

# 시간영역 전자기파 전파해석을 위한 유한요소기반 PML 기법

이 상 리<sup>1</sup> · 김 보 영<sup>1</sup> · 강 준 원<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>홍익대학교 토목공학과

## A Finite Element Based PML Method for Time-domain Electromagnetic Wave Propagation Analysis

Sang-Ri Yi<sup>1</sup>, Boyoung Kim<sup>1</sup> and Jun Won Kang<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Civil Engineering, Hongik University, Seoul, 121-791, Korea

### Abstract

This paper presents a new formulation for transient simulations of microwave propagation in heterogeneous unbounded domains. In particular, perfectly-matched-layers(PMLs) are introduced to allow for wave absorption at artificial boundaries used to truncate the infinite extent of the physical domains. The development of the electromagnetic PML targets the application to engineering mechanics problems such as structural health monitoring and inverse medium problems. To formulate the PML for plane electromagnetic waves, a complex coordinate transformation is introduced to Maxwell's equations in the frequency-domain. Then the PML-endowed partial differential equations(PDEs) for transient electromagnetic waves are recovered by the application of the inverse Fourier transform to the frequency-domain equations. A mixed finite element method is employed to solve the time-domain PDEs for electric and magnetic fields in the PML-truncated domain. Numerical results are presented for plane microwaves propagating through concrete structures, and the accuracy of solutions is investigated by a series of error analyses.

**Keywords** : Perfectly-Matched-Layers(PMLs), mixed finite element method, concrete structure, microwaves, Maxwell's equations

### 1. 서 론

지난 세기 급속한 경제발전 속에 건설된 우리나라 사회간접자본(SOC) 시설들이 노후화되고 교통량 증가 및 자연재해로 인한 구조물의 피로와 손상문제 등이 대두됨에 따라, 이들에 대한 정밀 구조건전도 평가가 사회적으로 큰 관심을 받고 있다. 특히 콘크리트 구조물의 손상을 평가하는 방법으로서는 적외선 열화상기법, 방사선기법, 초음파검사법, 마이크로파탐사기법 등 다양한 비파괴탐사기법들이 연구되어 왔는데, 그 중 마이크로파를 이용한 방법은 구조물 내부로의 탁월한 투과 능력과 현장시험의 용이성, 경제성 등으로 인해 잠재적 성능이 가장 큰 것으로 인식되고 있다(Pla-Rucki *et al.*, 1995).

마이크로파를 이용한 비파괴탐사기법들 중 대표적인 방법으로 마이크로파의 전체응답파형 역해석(microwave full-waveform inversion) 기법을 들 수 있는데, 이러한 역해석은 일반적으로 구조물을 통과하는 전자기파의 투과, 반사, 굴절 등의 거동을 계산하는 정해석(forward analysis)의 반복 과정을 통해 이루어진다(Kang, 2013). 본 연구에서는 이러한 마이크로파 역해석에 사용될 수 있는 정해석 기법으로서 구조물과 공기로 이루어진 무한 매질에서의 평면전자기파 전파에 대한 유한요소해석 방법을 제시한다.

마이크로파 전파에 따른 전기장과 자기장의 수치 해를 계산하기 위해서는, 일반적으로 무한공간에서의 마이크로파 전파를 구조물을 포함하는 유한영역에서 모델링하는 과정이 필요하다. 이를 위한 수치적 방법 중 하나는 원래의 무한영역

\* Corresponding author:

Tel: +82-2-320-1601; E-mail: jwkang@hongik.ac.kr  
Received September 5 2014; Revised February 10 2015  
Accepted February 13 2015

©2015 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

을 대신할 유한영역을 만들고, 그 경계에 수치적 파동흡수영역을 도입하여 파동을 인위적으로 감쇠시키는 것이다. 본 연구에서는 유한영역에서의 마이크로파 전파를 모델링하기 위해 다양한 주파수와 입사각에 대해 파동흡수 성능이 우수한 Perfectly-Matched-Layer(PML)를 경계조건으로 적용하였다.

