

탄성지반위에 놓인 S형상 점진기능재료(FGM)판의 동적 불안정성에 관한 연구

이 원 홍¹ · 한 성 천² · 박 원 태^{3*}

¹경남과학기술대학교 토목공학과, ²대원대학교 철도건설과, ³공주대학교 건설환경공학부

A Study of Dynamic Instability for Sigmoid Functionally Graded Material Plates on Elastic Foundation

Won-Hong Lee¹, Sung-Cheon Han² and Weon-Tae Park^{3*}

¹Department of Civil Engineering, Gyeongnam National University of Science and Technology, Jinju, 660-758, Korea

²Department of Civil & Railroad Engineering, Daewon University College, Jecheon, 390-702, Korea

³Division of Construction and Environmental Engineering, Kongju National University., Cheonan, 33-717, Korea

Abstract

This article presents the dynamic instability response of sigmoid functionally graded material plates on elastic foundation using the higher-order shear deformation theory. The higher-order shear deformation theory has ability to capture the quadratic variation of shear strain and consequently shear stress through the plate thickness. The governing equations are then written in the form of Mathieu - Hill equations and then Bolotin's method is employed to determine the instability regions. The boundaries of the instability regions are represented in the dynamic load and excitation frequency plane. The results of dynamic instability analysis of sigmoid functionally graded material plate are presented using the Navier's procedure to illustrate the effect of elastic foundation parameter on dynamic response. The relations between Winkler and Pasternak elastic foundation parameter are discussed by numerical results. Also, the effects of static load factor, power-law index and side-to-thickness ratio on dynamic instability analysis are investigated and discussed. In order to validate the present solutions, the reference solutions are used and discussed. The theoretical development as well as numerical solutions presented herein should serve as reference for the dynamic instability study of S-FGM plates.

Keywords : dynamic instability; higher-order shear deformation theory; pasternak elastic foundation; sigmoid functionally graded material(S-FGM) plate

1. 서 론

두 가지 성분의 합성 구매에 의해 특정 지어지는 점진기능 재료(FGM)는 2개의 성분이 복합적으로 구성된 재료이며 일본의 재료 과학자에 의해 소개되었다. 점진기능재료의 연속적인 변화는 2개의 상이한 재료가 함께 결합되어 있기 때문에 접촉면의 직각방향으로 역학적 성질의 불일치를 갖는 섬유 보강 적층복합재료와 구별된다. 이러한 불일치성 때문에 섬유-수지 복합재료의 구성성분은 높은 열 하중 하에서 쉽게 분리된다. 게다가, 균열은 접촉면에서 시작해서 취약한 재료

단면으로 성장하기 쉽다. 점진기능재료에서 이런 문제들은 구성성분의 재료 성질을 점차적으로 변화시킴으로써 제거하거나 줄일 수 있다(Hirano *et al.*, 1988).

지수함수법(Delale *et al.*, 1983)과 거듭제곱법(Bao *et al.*, 1995)을 사용한 점진기능재료는 재료는 비록 재료 성질의 변화는 연속이지만 급속히 변화하는 구간이 존재하여 접촉면의 한 곳에서 응력집중이 발생할 수 있다. Chung과 Chi(2001)는 새로운 체적요소를 이용하여 2개의 거듭제곱 함수로 된 S형상 점진기능재료를 제안하였다. Chi와 Chung(2002)은 S형상 점진기능재료의 사용으로 균열체의 응력 밀

* Corresponding author:

Tel: +82-41-521-9305; E-mail: pwtae@kongju.ac.kr

Received November 12 2014; Revised November 22 2014

Accepted November 24 2014

©2015 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

도 계수를 줄일 수 있음을 제시하였다.

점진기능재료 판을 포함한 모든 구조물은 사용하중 상태에서 동적하중을 받게 된다. 그러므로 구조물의 동적응답을 정확하게 평가하는 것은 반드시 필요하다고 할 수 있다. 또한 주기적 압축하중을 받는 구조물은 작용하중의 크기가 정적 좌굴하중의 크기보다 작은 경우에도 하중의 주기와 고유진동수 사이에 어떤 특정한 관계가 성립되면 공명현상이나 동적 불안정성이 발생할 수 있다. 따라서 주기적 동적하중을 받는 구조물의 공학적 안전을 위하여 동적 불안정성 문제에 대한 연구는 매우 중요한 의미를 가진다. 많은 연구자들(Chattopadhyay *et al.*, 2000; Wang *et al.*, 2002; Dey *et al.*, 2006)이 적층복합판에 Bolotin(1964) 방법을 적용하여 동적 불안정 특성에 대하여 연구하였다. 연구자들은 푸리에 급수를 사용한 주기적 해를 구하였고 고유치문제를 해결하여 동적 불안정 영역을 구하였다. 그러나 점진기능재료 판의 동적 불안정 영역에 관한 해석은 거의 전무한 실정이다.

