

## 등분포 중심축 하중을 받는 단층래티스돔의 좌굴거동

김 충 만<sup>1</sup> · 유 은 종<sup>1</sup> · 나 창 순<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>한양대학교 건축공학과, <sup>2</sup>국민대학교 건축학과

### Buckling Behaviors of Single-Layered Lattice Dome under Radial Uniform Loads

Choong-Man Kim<sup>1</sup>, Eun-Jong Yu<sup>1</sup> and Chang-Soon Rha<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Dept. of Architectural Eng., Hanyang Univ., Seoul, 133-791, Korea

<sup>2</sup>Dept. of Architecture, Kookmin Univ., Seoul, 136-702, Korea

#### Abstract

This paper presented the nonlinear behaviors of the single-layered lattice dome, which is widely used for the long-span structure system. The behaviors were analysed through the classical shell buckling theory as the single-layered lattice dome behaves like continuum thin shell due to its geometric characteristics, and finite element analysis method using the software program Nastran. Shell buckling theory provides two types of buckling loads, the global- and member buckling, and finite element analysis provides the ultimate load of geometric nonlinear analysis as well as the buckling load of Eigen value solution. Two types of models for the lattice dome were analysed, that is rigid- and pin-jointed structure. Buckling load using the shell buckling theory for each type of lattice dome, governed by the minimum value of global buckling or member buckling load, resulted better estimation than the buckling load with Eigen value analysis. And it is useful to predict the buckling pattern, that is global buckling or member buckling.

**Keywords** : lattice dome, shell buckling theory, finite element analysis, geometric nonlinear analysis

#### 1. 서 론

공간프레임구조(space frame structure)는 곡률이 갖는 기하학적 강성을 이용한 셸구조의 구조원리와 선형의 강재를 이용하여 장스팬의 대공간구조에서 매우 폭넓게 활용되고 있다. 이와 같은 공간프레임구조의 하나로서 단층 래티스돔(single-layer lattice dome)은 가볍고 강성이 큰 자재를 공장에서 대량으로 제작하여 시공함으로써 효율성에서 매우 뛰어난 것으로 평가되고 있다. 그러나 구조시스템의 특성상 긴 경간에 비해 부재가 가늘고 시스템의 두께가 얇아서 좌굴이 매우 중요한 고려대상이 되고 있다. 단층의 래티스돔(이하 래티스돔)은 셸과 같은 연속체시스템(continuous system)과 유사한 거동특성을 가지고 있으면서도 선형 강재로 구성된 이산계시스템(discrete system)인 관계로 보다 복잡한 좌굴양

상을 보인다. 래티스돔에서 일반적으로 나타나는 불안정 좌굴 거동은 절점좌굴, 부재좌굴, 전체좌굴이 있으며, 이들 좌굴 거동은 단독으로 뿐만 아니라 복합적으로도 발생할 수 있다(Kato *et al.*, 2005). 이와 같은 래티스돔의 좌굴에 영향을 미치는 요소는 매우 다양하며 구조형태뿐만 아니라 절점강성, 부재강성, 지점조건, 하중분포 및 형상불완전 등 여러 요인이 있으며 이에 대한 연구도 매우 활발하게 이루어져 왔다(Han, 1996; Han *et al.*, 2006; Ogawa *et al.*, 2008). 절점좌굴(nodal buckling)은 주변의 절점변형이 미미한 상황에서 한 절점에서 국부적인 대변형이 발생하는 좌굴형태로서 주로 집중하중을 받는 경우에 발생하는 반면, 등분포하중을 받는 강점의 절점을 갖는 래티스돔에서는 거의 발생하지 않는 것으로 보고되고 있다(Kato *et al.*, 2005). 부재좌굴(member buckling)은 선형의 강재로 조립된 래티스돔의 특성으로 인

\* Corresponding author:

Tel: +82-2-910-4592; E-mail: csrha@kookmin.ac.kr

Received October 8 2014; Revised October 15 2014

Accepted October 16 2014

©2015 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

하여 발생하는 좌굴로서 부재 반개각이 커서 부재의 세장비가 큰 경우에 주로 발생한다. 한편 전체좌굴(global buckling)은 여러 절점에서 동시에 대변형이 일어나면서 발생하는 좌굴로서 셸과 같이 프레임 전체가 좌굴하는 셸좌굴거동(shell-like buckling)의 형태를 띄게 된다. 래티스돔의 좌굴거동은 일반적으로 유한요소해석법(finite element analysis)을 이용하여 분석하고 있으나 선형의 범위에서는 전체적인 좌굴특성이 셸의 좌굴특성과 유사하다는 점에서 셸의 선형탄성 좌굴이론으로부터 근사적으로 산정할 수 있다. 본 연구에서는 다양한 기하학적 형상을 갖는 래티스돔에 대한 좌굴특성을 탄성범위 내에서 분석하는 것을 목적으로 하되, 셸의 좌굴이론으로부터 유도한 근사적인 해석법과 유한요소해석법을 이용한 좌굴해석을 동시에 비교함으로써 근사해석법이 실용적으로 활용될 수 있는 범위에 대해서 살펴보았다. 또한 좌굴해석에 있어서 기하학적 비선형을 고려하는 경우 복잡하고 시간이 소요되는 반면 고유치 해석에 의한 해석은 상대적으로 해석이 용이하다. 따라서 셸이론식의 근사해와 더불어 고유치 해석에 의한 좌굴내력과 기하학적 비선형을 고려한 극한하중과의 관계를 살펴보았다.

## 2. 좌굴하중

좌굴은 거동 특성에 따라 탄성좌굴과 탄소성좌굴로 크게 분류할 수 있다. 특히 재료의 거동 범위를 선형탄성으로 가정한 상태에서 부재가 불완전 거동을 할 때의 좌굴하중을 선형 탄성좌굴하중이라고 한다.

현실적으로 래티스돔의 좌굴하중은 이론적으로 가정한 완전한 상태를 유지할 수 없기 때문에 일반적으로 탄성범위에서의 좌굴하중이라도 이론적으로 산정한 선형 탄성좌굴하중보다는 감소하게 된다. 이와 같은 좌굴하중의 감소에 영향을 주는 요인으로는 부재의 기하학적 비선형을 포함하여 시공과정에서 발생하는 불완전현상, 재질변화 등의 영향이 있다. 부재의 기하학적 비선형은 하중증분법이나 변위증분법 또는 선형호장법을 이용하여 이론적으로 해석이 가능하다(Yoon and Han, 2000; Han *et al.*, 2007). 시공과정에서 발생하는 좌굴하중 저감요인에 대해서는 구조형태 및 강성 등을 고려하여 경험적으로 산정한 좌굴저감계수를 선형 탄성좌굴하중에 곱하여 산정한다(Kato *et al.*, 2005; Kato *et al.*, 2003; Ogawa *et al.*, 2008).

