

# NURBS 설계변수에 의한 설계민감도 해석 Sensitivity Analysis by NURBS Design Parameters

## 1. 서 론

1960년대 개발되어 산업계에서 전반적으로 사용되는 CAD 모델은 곡면의 기하학적 형상을 수치적으로 표현하는 방법으로 20세기 후반 컴퓨터의 발전과 함께 활성화되어 자동차, 항공, 조선을 포함한 전 산업분야에서 널리 사용되고 있다. 반면 경계조건을 가지는 문제에 대해서 지배 미분방정식을 이산화(Discretization)하여 수치해를 구하는 유한요소해석은 CAD 모델과 독립적으로 개발되어 왔으며 구조해석, 열전달과 같은 문제에 대해 표준 해석방법으로 사용되고 있다. CAD 모델은 정확한 경계를 표현하기 위해 고차원의 기저함수를 사용하며, 유한요소해석의 경우 1차원 기저함수를 사용하여 경계와 내부요소를 표현하는 것이 일반적이다.

경계의 기하학적 형상을 표현하는 CAD 모델과 경계조건에 지배되는 지배방정식의 해를 구하는 유한요소해석의 공통점으로 인해 CAD 모델과 해석을 통합하는 다양한 연구들이 수행되어 왔으며, CAD의 형상을 표현하는 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)를 활용하여 해석공간의 기저함수를 구성하는 “아이소-지오메트릭 해석(IGA)”이 2005년 Hugh 등에 의해 제안되었다. 이는 CAD 형상의 구성 단계에서 이산화가 이루어져서 경계에서 법선, 곡률 등의 절사(Truncation)가 원천적으로 방지되므로 유한요소해석(FEA)에 비해 “엄밀한 기하형상이 고려된 응답”을 얻을 수 있는 강점이 있다.

그림 1에서는 CAD 모델에 사용되는 NURBS 기저함수를 이용한 아이소-지오메트릭 해석을 도시하였다. 기존의 유한요소 해석에서는 CAD 모델이 정해지면 추가로 1차원 기저함수를 사용한 격자를 생성한 다음 유한요소해석을 수행한다. 산업계에서 이러한 격자 생성 및 격자 수정에 많은 시간을 투입하고 있으며 생성된 격자의 정확도가 구조해석의 정확도에 직접적으로 연관된다. 아이소-지오메트릭 해석에서는



구 분 용

미국선급협회 수석검사관

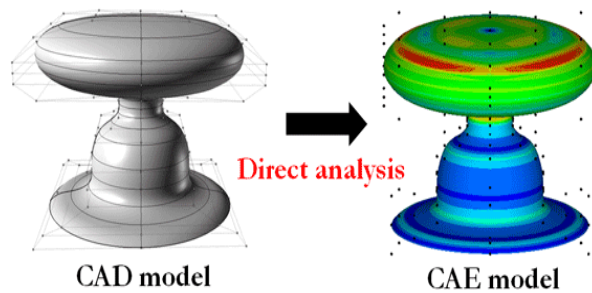


그림 1 CAD 모델을 사용한 아이소-지오메트릭 해석

CAD 모델을 구조해석에 바로 적용하는 것이 가능하며 이러한 해석방법은 앞서 설명한 엄밀한 기하형상을 고려한 응답이라는 장점 외에도 일반적인 유한요소해석에 필요한 격자생성 및 보수에 필요한 시간을 단축할 수 있는 장점을 가진다.

아이소-지오메트릭 해석을 이용한 최적설계 기법은 이러한 아이소-지오메트릭 해석의 장점들을 형상최적설계에 적용한 방법론으로서 엄밀한 기하형상의 묘사, CAD 설계변수를 직접 고려한 형상최적설계 등을 가능하게 한다. “아이소-지오메트릭 최적설계”는 기존 CAD 설계와 CAE 해석간 연계성의 어려움을 극복하여 산업계에 새로운 시장개척과 가치를 창출할 것으로 기대된다. 본 기사에서는 이러한 아이소-지오메트릭 최적설계의 기초연구로서 NURBS 설계변수를 이용한 설계민감도 해석에 대해 살펴보고자 한다.