적층복합판의 다양한 해석은 한성천과 Choi(2004), Bui 등(2011), Shojaee 등(2012) 그리고 Thai와 Choi(2013) 등에 의해 수행되었다. 이러한 연구들은 고전적 판 이론 혹은 1차 전단변형 이론을 적용하였다. Lee 등(2008)은 점진기능재료(FGM)판의 좌굴에 대해서 연구하였고 Thai와 Choi(2013)는 점진기능재료(FGM)의 처짐과 자유진동에 관하여 1차 전단변형을 고려한 해석적 결과를 제시하였다. 최근들어 Jung 등(2014)은 개선된 우용력 이론을 이용하여 미소규모 S형상 점진기능재료(S-FGM)판의 좌굴해석을 수행하였다. 두꺼운 판이나 점진기능재료와 같이 진보된 복합체로 구성된 판의 경우에 전단변형 효과가 더 뚜렷하기 때문에 점진기능재료 판의 엄밀한 해석을 위해 고차 전단변형 이론을 적용하여야 한다. 전단변형률과 전단응력은 판의 두께 방향을 따라 곡선 분포 하는 것으로 표현하고 판의 상면과 하면에서 0이 된다는 조건을 만족하는 고차전단변형이론은 전단보정 계수가 필요하지 않게 되었다. 탄성지반 효과를 고려하기 위하여 Pasternak 모델을 사용하였다. 수직방향 압력은 등가 스프링으로 가정하였고 비압축성 전단층이 전단변형에 저항하는 것으로 가정하였다.

본 연구에서는 Bolotin의 방법을 이용하여 고차전단변형이 고려되고 탄성지반위에 놓인 S형상 점진기능재료 판의 동적 하중계수와 무차원 여기진동수 평면에서의 동적 불안정 영역에 관한 연구를 수행하고자 한다. 정적 하중 계수 및 동적 하중 계수에 따른 고유치를 구하고 동적 하중 계수와 무차원 여기진동수 평면($\beta-\Omega$)에서 다양한 변수에 따른 동적 불안정 영역에 대하여 분석하였다.

2. 고차전단변형 판의 동적 불안정 해석

2.1 동적 불안정 해석

3차원 전단변형이론을 이용한 단순지지 S형상 점진기능재료 판의 동적 불안정 해석을 위해 중립면의 변위를 식 (1)과 같이 이중 푸리에 급수를 이용하여 가정하였다. 4변이 단순 지지된 경우에 Navier 방법으로 해석적 결과를 구할 수 있다.

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \gamma x \sin \delta y \quad (1)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \gamma x \cos \delta y$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \gamma x \sin \delta y$$

$$\phi_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \gamma x \sin \delta y$$

$$\phi_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \gamma x \cos \delta y$$

여기서, $\gamma = m\pi/a$, $\delta = n\pi/b$ 이다.

S형상 점진기능재료 판의 지배방정식은 식 (2)와 같은 행렬 형태로 구할 수 있다.

$$[[\mathbf{S}] + P_x(t)[\mathbf{G}]]\{\Delta\} + [\mathbf{M}]\{\ddot{\Delta}\} = 0 \quad (2)$$

여기서, $[\mathbf{S}]$ 는 강성행렬, $[\mathbf{G}]$ 는 기하강성행렬 그리고 $[\mathbf{M}]$ 은 질량행렬이고 $\{\Delta\}$ 는 미지의 변위 함수 벡터이다.

무차원 축방향 여기하중 $P_x(t)$ 는 좌굴하중 (P_{cr})을 이용하여 식 (3)으로 표현된다.

$$P_x(t) = -[\alpha P_{cr} + \beta \cos(\omega t) P_{cr}] \quad (3)$$

여기서, α 는 정적 하중 계수이고 β 는 동적 하중 계수이다. 또한 ω 는 여기진동수이다.

무차원 축방향 압축 여기하중 $P_x(t)$ 를 식 (2)에 대입하면 식 (4)와 같은 S형상 점진기능재료 판의 동적 지배방정식을 구할 수 있다.

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\Delta}\} + [[\mathbf{S}] - \{\alpha P_{cr} + \beta \cos(\omega t) P_{cr}\}][\mathbf{G}]]\{\Delta\} = 0 \quad (4)$$

식 (4)는 동적 불안정 해석을 위한 Mathieu-Hill 방정식이다. 식 (4)에서 좌굴하중(P_{cr})을 무시하면 고유진동수를

구하는 고유치 문제가 되고 질량행렬과 조화함수 항을 무시하면 좌굴하중을 구하는 고유치문제가 된다.

식 (4)에서 동적 하중 계수와 여기진동수와의 관계를 구하기 위해 Bolotin의 방법을 적용하면 식 (5)을 구할 수 있다.

$$[\mathbf{S}] - \left\{ \alpha P_{cr} \pm \left(\frac{\beta P_{cr}}{2} \right) \right\} [\mathbf{G}] - \left(\frac{\omega_1^2 [\mathbf{M}]}{4} \right) = 0 \quad (5)$$

여기서, ω_1 은 일차 가정 공명 진동수이다.