한편, 탄소성좌굴은 기하학적 비선형뿐만 아니라 재료의 소성거동, 즉 재료의 비선형까지 고려한 좌굴을 말한다. 따라서 탄소성좌굴하중은 비선형해석에 의해 산정한 평형경로의 극대값이며 종국강도 또는 파괴하중을 의미한다. 탄소성좌굴

하중을 산정하기 위해서는 비선형해석이 필요하며 절점 및 부재의 비선형성을 고려한 모델링 및 해석기법이 제시되고 있다(Han *et al.*, 2003).

### 2.1 유한요소해석법을 적용한 탄성좌굴

일반적으로 선형 탄성좌굴은 고유치해석을 통하여 산출하는데 안정을 상실하는 최대하중을 의미한다. 선형 탄성해석의 유한요소방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$[K]\{u\} = \{P\} \quad (1)$$

여기서,  $[K]$ 는 구조물의 강성행렬,  $\{P\}$ 는 외부하중 벡터이며  $\{u\}$ 는  $[K]$ 와  $\{P\}$ 의 관계에서 구해지는 절점 변위벡터이다. 한편, 좌굴의 경우 변위  $\{u\}$ 의 값이 정해지지 않은 상태이며 외부하중  $\{P\}$ 역시 변위에 따라 달라지므로 미지수가 된다. 따라서

$$\{P\} = \lambda [K_C]\{u\} \quad (2)$$

와 같이 정의하고 식 (2)를 식 (1)에 대입하여 다음의 고유치 해석을 통해 좌굴하중을 산정한다.

$$([K] - \lambda [K_C])\{u\} = 0 \quad (3)$$

여기서,  $[K_C]$ 는 기하강성행렬을 의미한다. 식 (3)에서 구해지는  $\lambda$ 는 고유치(eigenvalue),  $\{u\}$ 는 고유벡터(eigen vector)라고 하며 최소의 고유치를  $\lambda_{cr}$ 라고 할 때 분기좌굴을 일으키는 좌굴하중  $P_{cr}^{lm} = \lambda_{cr}\{P\}$ 가 선형 탄성좌굴하중이 되며 이때의 고유벡터가 좌굴모드가 된다.

한편, 기하학적 비선형을 고려한 비선형 해석은 아래와 같이 구조물의 강성행렬과 기하강성행렬을 고려하여 수행한다.

$$([K] + [K_C])\{u\} = \{P\} \quad (4)$$

식 (4)는 하중증분법 또는 변위증분법을 이용하여 해석하며 후좌굴해석을 위해서는 호장법(arc-length method)이 보편적으로 이용되고 있다(Yoon and Han, 2000; Han *et al.*, 2007; McGuire *et al.*, 2000).

### 2.2 셸의 좌굴이론에 의한 근사해

래티스돔은 얇은 축과 긴 스패를 갖는 구조시스템으로서

구조적 거동이 연속체 구조로서의 셸과 유사한 거동을 보여 준다. 따라서 셸의 선형탄성 좌굴 이론해를 적용하여 근사적으로 래티스돔의 선형 좌굴하중을 산정할 수 있다. 즉, 등분포하중을 받는 래티스돔을 연속체의 셸과 같다고 가정하고 셸의 좌굴하중을 원용하여 산정할 수 있다. 등분포하중을 받는 구형셸에서 분기좌굴이 발생하는 단위 면적당 좌굴하중  $p_{cr}^{lin}$ 은 아래와 같이 산정된다(Kollar and Dulacska, 1984).

$$p_{cr}^{lin} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{t^2}{R^2} \quad (5)$$

여기서,  $\nu, E, t, R$ 은 각각 프와송비, 탄성계수, 셸 두께 및 곡률반경을 나타낸다. 한편, 부재길이가  $l_o$ 인 정삼각형의 그물형으로 구성된 이산계시스템인 래티스돔은 다음의 등가의 두께 및 탄성계수 값을 이용하여 연속체셸로 치환할 수 있다(Kato *et al.*, 2005).

$$t_{eq} = \frac{2\sqrt{3} r_o}{\sqrt{1 + \frac{2}{\kappa}}}, \quad E_{eq} = \frac{E_s A_s \sqrt{1 + \frac{2}{\kappa}}}{3 l_o r_o} \quad (6)$$

$$\left( \text{단, } \kappa = \frac{K_\theta l_o}{E_s I_s}, \quad r_o = \sqrt{\frac{I_s}{A_s}} \right)$$

프와송비를 1/3으로 가정하고 식 (6)을 식 (5)에 대입하여 아래와 같이 산정한다.

$$p_{cr}^{lin} = 2\sqrt{6} \frac{E_s A_s r_o}{l_o R^2 \sqrt{1 + \frac{2}{\kappa}}} \quad (7)$$

여기서,  $K_\theta, E_s, A_s, I_s$ 은 각각 절점강성, 강재의 탄성계수, 단면적 및 단면2차모멘트를 나타내며  $\lambda_o = \frac{l_o}{r_o}$ 로서 부재의 세장비,  $\theta_o$ 는 부재 반개각을 나타낸다. 식 (7)에서 산출된 값은 좌굴을 일으키는 단위면적당 하중이며 각 절점에 작용하는 좌굴하중  $P_{cr}^{lin}$ 은 식 (7)의 하중에 한 절점의 부담면적  $A_{node} = \frac{\sqrt{3}}{2} l_o^2$ 를 곱해서 산정한다. 여기에  $R = l_o/2\theta_o$ 과  $r_o = l_o/\lambda_o$ 의 관계식을 이용하여 식 (7)을 정리하면 다음과 같다.

$$P_{cr}^{lin} = 12\sqrt{2} \frac{E_s A_s \theta_o^2}{\lambda_o \sqrt{1 + \frac{2}{\kappa}}} \quad (8)$$

식 (7) 및 식 (8)에서 알 수 있는 바와 같이 좌굴하중은 래티스돔의 절점강성  $K_\theta$ 와 부재의 휨강성에 영향을 받는 변수  $\kappa$ 에 따라 달라진다. 변수  $\kappa$ 는 0에 가까울수록 핀절점을 나타내고 커질수록 강절점에 가까워지는데, 100이상을 강절점으로 간주하며 이 사이의 값에서는 반강절 절점으로 가정할 수 있으나 대개  $\kappa$ 의 값이 4이상인 경우 강절점과 유사한 거동을 하는 것으로 보고되고 있다(Han *et al.*, 2003; Kato *et al.*, 2005). 절점의 강성은 좌굴하중에 직접적인 영향을 주며  $\kappa$ 가 커질수록 좌굴하중은 증가하게 된다.