## 2. CAD 모델링

### 2.1 B-Spline

1차원 문제에서의 노트 벡터는 파라메트릭 좌표계에서의 좌표들의 집합이다.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

여기서,  $p$ 는 사용되는 기저함수의 차수이고,  $n$ 은 기저함수의 개수이다. 따라서  $p$ 차의 기저함수  $n$ 개를 사용하게 되면 총  $n+p+1$ 개의 노트벡터가 사용된다. 만일 노트 벡터가 파라메트릭 공간상에 균일하게 분포되어 있으면 균일(Uniform) 노트벡터, 불균일하게 분포되어 있으면 불균일(Non-uniform) 노트벡터라고 한다. 그리고 한 노트값이 같은 좌표에 여러 번 반복될 수 있는데, 이때를 중복(Repeated) 노트벡터라고 한다. 또한 첫 번째와 마지막 노트가  $p+1$ 번 반복되면 열린(Open) 노트벡터라고 한다. 아이소-지오메트릭 해석법에서는, 해 공간의 기저함수가 CAD 형상을 표현하는데 사용된 B-spline을 이용하여 다음과 같이 재귀적으로 구성된다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (p=0) \quad (2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \quad p=1,2,3,\dots \quad (3)$$

### 2.2 B-Spline 곡선과 곡면

B-Spline 곡선은 1차원 B-Spline에 조정점(Control Point)을 곱한 형태로 표현되며,  $p$ 차의 기저함수가 주어졌을 때 아래와 같이 표현된다.

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (4)$$

이러한 B-spline 곡선은 아래와 같은 성질을 가진다.

- (1) B-spline은  $p$ 차의 다항식이며, 이 때  $n+1$ 개의 조정점과  $m+1$ 개의 노트 개수를 가진다.
- (2) 끝점에서 곡선과 조정점의 위치가 동일하다.
- (3) Affine invariance : 이동, 회전, 크기변환 등을 수행했을 경우 기저함수의 partition of unity 성질에 따라 affine invariance 특성을 가진다.
- (4) 조정점  $\mathbf{P}_i$ 를 바꿀 경우 노트 범위  $[\xi_i, \xi_{i+p+1})$ 에서만 곡선이 변화한다.
- (5) 곡선은 노트벡터 사이에서는 무한하게 미분가능하며,  $k$ 번 반복된 노트벡터에서는  $p-k$ 번 미분가능하다.

B-spline 곡면과 고차원의 입체는 곡선과 동일한 형태로 아래와 같이 표현된다.

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{i,j} \quad (5)$$

$$V(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) N_{k,r}(\zeta) \mathbf{P}_{i,j,k} \quad (6)$$

### 2.3 NURBS

앞서 설명한 B-spline 기저함수에 가중치  $w_i$ 를 곱하여 분수 형태로 나타낸 기저함수를 NURBS 라고 정의하며 아래와 같이 표현한다.

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^p N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (7)$$

B-spline 곡선과 마찬가지로  $n$ 개의  $p$ 차 기저함수  $R_{i,p}$ 와 대응되는 조정점  $B_i$ 가 주어졌을 때, NURBS 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i \quad (8)$$

또한 NURBS 곡선의 텐서 곱으로 NURBS 평면을 표현할 수 있다. 이 때 NURBS 평면의 노트벡터는  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ ,  $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{l+q+1}\}$ 이다.

$$\mathcal{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,p}(\xi) L_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j} \quad (9)$$

### 2.4 NURBS 형상 설계 변수

NURBS 곡선과 곡면은 조정점  $\mathbf{P}_i$ , 가중치  $w_i$ 와 노트로 정의된다. 이러한 설계 변수들을 바꿀 경우 곡선과 곡면이 변화하게 되며 형상 설계에서 이러한 3가지의 설계 변수들을 활용 가능하다. 통상적인 CAD 설계에서는 조정점을 사용하여 형상을 수정하며, 조정점의 변화를 통한 기하학적 변화는 직관적으로 명확하다. 반면 가중치와 노트의 변화는 직관적이지 않으며 본절에서 그 변화에 대해 살펴보고자 한다.