이렇게 PML을 경계로 하는 유한영역에서 마이크로파의 전파 거동을 해석하기 위하여, 본 연구에서는 PML을 연동한 맥스웰방정식의 수치 해를 시간영역 혼합유한요소법에 의해 계산하였다. 전자기파의 시간영역 수치해석을 위해서는 유한차분법이 널리 사용되어 왔는데(Lee *et al.*, 1997), 그 외에도 적분방정식법(Bloemenkamp *et al.*, 2000), 유한체적법(Harber *et al.*, 2007) 등이 사용되고 있다. 이러한 기존의 방법들과 달리 이 연구에서는 자유로운 격자구조를 통해 해석 대상 구조물의 복잡한 기하학적 형상을 모델링할 수 있고 이질적 물성의 경계면에서 전자기장과 유동률(flux)의 연속조건을 보다 체계적으로 다룰 수 있는 유한요소법을 사용하였다.

이 논문에서는 콘크리트 부재와 자유공간으로 이루어진 무한매질을 PML을 경계로 하는 유한영역으로 치환하고, 이러한 유한영역에서 PML의 파동감쇠 조건을 반영하기 위해 맥스웰방정식을 변환하는 과정을 거친 후 혼합유한요소법에 의해 수치 해를 계산하였다. 이 연구에서와 같이 변수비분할(unsplit-field) PML을 시간영역에서 혼합유한요소법을 기반으로 정식화한 사례는 현재까지 드물다. 공기로만 이루어진 균일매질의 경우와 콘크리트 구조물이 존재하는 비균일매질의 경우에 대하여 단일주파수 및 복합주파수를 갖는 마이크로파의 전기장을 계산하였고, 정해와의 비교 및 다양한 오차 분석을 통해 수치 해의 정확도를 검증하였다.

## 2. 시간영역 전자기파 방정식

3차원 공간에서 전자기파의 전파에 따른 전기장( $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ )과 자기장( $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ )은 다음과 같은 시간영역 맥스웰방정식에 의해 지배된다.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_o \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_o \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1b}$$

여기서,  $\epsilon_o$ 와  $\mu_o$ 는 진공의 유전율과 투자율이고,  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$ 은 각각  $\epsilon_o$ 와  $\mu_o$ 에 대한 상대유전율과 상대투자율로서 매질의 종류에 따라 달라지는 값이다.  $\mathbf{J}$ 는 전류밀도이다.

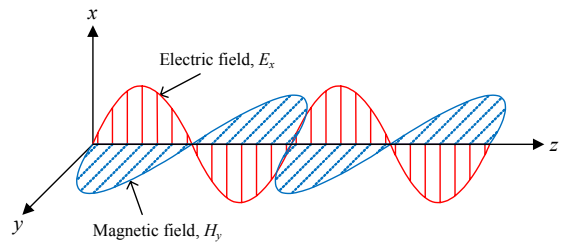


Fig. 1 A schematic of one-dimensional plane electromagnetic wave propagation

Fig. 1에서와 같은 1차원 평면전자기파를 고려하면 식 (1)의 맥스웰방정식은 식 (2)와 같이  $z$ 방향으로 진행하는 전자기파에 대한 두 개의 편미분방정식으로 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -J - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{2b}$$

여기서,  $E_x(z, t)$ 와  $H_y(z, t)$ 는 각각  $x$ 와  $y$ 방향의 위상을 가지고  $z$ 방향으로 진행하는 전기장과 자기장이며,  $\epsilon (= \epsilon_o \epsilon_r)$ 와  $\mu (= \mu_o \mu_r)$ 는 각각 매질의 유전율과 투자율이다.

## 3. PML을 이용한 평면전자기파 해석의 정식화

### 3.1 복소좌표 변환

무한영역에서 평면전자기파의 전파를 모델링하기 위해 Fig. 2와 같이  $L \leq |z| \leq L_t$ 에 PML이 위치하는 1차원 유한영역을 고려하였다.

$z = \pm L_t$ 에서는 전기장과 자기장이 0인 도체의 경계조건을 도입하였다. PML은 인위적으로 전자기파의 위상을 감소시키는 역할을 하며, 이를 위해 다음과 같이 감쇠함수  $f(z)$ 를 포함하는 복소좌표  $\tilde{z}$ 를 정의한다.