한편, 식 (8)의 좌굴하중은 전체좌굴로서 부재좌굴을 별도로 고려되지 않은 것이다. 부재가 세장한 경우에는 부재좌굴이 전체좌굴보다 먼저 발생할 수 있으며 부재좌굴을 고려한 좌굴하중은 한 절점 당 다음과 같이 산정할 수 있다(Kato *et al.*, 2005; Murakami and Heki, 1991).

$$P_{cr}^{lin(member)} = C_m \frac{E_s I_s}{l_o^2} \cdot \theta_o \cdot \gamma_m \quad (9)$$

식 (9)에서  $C_m$ 은 절점강성을 고려하는 계수로서 핀절점의 경우  $6\pi^2$ , 강절점의 경우 71이며  $\gamma_m$ 은 각 부재에 작용하는 축력의 불균등한 분포를 고려하기 위한 감소계수로서 0.7~1.0의 값을 갖는다. 식 (8) 및 식 (9)에서 보는 바와 같이 세장한 부재, 즉  $\lambda_o$  및  $\theta_o$ 가 큰 경우에는 부재좌굴(member buckling)에 의한 좌굴하중이 연속체셸 치환에 의한 전체좌굴하중(global buckling)보다 더 작아진다.

### 3. 해석모델 및 모델링

Fig. 1은 본 연구에서 다루는 래티스돔의 형태를 보여준다. 래티스돔의 평면은 원형이며 스펠은 60m, 분할 수는 12개로 고정하였으며, 비교를 위하여 타입별로 높이를 3m, 6m, 9m, 12m 및 15m로 나누어 모델링하였다. 각 타입별로 곡률반경 및 개각, 부재 반개각 등 형상과 관련한 정보는 Table 1에 정리하여 나타내었다. 각 지점(support)의 경계 조건은 핀으로 가정하였으며 돔의 각 절점은 핀과 강점으로 구분하여 고려하였다. 부재는 강관으로 가정하였으며 부재 강성에 대한 영향을 분석하기 위하여 부재의 종류는 Table 2와 같이 세 가지의 단면을 고려하였다. 재료의 탄성계수는 모든 부재에 대해 공히  $E_s = 205,000\text{MPa}$ 로 가정하였다.

유한요소해석을 위한 모델링은 범용해석 프로그램인 Nx-Nastran(2005)을 이용하였다. 절점을 핀으로 가정한 모델에서는 Nx-Nastran의 내장요소 가운데 축력만을 전달하는 CROD 요소를 이용하였으며, 절점을 강점으로 가정한 모델

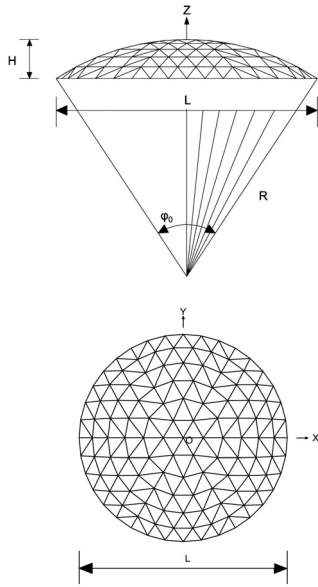


Fig. 1 Lattice dome geometry for modeling(elevation and plan)

에서는 모멘트와 축력을 모두 전달할 수 있는 CBEAM 요소를 적용하여 해석하였다. 시스템에 적용하는 하중은 등분포 하중으로 가정하여 각 절점에 균등하게 적용하였다. 일반적으로 래티스돔에 작용하는 하중은 중력에 의해 수직방향이지만 쉘의 좌굴이론과의 비교를 위해서 쉘의 중심방향으로 작용하는 것으로 가정하였다.

#### 4. 해석결과 및 분석

##### 4.1 쉘의 좌굴이론식에 의한 극한하중

쉘의 이론식은 식 (8) 및 식 (9)에 의해 등분포하중을 받

Table 1 Dome geometry used in modeling

Height, H	H/L Ratio	Radius of Curvature, R	Angle of opening, $\psi$	Half Angle of opening for members, $\theta$
3m	0.05	151.0m	22.92	0.955
6m	0.10	78.0m	45.24	1.885
9m	0.15	54.5m	66.80	2.783
12m	0.20	43.5m	87.20	3.633
15m	0.25	37.5m	106.26	4.428

Table 2 Properties of members used in modelling

Member (Tube)	Sectional Area ( $A_s$ )	Moment of Inertia ( $I_s$ )	Radius of Gyration ( $r_o$ )
$\phi$ -101.6×5.0	$1.517 \times 10^3 \text{mm}^2$	$1.77 \times 10^6 \text{mm}^4$	34.2mm
$\phi$ -165.2×5.0	$2.516 \times 10^3 \text{mm}^2$	$8.08 \times 10^6 \text{mm}^4$	56.7mm
$\phi$ -216.3×4.5	$2.994 \times 10^3 \text{mm}^2$	$1.68 \times 10^7 \text{mm}^4$	74.9mm

는 래티스돔의 한 절점 당 극한하중을 산출한다. 식 (8)은 래티스돔의 전체좌굴(global buckling)에 의한 최대하중을 제공하며, 식 (9)는 부재좌굴(member buckling)에 의한 극한하중을 제공한다. 절점의 강성, 즉 핀접합과 강접합의 영향은 식 (8) 및 식 (9)에서 각각 계수  $\kappa$ 와  $C_m$ 의 값을 달리하여 산출할 수 있다. 여기에서는 전체좌굴에 의한 극한하중을 제공하는 식 (8)에서 절점 강성을 강접과 핀에 대해  $\kappa$ 의 값을 각각  $\infty$  및 1로 가정하여 극한하중을 산정하였다.