#### 2.4.1 조정점의 변화

다음과 같은 NURBS 곡선에서 조정점  $\mathbf{P}_i$ 를 조정하는 형상 변화를 고려해 보자.

$$\mathcal{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (10)$$

임의의 조정점을  $\hat{\mathbf{P}}_k = \mathbf{P}_k + \mathbf{V}$ 의 형태로 바꿀 경우 변경된 새로운 곡선은 아래와 같이 표현된다.

$$\tilde{\mathcal{C}}(\xi) = \mathcal{C}(\xi) + R_{k,p}(\xi) \mathbf{V} \quad (11)$$

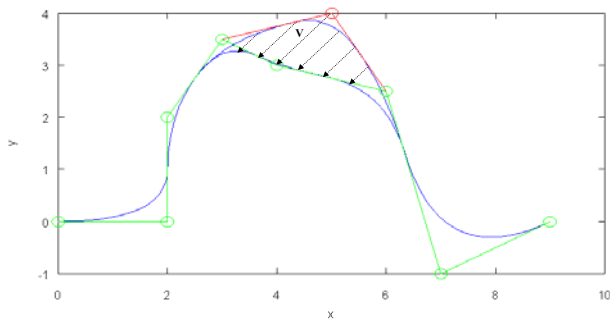


그림 2 조정점 변화에 의한 곡선 변화

따라서 곡선은 그림 2와 같이 벡터  $\mathbf{V}$ 에 평행하게 이동하게 된다.

#### 2.4.2 가중치의 변화

가중치에 의한 NURBS 곡선의 변화를 살펴보기 위해 곡선을 가중치에 대해서 미분한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_k} \mathbf{C}(u, w_0, \dots, w_n) &= \sum_{i=k}^n \frac{-N_{k,p}(u)}{\sum_{r=0}^n N_{r,p}(u) w_r} R_{i,p} \mathbf{P}_i + \frac{R_{k,p}}{w_k} \mathbf{P}_k - \frac{N_{k,p}(u) R_{k,p}(u)}{\sum_{r=0}^n N_{r,p}(u) w_r} \\ &= \frac{R_{k,p}(u)}{w_k} \left( \mathbf{P}_k - \sum_{r=0}^n R_{r,p}(u) \mathbf{P}_r \right) \\ &= \frac{R_{k,p}(u)}{w_k} (\mathbf{P}_k - \mathbf{C}(u)) \end{aligned} \quad (12)$$

따라서, 미분한 값은 곡선위의 점과 조정점의 연결하는 벡터에 비례하는 값이 되며 가중치에 의한 곡선의 변화를 곡선에 나타내면 그림 3과 같다.

#### 2.4.3 노트의 변화

NURBS 곡선에서 임의의 노트  $u_i$ 를 수정할 경우 곡선은 다음과 같이 변화하게 된다.

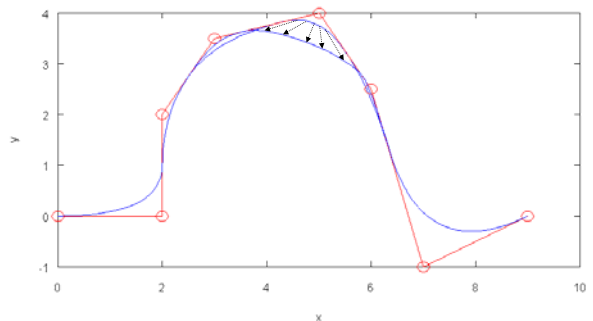


그림 3 가중치 변화에 의한 곡선 변화

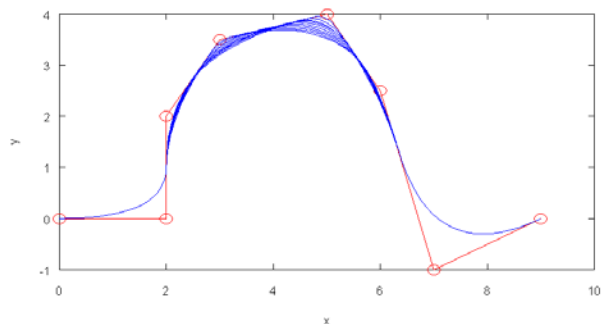


그림 4 노트 변화에 의한 곡선 변화

$$C_j(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=j-k+1}^j d_l N_l^k(\tilde{u}, u_i), \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}] \quad (13)$$

노트  $u_i$ 를  $u_{i-1}$ 에서  $u_{i+1}$ 까지 변경할 경우 곡선의 변화를 그림 4에 나타내었다.