식 (5)에서 정적 하중 계수 α 및 동적 하중 계수 β 에 따른 고유치를 구할 수 있고 동적 하중 계수와 여기진동수 평면에서 동적 불안정 영역을 구할 수 있다.

2.2 Pasternak탄성지반 모델

2개의 매개변수를 갖는 탄성지반위에 놓인 점진기능재료 판은 Fig. 1과 같다. 점진기능재료 판과 탄성지반은 화학적 결합을 하였다고 가정한다. 수직방향 압력과 전단변형을 고려한 Pasternak 탄성지반 모델을 적용하였다. 수직방향 압력은 등가스프링으로 가정하였고 비압축성 전단층이 전단변형에 저항하는 것으로 가정하였다. 이러한 Pasternak탄성지반의 저항은 식 (6)으로 나타낼 수 있다.

$$q_p = \bar{k}_w w - \bar{k}_p \nabla^2 w \quad (6)$$

여기서, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, \bar{k}_w 그리고 \bar{k}_p 는 Winkler 지반 계수 그리고 전단 지반계수를 의미한다. 탄성지반 효과로 인해 추가되는 가상 변형에너지는 식 (7)과 같다.

$$\delta U_{EF} = \int_A \left[\bar{k}_w w \delta w + \bar{k}_p \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (7)$$

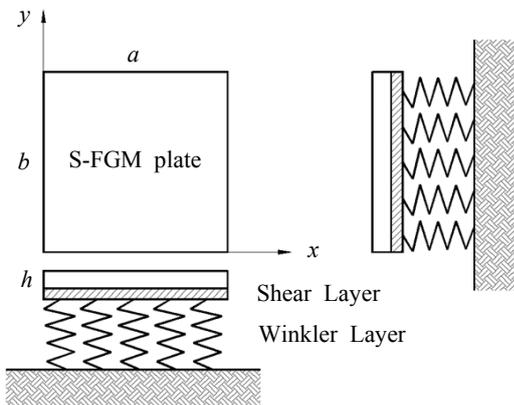


Fig. 1 Elastic foundation model of FGM plate

2.3 S형상 점진기능재료 판의 재료특성

재료의 구성성분을 연속적으로 변화시켜 점진기능재료를 제작하게 된다. 점진기능재료의 특징은 연속적으로 등급화된 성질을 가지는 비균질 미세구조라는 것이다. 점진기능재료는 체적요소의 변화에 의해 정의되고 거듭제곱 함수, 지수함수, 혹은 체적요소를 나타내는 S형상 함수를 사용한다.

본 연구에서는 접촉면의 응력집중을 피하기 위해 S형상 함수를 사용하였다. 응력의 완만한 분포를 확보하기 위해 2개의 거듭제곱 함수를 이용한 체적요소를 식 (8)로 정의할 수 있다.

$$D_f^1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-2z}{h} \right)^p \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (8a)$$

$$D_f^2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h+2z}{h} \right)^p \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (8b)$$

여기서, h 는 S형상 점진기능재료 판의 두께이고 p 는 거듭제곱 지수이다.

혼합법칙을 사용하여, S형상 점진기능재료의 재료성질은 식 (9)와 같이 계산할 수 있다.

$$G(z) = D_f^1(z) G_1 + (1 - D_f^1(z)) G_2 \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (9a)$$

$$G(z) = D_f^2(z) G_1 + (1 - D_f^2(z)) G_2 \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (9b)$$

여기서, G_1 과 G_2 는 각각 판의 상면과 하면의 재료성질이다.

식 (9a)와 (9b)에서 체적요소의 변화가 S형상 분포를 나타낸다. 이러한 점진기능재료 구조물을 S형상 점진기능재료 구조물이라고 한다. 탄성 직사각형을 판을 고려하였을 때 위층과 아래층 면에서 재료의 성질, 탄성계수와 포아송 비는 다르게 정의되지만 요구되는 성능에 따라 미리 규정된 값이다. 그러나 두께방향(z -축)으로 판의 탄성계수, 밀도와 포아송 비는 연속적으로 변하는 것으로 가정할 수 있다. 즉, $E = E(z)$, $\rho = \rho(z)$ 이며 식 (10)과 같이 표현할 수 있다.

$$\{E_t(z), \rho_t(z)\} = D_f^1(z) \{E_1, \rho_1\} + (1 - D_f^1(z)) \{E_2, \rho_2\} \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (10a)$$

$$\{E_b(z), \rho_b(z)\} = D_f^2(z) \{E_1, \rho_1\} + (1 - D_f^2(z)) \{E_2, \rho_2\} \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (10b)$$

여기서, 아래첨자 t 는 상면을 의미하고 b 는 하면을 의미한다

다. 포아송 비의 변화는 무시할 수 있을 정도로 작으므로 상수로 가정한다(Chung and Chi., 2001).