Table 3은 쉘의 좌굴이론식에 의해 산정한 좌굴하중, 즉 전체좌굴과 부재좌굴에 의한 내력을 정리한 것이다. 표에서 괄호안의 숫자는 비선형해석에 의한 극한하중 대비 이론식의 좌굴내력의 비율을 나타내며 밑줄 친 굵은 숫자는 전체좌굴과 부재좌굴 중 작은 값을 의미하고 따라서 지배되는 좌굴의 종류를 알 수 있다. 이를 통하여 높이-스팬비가 작을수록, 그리고 부재의 크기가 작을수록 부재좌굴보다는 전체좌굴이 좌

Table 3 Ultimate load per joint from the shell theory

Height	H/L ratio	Rigid joint		Pin joint	
		Global buckling <sup>1)</sup>	Member buckling <sup>2)</sup>	Global buckling	Member buckling
3m	0.05	10.0 / 27.4 / 37.8 <sup>3)</sup> <b>(1.25 / 1.24 / 1.08)</b> <sup>4)</sup>	17.0 / 77.4 / 160.9 (2.12 / 3.51 / 4.61)	5.8 / 15.8 / 21.8 <b>(2.40 / 3.95 / 4.74)</b>	14.1 / 64.5 / 134.2 (5.89 / 16.14 / 29.18)
6m	0.10	38.1 / 104.7 / 144.4 (1.36 / <b>1.31</b> / 1.20)	32.2 / 147.1 / 305.9 <b>(1.15</b> / 1.84 / 2.55)	22 / 60.5 / 83.4 <b>(1.26 / 2.02 / 2.38)</b>	26.9 / 122.7 / 255.1 (1.54 / 4.09 / 7.29)
9m	0.15	80.5 / 221.4 / 305.2 (1.71 / 1.38 / <b>1.22</b> )	44.8 / 204.4 / 425.0 <b>(0.95 / 1.28</b> / 1.70)	46.5 / 127.8 / 176.2 (0.85 / <b>1.42 / 1.60</b> )	37.3 / 170.5 / 354.5 <b>(0.68</b> / 1.89 / 3.22)
12m	0.20	131.7 / 362.3 / 499.5 (2.40 / 1.51 / <b>1.31</b> )	54.0 / 246.3 / 512.2 <b>(0.98 / 1.03</b> / 1.35)	76.1 / 120.9 / 288.4 (0.63 / 1.05 / <b>1.31</b> )	45.0 / 205.4 / 427.2 <b>(0.38 / 1.03</b> / 1.94)
15m	0.25	186.3 / 512.4 / 706.5 (2.74 / 2.03 / 1.36)	59.7 / 272.7 / 567.1 <b>(0.88 / 1.08 / 1.09)</b>	107.6 / 295.8 / 407.9 (0.49 / 0.90 / <b>1.02</b> )	49.8 / 227.5 / 473.0 <b>(0.23 / 0.69</b> / 1.18)

<sup>1)</sup>Global buckling load by Eq.(8)

<sup>2)</sup>Member buckling load by Eq.(9)

<sup>3)</sup>Member sizes  $\phi$ -101.6×5/165.2×5/216.3×4.5

<sup>4)</sup>Capacity ratio to the ultimate load by Eq.(4). Bold and underlined numbers denote governing ratio.

굴하중을 지배하는 것을 알 수 있다. 절점이 강접인 래티스돔에 비하여 핀절점 래티스돔에서 이론식의 좌굴내력비의 변동폭이 큰 것은 절점의 강성을 나타내는 계수  $k$ 의 가정치와 연관이 많다. 즉, 식 (8)에서 핀절합의 경우, 어떤 값을 적용하는지에 따라 비율이 달라지게 된다. 그러나 절점이 강접인 경우와 같이 부재강성과 높이-스팬비가 작을수록 전체좌굴에 의해 내력이 결정되는 것은 동일하다.

#### 4.2 래티스돔의 고유치 해석 및 좌굴하중

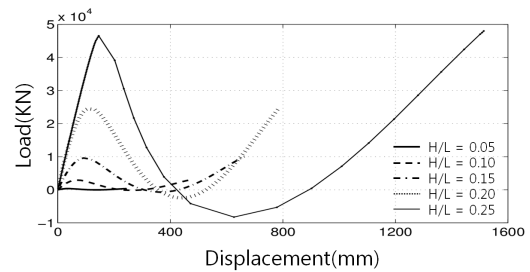
래티스돔의 좌굴모드 및 좌굴하중은 식 (3)의 고유치 해석을 통해 산정한 임계점에서의 형상과 그에 해당하는 내력이 다. Table 4는 고유치해석에 의한 각 타입별 좌굴하중을 나타낸 것이다. 래티스돔의 높이가 높을수록, 즉, 높이-스팬비가 클수록 전체 좌굴하중이 커지는 것을 알 수 있다. 고유치 해석에 의한 좌굴내력은 항상 기하학적 비선형을 고려한 비선형해석에 의한 극한하중보다는 크게 되는데 표에는 좌굴하중과 함께 극한하중에 대한 비율을 나타내었다. 강접의 래티스돔에서는 높이-스팬비가 크고 작은 부재일수록 좌굴하중은 극한하중과 비슷해지고, 반대로 부재가 커지거나 높이-스팬비가 작아지면 극한하중에 대비하여 좌굴하중의 비율이 커지는 것을 알 수 있다. 또한 Table 3과 Table 4의 비교를 통하여 고유치해석의 좌굴하중은 쉘이론식(전체좌굴 및 부재좌굴)에 의한 좌굴하중에 비해 전체적으로 10% 정도 내외의 큰 값을 주는 것을 알 수 있다.

한편, 핀절점의 래티스돔은 전체적으로 강절점 래티스돔에 비해서는 다소 극한하중 대비 높은 좌굴하중비를 보여주고 있으나 부재크기 및 높이-스팬비에 따라 큰 변동이 없이 일정한 비율을 보여준다. 즉, 핀절점의 래티스돔에서 비선형을

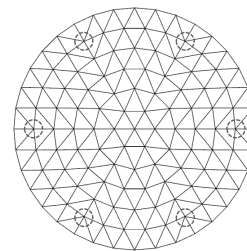
고려한 극한하중은 고유치해석에 의한 좌굴하중보다 1.5~1.7배의 작은 값을 보여준다.