### 3. NURBS 설계변수에 의한 설계민감도 해석

#### 3.1 아이소-지오메트릭 해석

아이소-지오메트릭 해석에서 기하형상  $x$ 와 변위의 해공간 (Solution space)  $z$ 를 동일한 NURBS 형상함수를 이용하여 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i \quad (14)$$

$$\mathbf{z}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{y}_i \quad (15)$$

기존의 유한요소 해석과 동일하게 기하 형상과 해공간의 근사를 동일한 기저함수를 사용하는 아이소 파라메트릭(Iso-parametric) 사상을 적용하여 변분정식화된 약형(Weak form)의 지배방정식의 해를 구하게 된다.

아이소-지오메트릭 해석에서의 수치적분은 노트의 집합인 패치(Patch)에서 이루어지게 되며, NURBS 함수의 특성에 의하여 패치 단위의 연속성을 가지게 된다. 이러한 패치 단위에

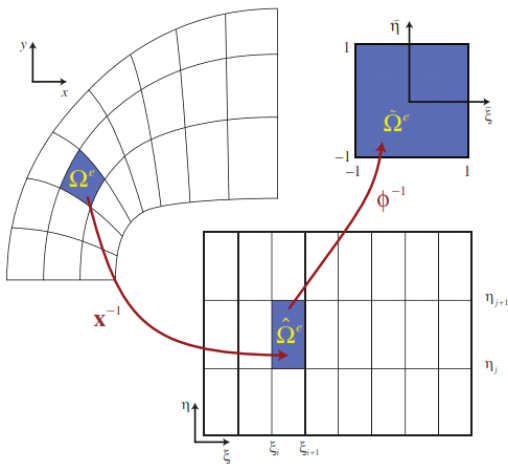


그림 5 아이소-지오메트릭 해석의 수치 적분

서의 연속성은 요소(Element) 단위의 연속성을 가지는 유한요소해석과 비교되는 아이소-지오메트릭 해석만의 장점이다. 이러한 패치 단위의 수치적분을 그림 5에 나타내었다.

아이소-지오메트릭 방법론에서 NURBS 함수의 비보간적(Non-interpolatory) 특성으로 인해 결과값을 절점변위(Nodal displacement)가 아닌 조정점 변위(Control point displacement)로 얻게 된다. 또한 변위 경계조건과 같은 경계조건을 추가할 때 조정점이 실제 기하영역 위에 존재하지 않아, 변위 경계조건의 부여가 직관적이지 않다.

#### 3.2 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도 해석

그림 6과 같이 현재의 설계영역을  $\Omega$ 라 하고 변형 후의 설계영역을  $\Omega_\tau$ 라 정의한다.

임의의  $\mathbf{x}$ 에서의 파라미터  $\tau$ 에 의한 변환관계는 식 (16)과 같이 표현된다.

$$\mathbf{x}_\tau = T(\mathbf{x}, \tau) \quad (16)$$

이 때 설계속도장은 식 (17)와 같이 정의된다.

$$V(\mathbf{x}_\tau, \tau) \equiv \frac{d\mathbf{x}_\tau}{d\tau} = \frac{dT(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad (17)$$

응답  $\mathbf{z}$ 에 대해서 전미분은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\mathbf{z}} \equiv \frac{d}{d\tau} (\mathbf{z} + \tau V(\mathbf{x}))|_{\tau=0} = \mathbf{z}' + \nabla \mathbf{z}^T V \quad (18)$$

2차원 선형 탄성문제에 대한 각 조정점의 형상 설계민감도 식은 다음과 같이 유도된다.