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \int_0^z \lambda(s) ds = \int_0^z \left[ 1 - i \frac{c_{ref} f(s)}{\omega b} \right] ds \\ &= z - i \frac{c_{ref}}{\omega} \int_0^z \frac{f(s)}{b} ds \end{aligned} \tag{3}$$

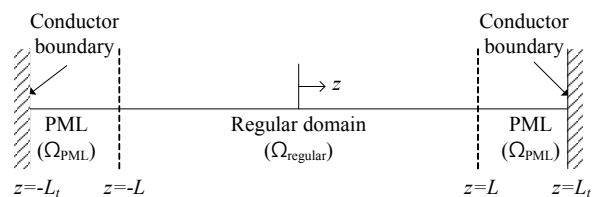


Fig. 2 A schematic of the PML-truncated infinite domain

여기서,  $\omega$ 는 각진동수이고,  $b$ 는 특성길이(characteristic length),  $c_{ref}$ 는 매질의 대표 파동속도이다. 감쇠함수  $f(z)$ 를  $b$ 로 나눈 새로운 함수  $g(z) = f(z)/b$ 를 도입하면 복소좌표  $\tilde{z}$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{z} = z - i \frac{c_{ref}}{\omega} G(z) \quad (4)$$

이때  $G(z)$ 는  $g(z)$ 의 적분함수이다.

$$G(z) = \int_0^z g(s) ds \quad (5)$$

$g(z)$ 는 PML에서 파동을 감쇠시키는 역할을 하며 일반영역에서는 0이고, PML에서는 0이 아니다. 이 논문에서는  $g(z)$ 에 대해 다음과 같은 함수를 사용하였다(Kang *et al.*, 2010).

$$g(z) = \begin{cases} 0 & -L \leq z \leq L \\ \frac{2b}{L_p} \log\left(\frac{1}{|R|}\right) \left(\frac{|z|-|L|}{L_p}\right)^3 & L \leq |z| \leq L_t \end{cases} \quad (6)$$

식 (6)에서  $L_p$ 는 PML의 길이,  $2L$ 은 일반영역의 길이,  $2L_t (= 2L + 2L_p)$ 는 전체길이이며  $|R|$ 은 반사계수이다. 일반적으로 PML의 길이가 길수록 파동흡수 성능은 향상되지만, 계산의 효율을 위해 PML의 길이를 유한요소망 요소 길이의 15~20배 등 상대적으로 결정하는 것이 보편적이다. 그리고 일반적으로 반사계수  $|R|$ 은 수치계산 시 문제의 종류에 따라 충분히 작은 값을 사용한다(Kang *et al.*, 2010).

### 3.2 PML을 고려한 주파수영역 맥스웰방정식

무한영역에서의 전자기파 해석을 유한영역에서 수행하기 위해 계산영역( $-L \leq z \leq L$ )의 두 경계( $z = \pm L$ )에 길이  $L_p$ 의 PML을 도입하였다. 식 (2)를 주파수영역의 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \hat{E}_x}{\partial \tilde{z}} = -\mu i \omega \hat{H}_y \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \hat{H}_y}{\partial \tilde{z}} = -\hat{J} - \epsilon i \omega \hat{E}_x \quad (7b)$$

여기서, caret( $\hat{\cdot}$ )은 Fourier 변환된 함수를 나타내는 기

호이다. 식 (3)을  $z$ 에 대해 미분하면 다음과 같이 변환된 좌표에 대한 미분연산자를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{\lambda(z)} \frac{\partial}{\partial z} \quad (8)$$

여기서, 함수  $\lambda(z)$ 는 식 (3)에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda(z) = 1 - i \frac{c_{ref}}{\omega} g(z) \quad (9)$$

식 (8)의 미분연산자를 이용하여 식 (7a)와 (7b)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{\lambda(z)} \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} = -\mu i \omega \hat{H}_y \quad (10a)$$

$$\frac{1}{\lambda(z)} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} = -\hat{J} - \epsilon i \omega \hat{E}_x \quad (10b)$$

식 (10a)와 (10b)의 양변에 각각  $\lambda(z)$ 와  $i \omega \lambda(z)$ 를 곱하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} = -i \omega \lambda(z) \mu \hat{H}_y \quad (11a)$$

$$i \omega \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} = -i \omega \hat{J} \lambda(z) + \omega^2 \lambda(z) \epsilon \hat{E}_x \quad (11b)$$