#### 4.3 래티스돔의 비선형 거동 및 극한하중

래티스돔의 기하학적 비선형 거동 및 그에 따른 최대하중, 즉 극한하중은 식 (4)의 방정식을 통하여 산정할 수 있다. Fig. 2 및 Fig. 3은 래티스돔의 각 절점을 핀으로 가정한 구조의 비선형 거동을 보여준다. Fig. 2(a)는 래티스돔의 수직방향 하중과 변위의 관계식을 돔의 수직높이별로 중첩하여 나타낸 것이며 Fig. 2(b)는 최대처짐이 발생하는 절점을 보여준다.



(a) Load-displacement responses



(b) Location of Maximum displacement

Fig. 2 Geometric nonlinear responses and plan view of latticed dome

Table 4 Comparison between buckling and ultimate load

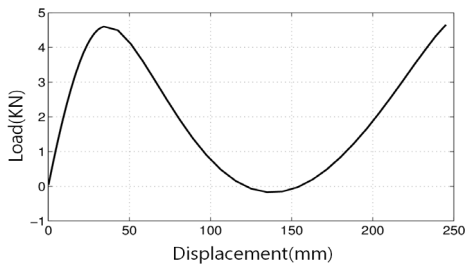
Height	H/L ratio	Rigid joint		Pin joint	
		Buckling load <sup>1)</sup>	Ultimate load <sup>2)</sup>	Buckling load	Ultimate load
3m	0.05	11.1 / 31.2 / 50.1 <sup>3)</sup> (1.39 / 1.42 / 1.43) <sup>4)</sup>	8 / 22 / 34.9	3.6 / 5.9 / 7.0 (1.48 / 1.47 / 1.52)	2.4 / 4.0 / 4.6
6m	0.10	35.6 / 115.9 / 185.9 (1.27 / 1.45 / 1.55)	28 / 80 / 120	27.5 / 45.6 / 54.3 (1.57 / 1.52 / 1.55)	17.5 / 30.0 / 35.0
9m	0.15	50.8 / 219.9 / 377.3 (1.08 / 1.37 / 1.51)	47 / 160 / 250	88.1 / 146.2 / 173.8 (1.60 / 1.62 / 1.58)	55.0 / 90.0 / 110.0
12m	0.20	63.0 / 282.9 / 560.0 (1.15 / 1.18 / 1.47)	55 / 240 / 380	194.7 / 321.1 / 384.4 (1.62 / 1.60 / 1.74)	120 / 200 / 220
15m	0.25	67.6 / 305.8 / 629.9 (0.99 / 1.21 / 1.21)	68 / 253 / 520	349.8 / 580.1 / 690.3 (1.59 / 1.76 / 1.73)	220 / 330 / 400

<sup>1)</sup>Buckling load by Eq.(3)

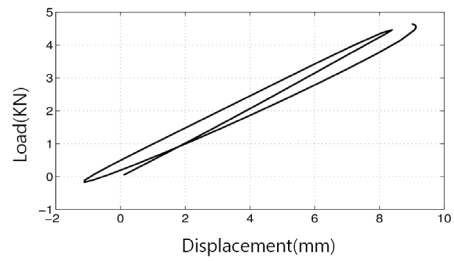
<sup>2)</sup>Ultimate load by Eq.(4)

<sup>3)</sup>Member sizes  $\phi$ -101.6×5/165.2×5/216.3×4.5

<sup>4)</sup>Capacity ratio to the ultimate load by Eq.(4).

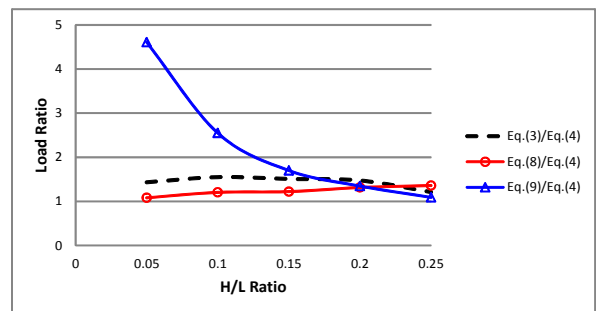
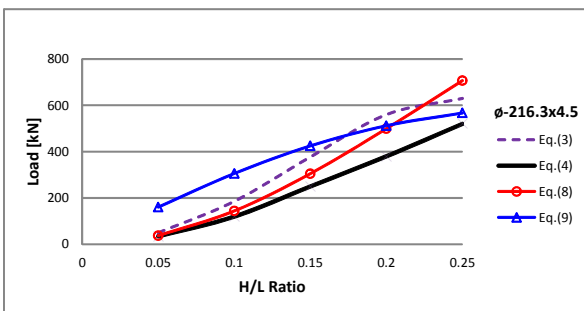
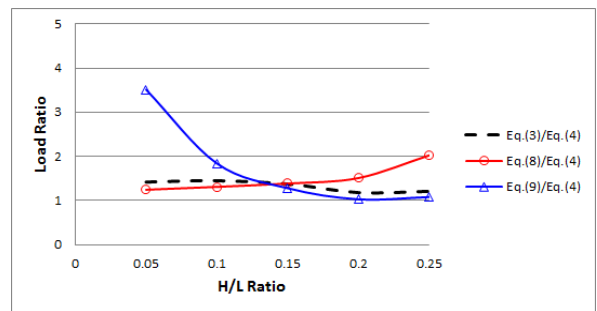
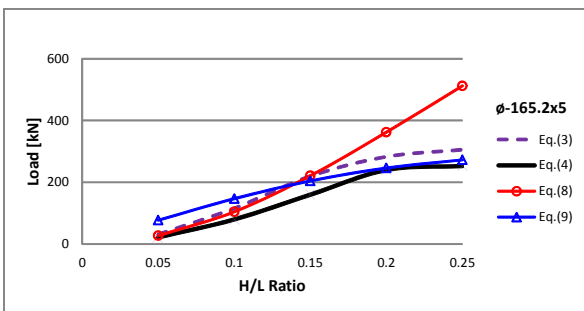
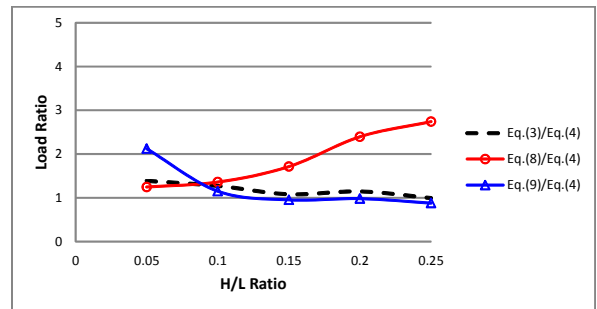
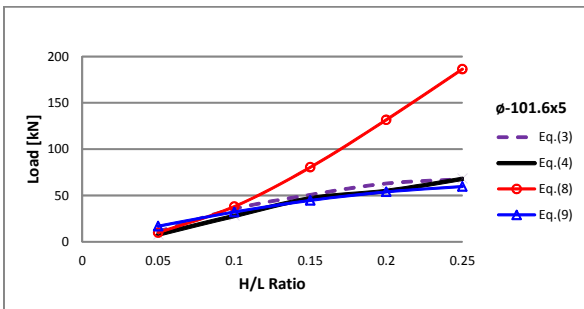