2.4 S형상 점진기능재료 판의 구성방정식

S형상 점진기능재료 판의 구성방정식은 식 (11)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \end{Bmatrix} \quad (11a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (11b)$$

S형상 점진기능재료 판의 합응력은 식 (12)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} M_{xx}^{(i)} \\ M_{yy}^{(i)} \\ M_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} (z)^i dz = \sum_{k=i}^{3+i} \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{12}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & B_{11}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k-i)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k-i)} \\ \gamma_{xy}^{(k-i)} \end{Bmatrix} \quad (12a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{yz}^{(i)} \\ M_{xz}^{(i)} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} (z)^i dz = \sum_{k=i}^{3+i} \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & B_{11}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(k-i)} \\ \gamma_{xz}^{(k-i)} \end{Bmatrix} \quad (12b)$$

여기서,

$$A_{11}^{(k)} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \quad (13)$$

$$\left[\int_{-h/2}^0 z^{(k)} E_b(z) dz + \int_0^{h/2} z^{(k)} E_t(z) dz \right]$$

$$A_{12}^{(k)} = \frac{\nu}{(1-\nu^2)} \left[\int_{-h/2}^0 z^{(k)} E_b(z) dz + \int_0^{h/2} z^{(k)} E_t(z) dz \right]$$

$$B_{11}^{(k)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\int_{-h/2}^0 (z)^k E_b(z) dz + \int_0^{h/2} (z)^k E_t(z) dz \right]$$

2.5 3차원 전단변형 이론

고차 전단변형이 고려된 변위장은 식 (14)로 나타낼 수 있다.

$$u_x = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + H(z) \theta_x \quad (14)$$

$$u_y = v - z \frac{\partial w}{\partial y} + H(z) \theta_y$$

$$u_z = w$$

여기서, u, v 는 판의 중립면($z=0$)의 한 점에서의 면내 변위들이고, w 는 수직방향 변위이고 θ_x, θ_y 는 전단변형 각이

다. 그리고 $H(z)$ 는 두께방향으로 전단변형률과 전단응력 분포의 변화를 결정하는 형상함수이다. 고전적 판 이론의 변위장은 $H(z)=0$ 인 경우이고 일차전단변형이론의 변위장은 $H(z)=z$ 인 경우이다.

식 (14)은 식 (15)로 나타낼 수 있다.

$$u_x = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + H(z) \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (15)$$

$$u_y = v - z \frac{\partial w}{\partial y} + H(z) \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$u_z = w$$

여기서,

$$\theta_x = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \theta_y = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (16)$$

식 (15)에서 형상함수 $H(z)$ 을 판의 상면과 하면에서 전단응력이 0이 된다는 조건을 만족하는 식 (17)로 가정한다.

$$H(z) = \frac{3zh^2 - 4z^3}{3h^2} \quad (17)$$

2.6 S형상 점진기능재료 판의 평형방정식

Hamilton(Reddy, 2004)의 가상변위의 원리에서 판 이론에 의한 동적 평형방정식을 식 (18)과 같이 구할 수 있다.

$$0 = \int_0^T (\delta(U + U_{EF}) + \delta V - \delta K) dt \quad (18)$$

식 (18)에 면내력 등을 대입하고 부분적분 하면 식 (19)-(23)과 같은 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta u : M_{xx,x}^{(0)} + M_{xy,y}^{(0)} = I_0 \ddot{u}_x + I_1 \ddot{\phi}_x - I_3 c_1 (\ddot{\phi}_x + \ddot{w}_{,x}) \quad (19)$$

$$\delta v : M_{xy,x}^{(0)} + M_{yy,y}^{(0)} = I_0 \ddot{v}_x + I_1 \ddot{\phi}_y - I_3 c_1 (\ddot{\phi}_y + \ddot{w}_{,y}) \quad (20)$$

$$\delta w : M_{zx,x}^{(0)} + M_{zy,y}^{(0)} - c_2 (M_{zx,x}^{(2)} + M_{zy,y}^{(2)}) \quad (21)$$

$$+ c_1 (M_{xx,xx}^{(3)} + M_{yy,yy}^{(3)} + 2M_{xy,xy}^{(3)}) + N_x(t)_{,xx} - \bar{k}_W w + \bar{k}_P \nabla^2 w = I_0 \ddot{w} + c_1 I_4 (\ddot{\phi}_{x,x} + \ddot{\phi}_{y,y}) - c_1^2 I_6 (\ddot{\phi}_{x,x} + \ddot{\phi}_{y,y} + \ddot{w}_{,xx} + \ddot{w}_{,yy})$$

$$\delta \phi_x : M_{xx,x}^{(1)} + M_{xy,y}^{(1)} - c_1 (M_{xx,x}^{(3)} + M_{xy,y}^{(3)}) \quad (22)$$

$$- M_{zx}^{(0)} + c_2 M_{zx}^{(2)} = I_2 \ddot{\phi}_x - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_x + \ddot{w}_{,x}) - c_1 (I_4 \ddot{\phi}_x - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_x + \ddot{w}_{,x}))$$

$$\begin{aligned} \delta\phi_y : & M_{yy,y}^{(1)} + M_{xy,x}^{(1)} - c_1(M_{yy,y}^{(3)} + M_{xy,x}^{(3)}) \\ & - M_{zy}^{(0)} + c_2 M_{zy}^{(2)} = I_2 \ddot{\phi}_y - c_1 I_4 (\ddot{\phi}_y + \ddot{w}_{,y}) \\ & - c_1 (I_4 \ddot{\phi}_y - c_1 I_6 (\ddot{\phi}_y + \ddot{w}_{,y})) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서,

$$I_k = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)^k dz \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad c_1 = 4/3h^2, \quad \text{그}$$

리고 $c_2 = 3c_1$ 이다.

