

부재의 길이 변화  $\Delta L_k^{top}$  및  $\Delta L_k^{bot}$ 에 대한 근사식 (24), (25)을 대입하면

$$\begin{aligned} &\approx \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \left( -\frac{H\lambda}{EA_k^{top}} \right) \frac{\cos(\alpha_k + \beta_k)}{\cos \beta_k} - \left( \frac{H\lambda}{EA_k^{bot}} \right) \frac{1}{\cos \beta_k} \right\} \\ &= -\frac{\lambda H}{E} \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \left( \frac{1}{A_k^{top}} \right) \frac{\cos(\alpha_k + \beta_k)}{\cos \beta_k} + \left( \frac{1}{A_k^{bot}} \right) \frac{1}{\cos \beta_k} \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

식 (31)의 제2항에서

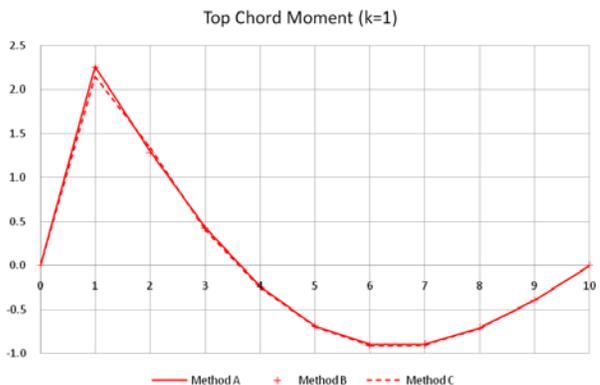


그림 10  $M_1^{top}$ 의 영향선

표 1 가정 단면 제원

격간	상현재		하현재	
	단면적(cm <sup>2</sup> )	관성 모멘트(cm <sup>4</sup> )	단면적(cm <sup>2</sup> )	관성 모멘트(cm <sup>4</sup> )
1	546	965910	524	925697
2	532	865083	"	"
3	518	770887	"	"
4	504	683144	"	"
5	490	601680	"	"

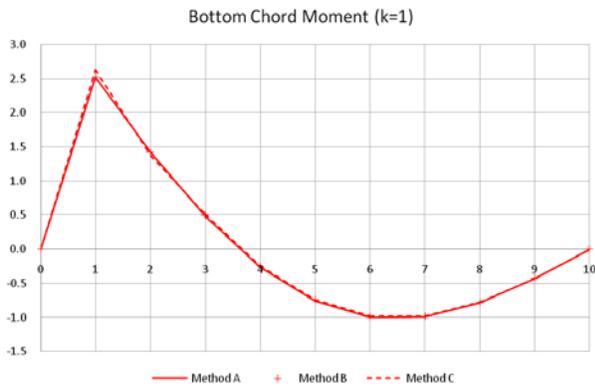


그림 11 M<sub>1</sub><sup>bot</sup>의 영향선

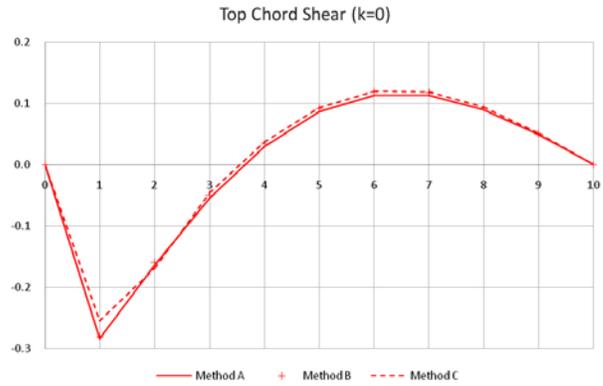


그림 12 Q<sub>0</sub><sup>top</sup>의 영향선

$$\lambda(\tan\alpha_k + \tan\beta_k) = h_k - h_{k-1} \quad (33)$$

이므로

식 (31)에 식 (32), (33)을 대입하면

$$-\frac{\lambda H}{E} \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \left( \frac{1}{A_k^{top}} \right) \frac{\cos(\alpha_k + \beta_k)}{\cos\beta_k} + \left( \frac{1}{A_k^{bot}} \right) \frac{1}{\cos\beta_k} \right\} + \sum_{k=1}^{n+1} \theta_k^{top} (h_k - h_{k-1}) = 0 \quad (34)$$