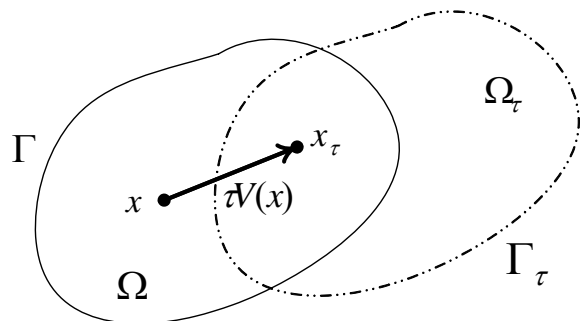


그림 6 설계 영역의 변화

$$\begin{aligned}
 a(\dot{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}) = & \int_{\Omega} \sum_{I,M}^{CP} (b_{i,m} W_I^p W_M^p + b_i W_I^p W_{M,m}^p) \bar{y}_{il} V_{mM} d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma^N} \sum_{I,M}^{CP} (t_{i,k} n_k + \kappa t_i) \tilde{W}_I^p \tilde{W}_M^p \bar{y}_{il} V_{mM} n_m d\Gamma \\
 & + \int_{\Omega} \sum_{I,K,M}^{CP} C_{ijkl} (W_{I,m}^p W_{M,j}^p W_{K,l}^p + W_{I,j}^p W_{K,m}^p W_{M,l}^p \\
 & - W_{I,j}^p W_{K,l}^p W_{M,m}^p) y_{il} \bar{y}_{kk} V_{mM} d\Omega.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

### 3.2.1 조정점의 변화에 의한 설계민감도 해석

조정점의 변화에 의한 설계민감도를 평가하기 위해서 그림 7의 내압을 받는 배관 문제를 고려한다. 배관의 내경과 외경이 변화하는 것을 설계변수로 사용하였으며 설계변수의 조정과 민감도 해석을 위해서 식 (20)과 같이 속도장을 적용하였다.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \frac{d\mathbf{x}_r}{d\tau} = \sum_{i=1}^n N_i \delta \mathbf{P}_i
 \tag{20}$$

유한요소해석과 민감도해석의 정확도를 알기 위해서 정해 (Analytic solution)와 다음의 오차식을 사용하여 정해와의 해석의 정확도를 분석하였다.

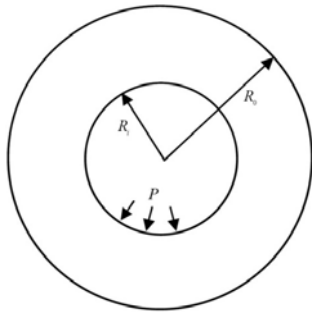


그림 7 내압을 받는 배관

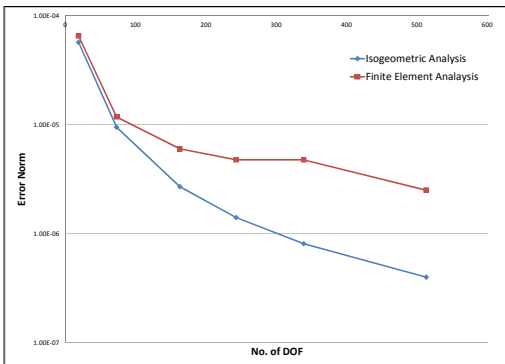


그림 8 자유도 증가에 따른 해석의 수렴도

$$e = \sqrt{\sum |u_{Numerical Sol} - u_{Analytic Sol}|^2}
 \tag{21}$$

자유도(Degree of freedom)을 증가시킬때 유한요소해석의 수렴도를 그림 8에 나타내었다. 정확한 기하묘사 및 고차 기저함수 사용으로 인해 아이소-지오메트릭 해석의 수렴도가 우수한 것을 확인할 수 있다.

유사하게 자유도 증가에 따른 설계민감도의 수렴정도를 그림 9에 나타내었으며, 법선 벡터와 곡률의 고차항의 정보를 고려함으로 인해 유한요소해석 대비 정확한 설계민감도를 얻을 수 있다.

### 3.2.2 가중치, 노트의 변화에 의한 설계민감도 해석

가중치, 노트를 변화시킬 경우 기저함수도 변화하게 되며 따라서 다음의 식과 같이 변위의 미분식과 속도장에서 기저함수의 변화를 고려해야만 한다.