3. 해석 결과

3.1 해석결과 검증

본 연구에서 제안한 고차전단변형을 고려한 판의 동적 불안정 특성에 관한 이론의 정확성을 증명하기 위하여 적층복합판의 해석결과(Dey *et al.*, 2006)와 비교하였다. 적층복합판의 재료 성질은 식 (24)와 같다.

$$\begin{aligned} E_L &= 40 E_T, \quad G_{TT} = 0.5 E_T \\ G_{LT} &= 0.6 E_T, \quad \nu_{LT} = 0.25 \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, E, G 그리고 ν 는 탄성계수, 전단탄성계수 그리고 포아송 비를 나타내고 L 과 T 는 강섬유의 길이방향과 수직방향을 의미한다.

적층복합판은 $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ 로 적층되어 있고 폭-두께 비(a/h)는 25, 정적 하중 계수(α)는 0 인 경우이다. 동적 하중 계수(β)와 무차원 여기진동수($\omega_1/\omega^*, \omega^*$ -기저 고유

진동수)의 관계를 Fig. 2에 나타내었다. 본 연구의 동적 불안정 영역은 참고문헌의 결과와 잘 일치함을 알 수 있었다.

3.2 S형상 점진기능재료 판의 동적 불안정 해석

S형상 점진기능재료 판의 재료 성질은 식 (25)와 같다.

$$\begin{aligned} E_1 &= 14.4 \text{ GPa}, \quad E_2 = 1.44 \text{ GPa} \\ \rho_1 &= 12.2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_2 = 1.22 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \nu &= 0.38, \quad h = 17.6 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned} \quad (25)$$

탄성지반계수의 무차원화는 식 (26)을 이용한다.

$$\bar{k}_W = \frac{k_W a^4}{D}, \quad \bar{k}_P = \frac{k_P a^2}{D}, \quad D = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (26)$$

무차원 여기진동수는 식 (27)로 가정한다.

$$\Omega = \varpi \frac{a^2}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \quad (27)$$

정적 하중 계수의 변화에 따른 동적 불안정 영역을 Fig. 3에 나타내었다. 정적 하중 계수가 커질수록 동적 불안정 영역이 커짐을 알 수 있었고 정적 하중 계수가 0.5일 때 동적 하중 계수가 1이 되면 무차원 여기진동수가 0이 되는 것을 알 수 있다.

Fig. 4에서는 정적 하중 계수가 0.5일 때 거듭제곱 지수의 변화에 따른 동적 불안정 영역에 대해서 검토하였다. 거

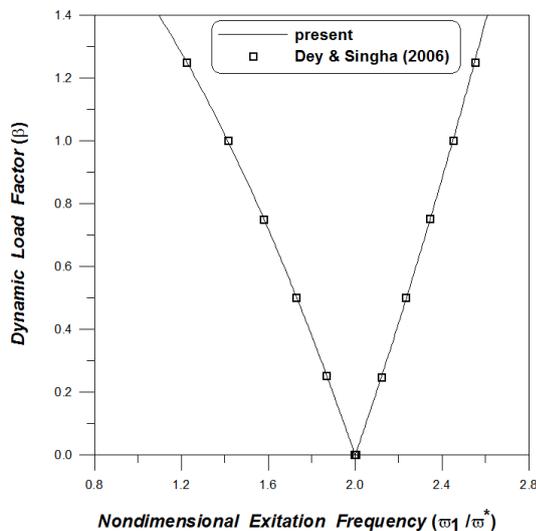


Fig. 2 Dynamic instability region of laminated composite plate

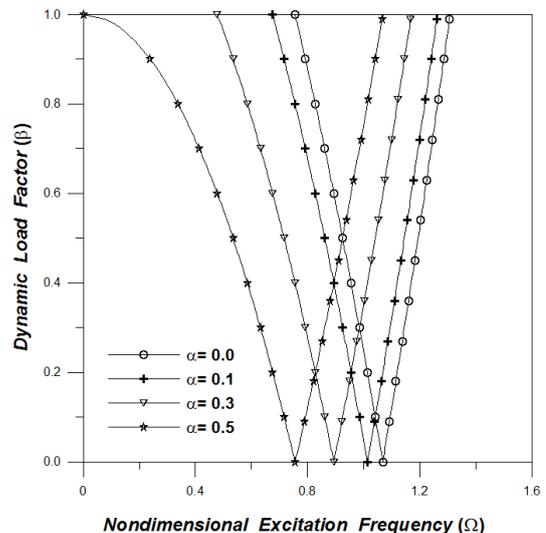


Fig. 3 Dynamic instability region of sigmoid functionally graded material plate($p=1.0$)