(a) Response at maximum deflection point



(b) Response at an apex

Fig. 3 Load-displacement relation at maximum deflection and an apex point



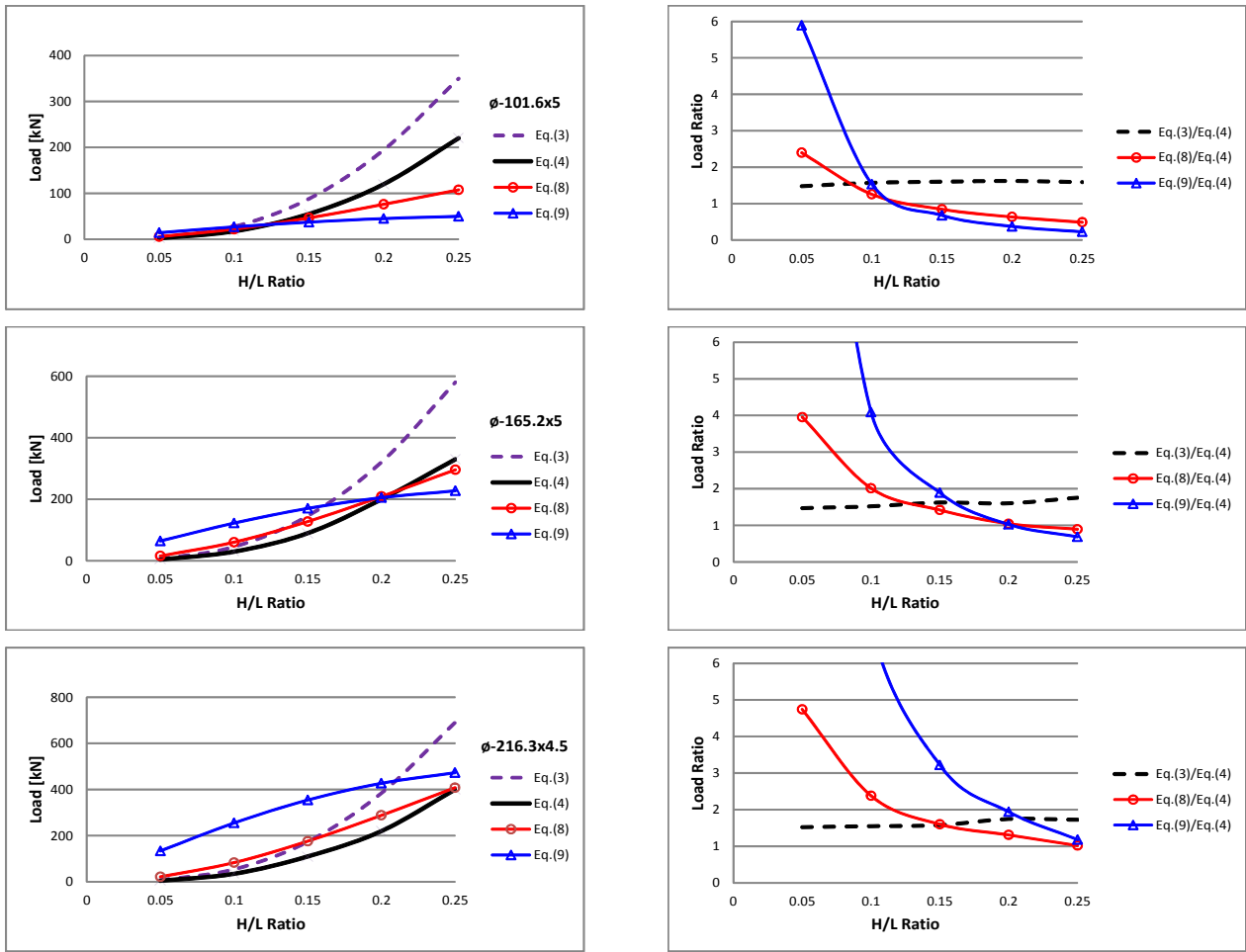
(a) Ultimate loads from various analysis

(b) Load ratio with respect to the nonlinear analysis

Fig. 4 Results of rigid-jointed dome analysis

Fig. 2(a)의 세로축에 표현된 하중은 돔 전체에 작용하는 수직하중이며 가로축의 변위는 최대변위점에서의 처짐이며 최대변위는 Fig. 2(b)에서 원으로 표현된 절점에서 발생한다. 비선형 해석에 의한 최대하중은 고유치 해석을 통한 좌굴하중에 비해서 작으며 선형 탄성좌굴하중과 마찬가지로 돔의 높이가 높을수록, 즉, 높이-스팬비가 클수록 전체좌굴하중도 커지며 뚜렷한 뒤틀림좌굴(snap-through) 현상을 보여주고 있다.