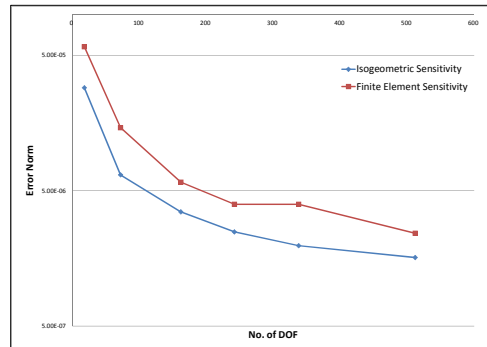


그림 9 자유도 증가에 따른 설계민감도의 수렴도

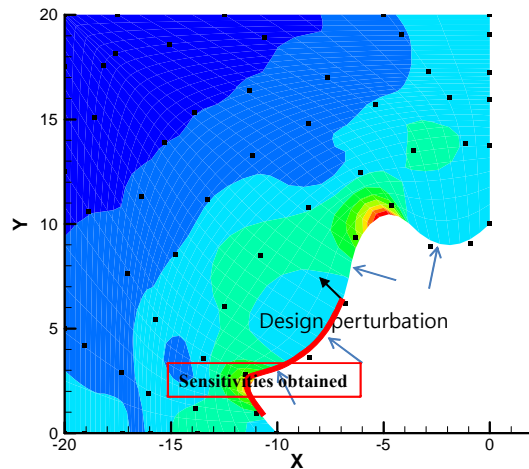


그림 10 압력이 가해지는 불규칙 경계문제의 설계민감도 해석

표 1 압력이 가해지는 불규칙 경계문제의 설계민감도 해석 결과

DOF	Variation of Displacement Coefficient by DDM	%(DDM/FDM)
487	7.80E-11	99.602
488	3.49E-11	99.772
505	2.07E-10	99.667
506	5.47E-12	95.262
523	1.11E-10	99.601
524	2.27E-11	99.831
541	2.02E-10	99.748
542	2.02E-11	104.334
559	1.47E-10	99.606
560	1.37E-11	99.869
577	1.43E-10	99.549
578	-2.12E-11	100.993
595	1.67E-10	99.605
596	7.16E-12	99.892
613	1.20E-10	100.022
631	1.65E-10	99.601


$$\frac{d}{d\tau}(z_{i,j}) = \sum_l N_l^t \dot{d}_i^l + \dot{N}_l^t d_i^l - N_l^t d_i^l V_{k,j} \quad (22)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} = \sum_l \left( \frac{\partial N_l}{\partial w_k} \delta w_k \mathbf{P}_l + N_l \delta \mathbf{P}_l \right) \quad (23)$$

이러한 기저함수의 변화를 고려하여 그림 10의 불규칙 경계에 압력하중이 가해지는 문제에 대해서 가중치에 대한 설계민감도 해석을 수행하였고 표 1에 유한차분 대비 설계민감도 해석의 정확도를 나타내었다.

#### 4. 맺는 말

CAD 모델의 정확한 형상과 모델을 표현하는 기저함수인 NURBS를 해석에 직접 사용하는 아이소-지오메트릭 형상최적설계의 경우 NURBS 설계변수를 직접 수정하여 제품의 설계를 변경하는 것이 가능하다. NURBS의 설계변수로는 조정점, 가중치, 노트가 있으며 조정점의 변화는 기저함수의 변화를 가져오지 않아 설계민감도 해석이 용이하다. 가중치, 노트의 변화는 NURBS 기저함수의 변화를 가져오게 되므로 이에 대한 고려가 설계민감도 해석시에 필요하다.

본 기사에서는 아이소-지오메트릭 형상설계에 필수적인 NURBS 설계변수에 의한 기하학적 변화 및 그에 따른 설계민감도 해석에 대해 정리하였다. 아이소-지오메트릭 형상최적설계는 “기하학적으로 엄밀하며 형상의 수정, 개선이 용이”한 최적설계 방법론으로서 본 기사에 기재된 기초연구와 함께 향후 기존 CAD 설계와 CAE 해석간 연계성의 어려움을 극복하여 산업계에 새로운 시장개척과 가치를 창출할 것으로 기대된다. 

[섭외: 하윤도 편집위원]