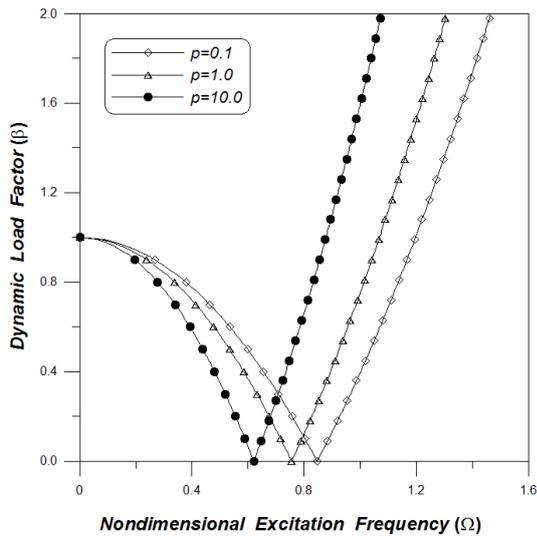


Fig. 4 Dynamic instability region of sigmoid functionally graded material plate ($\alpha=0.5$)

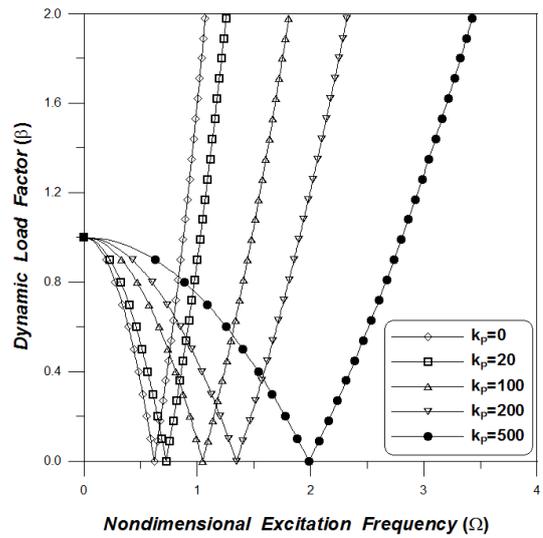


Fig. 6 Dynamic instability region of sigmoid functionally graded material plate ($\bar{k}_p=0, \alpha=0.5, p=10.0$)

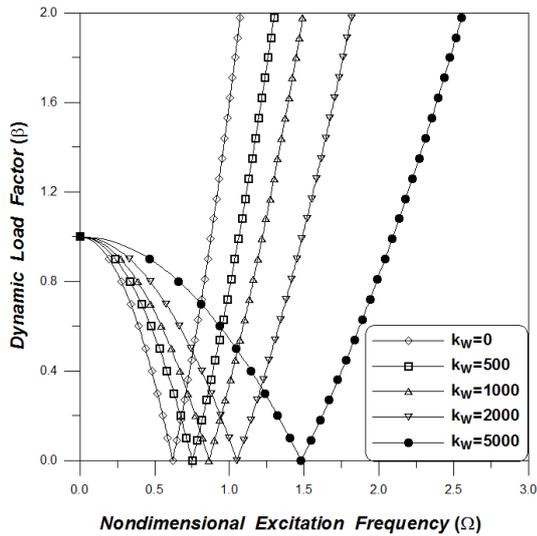


Fig. 5 Dynamic instability region of sigmoid functionally graded material plate ($\bar{k}_p=0, \alpha=0.5, p=10.0$)

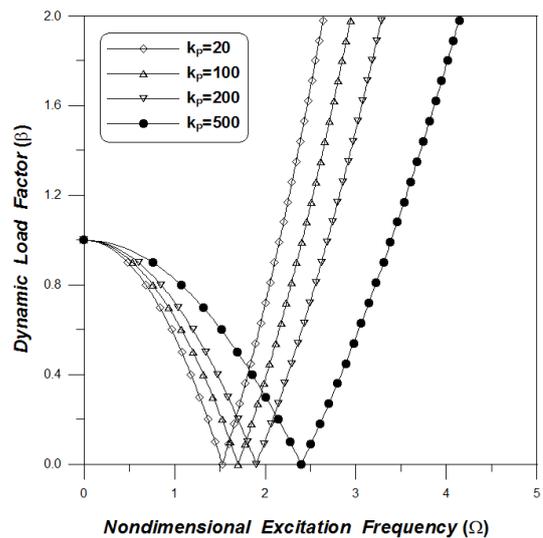


Fig. 7 Dynamic instability region of sigmoid functionally graded material plate ($\bar{k}_w=5000, \alpha=0.5, p=10.0$)

딥제곱지수가 증가할수록 여기 진동수가 감소하였다.