식 (34)를 식 (30)에 대입하면

$$\sum_{k=1}^n \left[ \{ K_k^{top} h_{k-1} + 2(K_k^{top} + K_{k+1}^{top}) h_k + K_{k+1}^{top} h_{k+1} \} M_k^{top} \right] - 6\lambda H \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \left( \frac{1}{A_k^{top}} \right) \frac{\cos(\alpha_k + \beta_k)}{\cos\beta_k} + \left( \frac{1}{A_k^{bot}} \right) \frac{1}{\cos\beta_k} \right\} = 0 \quad (35)$$

식 (35)가 로제 아치의 적합 조건식이며 가정된 H와 가정된 H를 이용하여 식(26)으로 계산한 상현재의 격점 휨 모멘트가 식(35)를 만족할 때까지 반복 계산하며 전자 계산기의 사용을 전제로 한다면 수치 해석상의 어려움은 없다. 이렇게 상현재의 격점 휨 모멘트가 구하여지면 식(18)로 하현재의 격점 휨 모멘트를 구한다.

이렇게 휨 모멘트가 구하여지면 상하 현재의 전단력, 축력 및 행거 축력은 모두 힘의 평형을 고려하여 쉽게 구할 수 있다.

## 5. 수치 해석 예제

고전 이론(Method A)으로 영향선 해석을 수행하고 변위법에 의한 결과와 비교한다. 변위법 해석 모형의 제반 치수는 그림 8 및 표 1과 같다. 변위법 해석 모형에서 행거는 축 강성이 무한대인 경우(Method B)와 행거 2 및 8의 단면적은 96.96cm<sup>2</sup>, 나머지 행거의 단면적은 69.12cm<sup>2</sup>인 경우(Method C)에 대하여 고려하였다.

### 5.1 H의 영향선

그림 9에서 본 방법에 의한 H의 영향선은 변위법의 결과와 잘 일치하며 행거의 축 강성에 따른 변화도 거의 없다는 것을 알 수 있다. 이는 하현재가 수평으로서 행거의 축 강성과 현재의 축력이 상호 간에 서로 영향을 미치지 않기 때문이라고 사료된다.

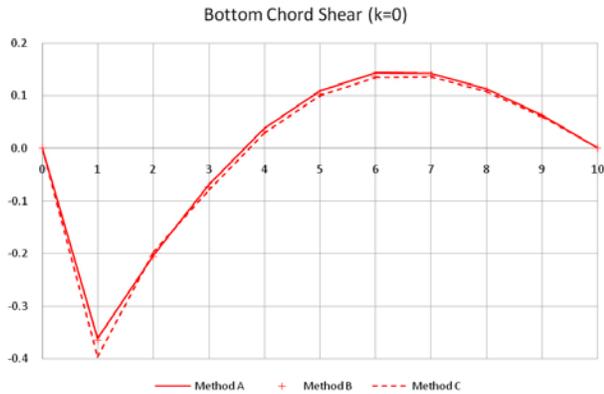


그림 13  $Q_0^{bot}$ 의 영향선

### 5.3 $M_1^{top}$ 의 영향선

격점 1에 대한 상현재 휨 모멘트의 영향선인 그림 10을 보면 본 방법(Method A)의 결과가 변위법에서 행거 신축의 영향을 무시하는 경우(Method B)의 결과와는 잘 일치하지만 변위법에서 행거 신축의 영향을 고려하는 경우(Method C)의 결과와는 영향선을 구하고자 하는 점(k=1)에 하중이 재하되는 경우에 5% 정도 안전 측의 결과를 산출한다는 것을 알 수 있다.

### 5.3 $M_1^{bot}$ 의 영향선

격점 1에 대한 하현재 휨 모멘트의 영향선인 그림 11을 보면 본 방법(Method A)의 결과가 변위법에서 행거 신축의 영향을 무시하는 경우(Method B)의 결과와는 잘 일치하지만 변위법에서 행거 신축의 영향을 고려하는 경우(Method C)의 결과와는 영향선을 구하고자 하는 점(k=1)에 하중이 재하되는 경우에 4%정도 과소 측의 결과를 산출한다는 것을 알 수 있다.

고전 이론에서는 행거 신축의 영향을 무시하고 있으며 따라서 하현재에 대하여는 행거의 지지 효과가 다소 과대 평가되므로 행거 신축의 영향을 고려하는 경우보다 하현재 휨 모멘트를 과소 평가하게 된다.