Fig. 3(a) 및 Fig. 3(b)는 최대처짐이 발생하는 절점과 중앙 정점에서의 하중-변위 관계를 3m 높이의 돔(H/L=0.05)의 경우를 대표적으로 나타내었다. 높이가 다른 나머지 돔의 경우에도 절점에서의 극한하중 및 처짐의 크기가 다를 뿐 형태에서는 Fig. 3과 유사한 하중-변위 관계를 나타낸다. 여기서, 세로축의 하중은 전체하중을 전체 절점수로 나눈 절점당 하중이다. Fig. 3(a)의 최대처짐은 Fig. 2(b)에서 나타낸 바와 같이 지점에 근접한 절점에서 발생하며, 돔의 중



(a) Ultimate loads from various analysis

(b) Load ratio with respect to the nonlinear analysis

Fig. 5 Results of pin-jointed dome analysis

양부에서의 처짐은 오히려 주변부, 즉 최대처짐이 발생하는 절점에서의 수직처짐에 의해 치올려지는 영향으로 인하여 Fig. 3(b)와 같이 상대적으로 더 적은 처짐량을 갖는 것을 알 수 있다. 이와 같은 현상은 중앙부에 집중하중을 받는 경우와 달리 구조체에 등분포하중을 적용하였기 때문이며 Fig. 2(b)와 같은 parallel lamellar 형태의 평면에서 지붕을 분할하는 능선, 즉 60° 각도의 선상에서 최대 처짐이 발생하는 것에 유의할 필요가 있다.

한편, 래티스돔의 각 절점을 고정으로 하는 모델에서는 전체 구조물의 자유도의 증가로 인하여 절점을 핀으로 하는 모델과 달리 극한하중 이후의 뒤틀좌굴 거동을 정확하게 산정하기가 어려웠다. 다만 최대하중, 즉 극한하중 점까지의 거동에 대해서는 각 절점에 수직으로 가해지는 목표하중을 조절해가면서 최대내력을 산출하였다. 핀절점 및 강절점의 래티스돔에 대해 높이에 따른 각 타입의 래티스돔이 갖는 절점별 최대내력, 즉 극한하중은 Table 4에 정리하여 나타냈다.

Table 3과 Table 4에 정리된 내용은 Fig. 4 및 Fig. 5

에 그래프로 나타냈다. Fig. 4는 강절점 래티스돔의 좌굴거동을 부재크기별로 나타낸 것으로서 Fig. 4(a)는 높이-스팬비에 따른 좌굴내력을 해석방법별로 비교하여 나타낸 것이며 Fig. 4(b)는 식 (4)의 비선형 해석에 의한 최대극한하중을 기준으로 각 해석방법에 의한 좌굴내력의 비율을 나타낸 것이다. 좌굴하중은 모두 절점당 하중을 나타내며 단위는 kN이다. Fig. 4에서 보는 바와 같이 쉘좌굴이론식의 전체좌굴식에 의한 좌굴하중(그림에서 Eq.(8)로 표기된 곡선)은 전체적으로 유한요소해석법을 이용한 비선형 해석의 극한하중(그림에서 Eq.(4)로 표기된 굵은 실선)에 비해 높이-스팬비가 높아질수록 좌굴내력을 과대평가하고 있는 것을 알 수 있다. 다만 부재의 크기가 큰 경우에는 그 비율이 상대적으로 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 즉, Fig. 4(b)에서 보는 바와 같이 높이-스팬비의 비율이 0.05에서 0.25로 증가함에 따라 비선형 해석에 의한 극한하중 대비 이론식에 의한 좌굴내력의 비율은 ϕ-101.6×5의 경우 1.25에서 2.74로, ϕ-165.2×5의 경우 1.24에서 2.03로, 그리고 ϕ-216.3×4.5

의 경우에는 1.08에서 1.36으로 점차 비율이 줄어드는 것을 알 수 있다.

한편, 셸좌굴이론식의 부재좌굴식(Fig. 4에서 Eq.(9)로 표기된 곡선)은 높이-스팬비가 낮은 경우 이론식에 의한 전체좌굴하중 및 비선형 해석에 의한 극한하중에 비해 매우 과대평가하는 경향이 있으나 높이-스팬비가 0.1-0.15를 넘으면서 이론식의 전체 좌굴하중(Fig. 4에서 Eq.(8)로 표기된 곡선)보다 작아지면서 비선형 해석의 극한하중과 거의 비슷해지는 것을 알 수 있다. 따라서 높이-스팬비가 작은 경우에는 셸이론식의 전체좌굴식에 의해, 높이-스팬비가 커질수록 셸이론식의 부재좌굴식에 의해 좌굴내력이 결정되는 것을 알 수 있으며 두 이론식의 최소값에 의해 좌굴내력이 결정되는데 경계가 되는 높이-스팬비는 부재가 커질수록 커진다. 이론식에 의한 좌굴내력은 유한요소해석에 의한 극한하중과 부재크기 및 지붕의 높이에 따라 달라지지만 약 30%이내의 근사치를 보여주고 있다.

한편, 고유치 해석에 의한 좌굴내력(Fig. 4에서 Eq.(3)으로 표기된 점선)은 예측할 수 있는 바와 같이 항상 비선형 해석에 의한 극한하중에 비해 1.0~1.5배 내외로 크지만 이론식에 의한 좌굴하중(Eq.(8)과 Eq.(9)중 작은 값)보다는 모든 범위에서 내력을 과대평가하는 것을 알 수 있다.

Fig. 5는 핀절점 래티스돔의 거동을 나타낸다. 이론식의 전체좌굴내력은 식 (8)에서 접합부의 강성을 나타내는 계수  $\kappa$ 의 값에 의해 좌우되는데 여기에서는 1.0을 적용하여 유한 요소의 비선형 해석값과 비교하였다. 강절점 래티스돔의 경우와는 달리 이론식에 의한 전체좌굴 및 부재좌굴하중은 높이-스팬비가 작은 경우에는 비선형 해석에 의한 극한하중에 비해 지나치게 큰 내력을 제공한다. 특기할만한 사항은 전체 좌굴과 부재좌굴의 경계가 되는 점의 내력이 극한하중과 근사한 값을 갖는다는 점이며 이 기준점을 중심으로 낮은 높이-스팬비의 돔에서는 과대평가된 내력을, 높은 높이-스팬비의 돔에서는 더 안전측의 값을 제공한다. Fig. 5에서 알 수 있는 바와 같이 핀절점의 돔에서 높이-스팬비가 커질수록 이론식에 의한 좌굴내력이 비선형 해석에 의한 극한하중과 근사한 값을 갖게 된다. 한편, 고유치 해석에 의한 좌굴내력은 강절점 래티스돔의 경우와 같이 전체적으로 비선형 해석에 의한 좌굴내력보다는 항상 크며 그 비율도 1.5~1.7로 거의 일정하지만 강절점의 래티스돔의 경우보다는 다소 차이가 발생하는 것을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 강절점과 핀절점으로 구성된 래티스돔의 좌

굴특성에 대해 셸좌굴에 기반한 이론식과 유한요소해석의 결과를 비교하였다. 유한요소해석은 고유치 해석을 통한 좌굴하중과 기하학적 비선형 해석을 통한 극한하중을 포함하여 이들의 상호비교를 통하여 다음과 같은 내용을 확인하였다.