Winkler 탄성지반계수의 변화에 따른 동적 불안정 해석 결과를 Fig. 5에 나타내었다. 정적 하중 계수는 0.5이고 거딥제곱 지수는 10인 경우를 선택하였다. 예상대로 탄성지반 계수의 증가에 따라 여기 진동수가 증가되었다. 또한 탄성지반 계수의 증가가 동적 불안정 영역을 증가시키는 것을 알 수 있었다.

Fig. 6은 Pasternak 탄성지반계수가 동적 불안정 영역에 미치는 영향을 나타내었다. 정적 하중 계수는 0.5이고 거딥제곱 지수는 10인 경우를 선택하였다. Winkler 탄성지반 계수에 비해 상대적으로 점진기능재료 판의 동적 불안정에 미치는 영향이 더 크다는 것을 알 수 있었다.

Winkler 탄성지반계수를 5000으로 고정하였을 때 Pasternak 탄성지반계수의 변화에 따른 동적 불안정 해석결과를 Fig. 7에 나타내었다. 정적 하중 계수는 0.5이고 거딥제곱 지수는 10인 경우를 선택하였다. Pasternak 탄성지반계수가 0인 경우에 비하여 Pasternak 탄성지반계수가 500인 경우 약 60%의 여기 진동수 증가를 유발하였다.

Winkler 탄성지반계수가 5000이고 Pasternak 탄성지반 계수가 500인 경우에 정적 하중 계수의 변화에 따른 동적 불안정 해석결과를 Fig. 8에 나타내었다. 거딥제곱 지수는 10인 경우를 선택하였다. 탄성지반 계수의 효과가 고려되지 않은 경우와 전체적인 결과의 분포는 비슷한 형상을 나타내

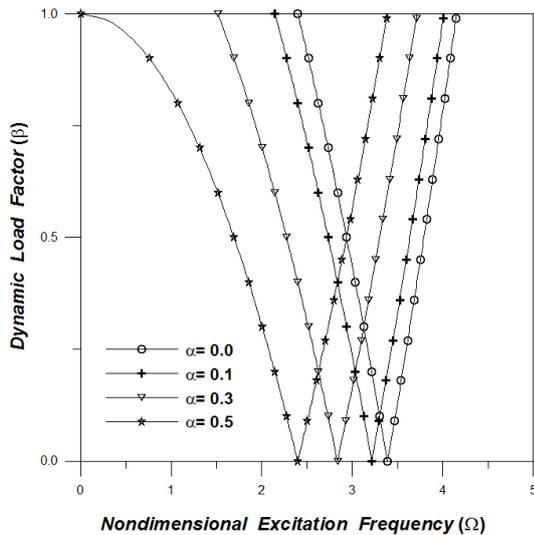


Fig. 8 Dynamic instability region of sigmoid functionally graded material plate ($\bar{k}_W=5000$, $\bar{k}_P=500$, $p=10.0$)

었다. 그러나 여기 진동수가 3.2배 증가하였고 정적 하중 계수의 증가는 동적 불안정 영역을 증대시키며 좌표 원점으로 이동시키는 것을 알 수 있었다. 본 예제는 탄성지반 효과가 동적 불안정 영역에 미치는 정확한 비교자료가 될 수 있을 것으로 판단된다. 또한 탄성지반 효과가 고려되지 않은 경우와 마찬가지로 정적 하중 계수가 0.5일 때 동적 하중 계수가 1이 되면 무차원 여기 진동수가 0이 되는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

고차전단변형을 고려한 S형상 점진기능재료 판의 동적 불안정성에 대하여 연구하였다. Hamilton 정리를 이용하여 동적 평형방정식을 유도하였고 Mathieu-Hill 방정식에서 동적 하중계수와 여기진동수와의 관계를 구하기 위해 Bolotin 방법을 이용하였다. 정확한 탄성지반 효과를 고려하기 위하여 Pasternak 탄성지반 모델을 사용하였고 해석적인 결과를 구하기 위해 Navier 방법을 적용하여 동적 불안정 영역을 구하였다. 정적 하중 계수, 탄성지반 효과 등에 따른 동적 불안정 해석을 통해 몇 가지 결론을 도출하였다.

- (1) S형상 점진기능재료 판의 거듭제곱 지수 증가는 동적 불안정 영역을 감소시켰다. 거듭제곱 지수의 증가는 S형상 점진기능재료 판의 강성을 감소시키는 것으로 판단된다.
- (2) 탄성지반 계수의 증가는 S형상 점진기능재료 판의 동적 불안정 영역을 증가시켰으며 Pasternak 탄성지반계수는 최대 60%까지 여기진동수의 증가를 유발하였다.

(3) Pasternak 탄성지반 계수가 Winkler 탄성지반 계수에 비해 동적 불안정 영역의 변화에 미치는 영향이 상대적으로 더 컸다.

(3) 정적 하중 계수의 증가는 동적 불안정 영역을 증대시키며 동적 불안정 영역을 좌표 원점으로 이동시켰다.