반대로 상현재의 경우에는 행거 신축의 영향을 무시하는 경우에는 행거 신축의 영향을 고려하는 경우에 비하여 격점에서의 지점 변위 효과가 다소 증가하며 따라서 상현재의 휨 모멘트는 다소 증가하며 이상에서의 수치 해석 결과와 일치한다.

### 5.4 $Q_0^{top}$ , $Q_0^{bot}$ 의 영향선

수직 전단력은 현재 모멘트와 축력 수평 성분으로 계산되며

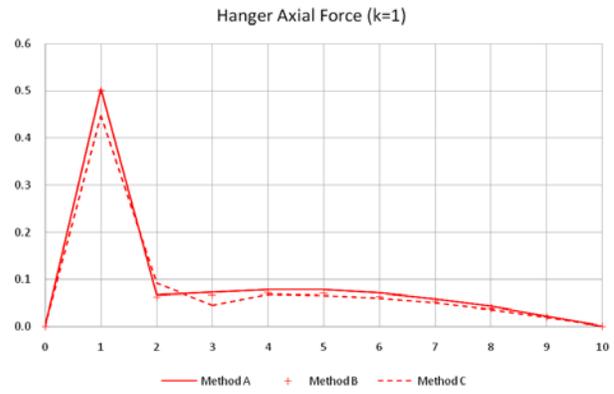


그림 14  $Z_1$ 의 영향선

현재 축력 수평 성분은 행거 신축의 영향과 무관하므로 결과적으로 수직 전단력은 휨 모멘트와 같은 양상을 나타낸다.

수직 전단력의 영향선의 경우에는 행거 신축의 영향에 따른 오차가 하중 재하점에서 9%~12%정도이다.

### 5.5 $Z_1$ 의 영향선

행거 축력은 행거 설치 위치 전후에서 하현재 연직 전단력의 차이로 계산되고 첫번째 행거의 경우 하중 작용점에서의 오차는 13%정도이다. 그림14를 보면 행거 신축의 영향을 고려하면 하중의 집중성이 다소 완화되고 인접 행거로의 하중 분배 효과가 증가하는 것을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서 얻어진 결론은 다음과 같다.

- 1) 고전 이론으로 보강 아치의 일종인 로제 아치의 거동을 쉽게 이해할 수 있으며 랭거 아치 및 타이드 아치도 로제 아치의 특수한 경우로서 구조적 거동을 설명할 수 있다.
- 2) 전자 계산기의 이용을 전제로 한다면 반복 계산을 통하여 고전 이론으로 보강 아치의 영향선 해석을 쉽게 수행할 수 있다.
- 3) 현재 축력의 수평 성분은 근사식으로도 충분히 정확하게 계산할 수 있다.
- 4) 고전 이론의 결과와 행거 신축의 영향을 무시한 변위법의 결과를 비교하면 두 방법의 결과는 잘 일치한다.
- 5) 고전 이론의 결과와 행거 신축의 영향을 고려한 변위법의 결과를 비교하면 휨 모멘트에 대한 최대 중거에서는 5%정도의 오차가 발생하며 고전 이론을 적용하면 상현

재의 경우에는 안전측의 결과가 산출되고 하현재의 경우에 과소한 결과가 산출된다. 이러한 결과 차이는 주로 행거 신축의 영향 때문이며 구조적 직관과 일치한다.

- 6) 고전 이론은 실제 로제 아치에 대한 기본 설계 및 설계 검토는 물론이고 상세 설계에서도 효율적으로 적용될 수 있다.

## 7. 참고문헌

1. 社団法人日本橋梁協會, デザインデータブック, 2011.
2. (株)長大, 新藤川橋-最終設計報告書
3. (株)長大, 江藤橋-最終設計報告書
4. Valerian Leontovich, Frames and Arches, McGraw-Hill, 1959.
5. William Weaver, Paul R. Johnston, Finite Elements for Structural Analysis, Prentice-Hall, 1983.
- 6 S.P. Timoshenko, D.H. Young, Theory of Structures, 2nd edition, McGraw-Hill, 1965.
7. W.C. Young, et al., Roark's Formulas for Stress and Strain, 8th edition, McGraw-Hill, 2012.
8. 平井敦, 鋼橋III, 技報堂, 1967. 