강절점 래티스돔의 경우, 셸좌굴 이론식에 의한 좌굴하중은 돔의 높이가 낮은 경우, 즉 높이-스팬비가 작은 경우에는 돔의 전체좌굴에 의해 좌굴내력이 결정되며, 반대로 높이-스팬비가 큰 경우에는 부재좌굴에 의해 좌굴내력이 결정된다. 따라서 셸좌굴 이론식의 전체 좌굴하중과 부재좌굴하중 가운데 최소값을 취하여 좌굴하중으로 산정하면 기하학적 비선형을 고려한 유한요소해석에서의 극한하중과 비교하여 대체로 전체좌굴의 좌굴내력은 30% 이내의 오차로 좌굴하중을 결정할 수 있다. 고유치해석을 통한 좌굴하중은 1.0~1.5의 비율로 비교적 일정한 비율의 근사치를 제공하지만 이론식에 의한 좌굴내력에 비해서는 더 큰 차이를 보여주고 있다. 따라서 셸좌굴 이론식을 적용하여 부재의 좌굴하중을 산정하는 경우, 오히려 고유치 해석을 통한 좌굴하중보다 극한하중에 가까운 값을 제공할 뿐만 아니라 좌굴을 지배하는 형태까지도 예측할 수 있는 장점이 있다.

핀절점 래티스돔의 경우, 셸좌굴 이론식의 좌굴하중은 절점의 강성의 가정치에 따라 달라지며 특히 높이-스팬비가 낮은 돔의 경우에는 비선형 해석에 의한 극한하중에 비하여 지나치게 좌굴하중을 과대평가하는 것으로 나타났다. 전체좌굴을 나타내는 이론식에서 절점강성  $\kappa$ 의 값을 1.0으로 가정하는 경우 부재좌굴을 나타내는 이론식의 좌굴하중과 같은 하중에서 비선형 해석에 의한 좌굴하중과 거의 같은 값을 제공하며 경계가 되는 높이-스팬비는 부재의 강성이 커지면서 증가하는 것으로 나타났다. 또한 고유치해석에 의한 좌굴하중은 강절점 래티스돔의 경우와 같이 비선형 해석에 의한 극한하중보다 비교적 일정하게 큰 내력을 제공하지만 그 비율은 1.5-1.7로 강절점 래티스돔의 경우보다 큰 것으로 나타났다.

## References

- Han, S.E. (1996) A Study on the Analytical Technique of Stability and Buckling Characteristics of the Single Layer Latticed Domes, *J. Comput. Struct. Eng.*, 9(3), pp.209~216.
- Han, S.E., Kwon, H.J., Kim, J.B. (2003) The Elasto-Plastic Buckling Analysis of Ball-Jointed Single Layer Latticed Domes Considering the Characteristics of a Connector, *KASS J.*, 3(2), pp.91~99.
- Han, S.E., Lee, S.J., Lee, K.S. (2007) A Study on



- the Post-Buckling Analysis of Spatial Structures, *AIK J.*, 23(7), pp.53~60.
- Han, S.E., Yang, J.G., Lee, S.J., Lee, J.H.** (2006) A Study on the Buckling Load Formulae for the Single Layer Latticed Dome, *KASS J.*, 6(1), pp.75~82.
- Kato, S., Fujimoto, M., Ogawa, T.** (2005) Buckling Load of Steel Single-Layer Reticulated Domes of Circular Plan, *IASS J.*, 46(1), pp.41~63.
- Kato, S., Kim, J.M., Cheong, M.C.** (2003) A New Proportioning Method for Member Sections of Single-layer Reticulated Domes Subjected to Uniform and Non-uniform Loads, *Eng. Struct.*, 25, pp.1265~1278.
- Kollar and Dulacska** (1984) Buckling of shells for engineers, John Wiley & Sons, p.303
- McGuire, W., Gallagher, R.H., Ziemian, R.D.** (2000) Matrix Structural Analysis, John Wiley & Sons, p.460.
- Murakami, M., Heiki, K.** (1991) On the Analysis of Elastic Buckling of Single-layer Latticed Domes with Regular Hexagonal Plan under Gravity load, Proc. of *IASS 1991 Symposium*, Copenhagen, 3, pp.101~108.
- Nx-Nastran** (2005) Users Guide. Version 9.0, UGS Corporation
- Ogawa, T., Kato, S., Fujimoto, M.** (2008) Buckling Load of Elliptic and Hyperbolic Paraboloidal Steel Single-layer Reticulated Shells of Rectangular Plan, *IASS J.*, pp.21~36.
- Yoon, H.H., Han, S.E.** (2000) A Study on the Algorithm for the Analysis of Multiple Bifurcation of Latticed Domes, *AIK J.*, 16(9), pp.3~9.

## 요 지

본 논문에서는 대공간구조에 폭넓게 사용되는 단층 래티스돔의 비선형거동에 관한 비교 연구를 수행하였다. 단층 래티스 돔은 특성상 두께가 얇은 셸구조의 거동과 유사하므로 전통적인 셸좌굴 이론을 적용하여 내력을 산출할 수 있으며 또한 이 결과를 유한요소해석 프로그램을 이용한 수치해석의 결과와 비교, 분석하였다. 셸좌굴 이론을 이용하여서는 래티스 돔의 전체좌굴하중과 부재좌굴하중을 산정하였으며, 유한요소해석법을 이용하여서는 고유치 해석에 의한 좌굴하중과 기하학적 비선형 해석에 의한 극한하중을 각각 산정하였다. 래티스돔의 절점은 강절점 및 핀절점으로 각각 모델링하였다. 셸좌굴이론에 의한 좌굴내력은 전체좌굴하중과 부재좌굴하중의 작은 값으로 결정되며 이 값은 유한요소해석을 이용한 고유치 해석보다는 비선형 해석에 의한 극한하중에 보다 근사한 값을 제공하였으며 또한 좌굴하중의 형식을 예측하는데에 유용하게 활용되었다.

**핵심용어** : 래티스 돔, 셸좌굴 이론, 유한요소해석, 기하학적 비선형