점진기능재료 판의 동적 불안정성에 관한 연구가 매우 부족한 상황에서 여러 가지 변수에 따른 정확한 해석 자료를 제공하는 유용한 수단이 될 수 있으며 이러한 자료들은 향후 점진기능재료 판의 동적 불안정 영역을 연구하는 연구자들을 위한 참고자료가 될 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

이 논문은 2104년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2014R1A1A4A01008716).

References

- Bao, G., Wang, L. (1995) Multiple Cracking in Functionally Graded Ceramic/Metal Coatings, *Int. J. Solids & Struct.*, 32, pp.2853~2871.
- Bolotin, V.V. (1964) The Dynamic Stability of Elastic Systems, San Francisco: Holden-day.
- Bui, T., Nguyen, M.N., Zhang, C. (2011) An Efficient Meshfree Method for Vibration Analysis of Laminated Composite plates, *Comput. Mech.*, 48, pp.175~193.
- Chattopadhyay, A., Radu, A.G. (2000) Dynamic Instability of Composite Laminates using a Higher order Theory, *Comput. & Struct.*, 77, pp.453~460.
- Chi, S.H., Chung, Y.L. (2002) Cracking in Sigmoid Functionally Graded Coating. *J. Mech.*, 18, pp. 41~53.
- Chung, Y.L., Chi, S.H. (2001) The Residual Stress of Functionally Graded Materials, *J. Chinese Inst. Civil & Hydraul. Eng.*, 13, pp.1~9.
- Delale, F., Erdogan, F. (1983) The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane, *J. Appl. Mech. (ASME)*, 50, pp.609~614.
- Dey, P., Singha, M.K. (2006) Dynamic Stability Analysis of Composite Skew Plates Subjected to Periodic in-plane Load, *Thin-walled Struct.*, 44, pp.937~942.

- Han, S.C., Choi, S.** (2004) Linear Static and Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates and Shells using a 9-node Shell Element with Strain Interpolation, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 17(3), pp.279~293.
- Hirano, T., Yamada, T.** (1988) Multi-paradigm Expert System Architecture based upon the Inverse Design Concept, *Int. Workshop on Artif. Intell. Industrial Appl.*, Hitachi, Japan.
- Jung, W.Y., Han, S.C., Park W.T.** (2014) A Modified Couple Stress Theory for Buckling Analysis of S-FGM Nanoplates Embedded in Pasternak Elastic Medium, *Compos.: Part B*, 60, pp.746~756.
- Lee, W.H., Han, S.C., Park, W.T.** (2008) Bending, Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates, *J. Korea Academic-Industrial coop. Soc.*, 9(4), pp.1043~1049.
- Reddy, J.N.** (2004) *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, Second Ed, CRC Press, London.
- Shojaee, S., Valizadeh, N., Izadpanah, E., Bui, T., Vu, T.V.** (2012) Free Vibration and Buckling Analysis of Laminated Composite Plates using the NURBS-based Isogeometric Finite Element Method, *Compos. Struct.*, 94, pp.1677~1693.
- Thai, H.T., Choi, D.H.** (2013) A Simple First-order Shear Deformation Theory for the Bending and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates, *Compos. Struct.*, 101, pp.332~340.
- Thai, H.T., Choi, D.H.** (2013) A Simple First-order Shear Deformation Theory for Laminated Composite Plates, *Compos. Struct.*, 106, pp.754~763.
- Wang, S., Dawe, D.J.** (2002) Dynamic Instability of Composite Laminated Rectangular Plates and Prismatic Plate Structures, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 191, pp.1791~826.

요 지

탄성지반위에 놓인 S형상 점진기능재료 고차전단변형 판의 동적 불안정성에 대하여 연구하였다. 고차전단변형이론은 점진기능재료 판의 두께방향으로의 전단변형률과 전단응력의 곡선변화 효과를 고려할 수 있다. Mathieu-Hill 방정식의 형태로 유도된 지배방정식에서 Bolotin 방법을 이용하여 동적 불안정 영역을 결정하였다. 동적 불안정 영역의 경계는 동적 하중과 여기진동수와의 관계로 나타내었다. 고차전단변형이론과 탄성지반 효과가 S형상 점진기능재료 판의 동적 불안정성에 미치는 효과를 제시하였다. Winkler와 Pasternak탄성지반 매개변수의 관계를 수치해석 결과를 통하여 고찰하였다. 또한 정적 하중계수, 거듭제곱 지수 그리고 폭-두께비 등의 동적 불안정 영역에 대한 영향을 분석하였다. 본 연구의 결과를 검증하기 위해 참고문헌의 결과와 비교 분석하였다. 본 연구에서 제시한 이론적 발전과 수치결과들은 S형상 점진기능재료 구조물의 동적 불안정 해석을 위한 참고자료로 활용될 수 있을 것이다.

핵심용어 : 동적 불안정, 고차전단변형이론, Pasternak 탄성지반, S형상 점진기능재료 판