식 (9)를 식 (11a)와 (11b)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 PML을 연동시킨 주파수영역의 맥스웰방정식을 얻을 수 있다.

$$i \omega \mu \hat{H}_y + c_{ref} g(z) \mu \hat{H}_y + \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} = 0 \quad (12a)$$

$$-\omega^2 \epsilon \hat{E}_x + c_{ref} i \omega g(z) \epsilon \hat{E}_x + i \omega \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} = -i \omega \hat{J} - \hat{J} c_{ref} g(z) \quad (12b)$$

### 3.3 PML을 고려한 시간영역 맥스웰방정식

식 (12)의 주파수영역 맥스웰방정식을 역 Fourier 변환을 사용하여 시간 영역으로 되돌림으로써 다음과 같이 PML을 경계로 하는 1차원 유한영역에서의 초기-경계값 문제를 얻을 수 있다.

Find  $E_x(z, t)$  and  $H_y(z, t)$  such that

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + c_{ref} g \mu H_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \quad (13a)$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + c_{ref} g \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = -\frac{\partial J}{\partial t} - c_{ref} g J \quad (13b)$$

and

$$E_x(-L_t, t) = H_y(-L_t, t) = 0 \quad (14a)$$

$$E_x(L_t, t) = H_y(L_t, t) = 0 \quad (14b)$$

$$E_x(z, 0) = \frac{\partial E_x}{\partial t}(z, 0) = H_y(z, 0) = 0 \quad (14c)$$

Fig. 2와 같이 일반영역  $(-L \leq z \leq L)$ 의 양 끝에 길이가  $L_p (= L_t - L)$ 인 PML을 도입하고 PML의 외부 경계에 전기장 및 자기장이 0이 되는 도체 경계조건을 설정하였다. 초기 상태에서는 영역 내에 전기장 및 자기장이 형성되어 있지 않고 전기장의 증가속도가 0인 조건을 적용하였다. 일반영역 내  $z=0$ 의 위치에서 전류  $(\partial J/\partial t)$ 를 공급하면 전류 크기의 변화에 따라 전자기장이 형성된다.

## 4. 유한요소 정식화

### 4.1 변분식

위의 초기-경계값 문제의 변분식은 두 식에 각각 전기장과 자기장의 변분함수  $w(z)$ 와  $q(z)$ 를 곱하고 전 구간  $-L_t \leq x \leq L_t$ 에 대해 적분하여 얻을 수 있다.

$$\int_{-L_t}^{L_t} \omega \left( \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + c_{ref} g \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} \right) dz = \int_{-L_t}^{L_t} \omega \left( -\frac{\partial J}{\partial t} - c_{ref} g J \right) dz \quad (15a)$$

$$\int_{-L_t}^{L_t} q \left( \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} + c_{ref} g \mu H_y \right) dz = 0 \quad (15b)$$

경계 조건을 적용하여 식 (15a)를 전개하면 다음과 같다.

$$\int_{-L_t}^{L_t} \omega \left( \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + c_{ref} g \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) dz - \int_{-L_t}^{L_t} \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial H_y}{\partial t} dz = \int_{-L_t}^{L_t} \omega \left( -\frac{\partial J}{\partial t} - c_{ref} g J \right) dz \quad (16a)$$

$$\int_{-L_t}^{L_t} q \left( \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} + c_{ref} g \mu H_y \right) dz = 0 \quad (16b)$$

### 4.2 Galerkin 유한요소 정식화

전기장  $E_x$ 와 자기장  $H_y$ 의 근사함수인  $E_{xh}$ 와  $H_{yh}$ 는  $E_{xh} \in H^1(\Omega) \times (0, T]$ ,  $H_{yh} \in L^2(\Omega) \times (0, T]$ 의 함수공간에 속하며 다음과 같이 각 절점에서의 전기장과 자기장 크기에 관계되는 두 기저함수 벡터  $\phi$ 와  $\psi$ 의 식으로 근사된다.

$$E_x(z, t) \simeq E_{xh}(z, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(z) E_i(t) = \phi(z)^T \mathbf{E}_x(t) \quad (17a)$$

$$H_y(z, t) \simeq H_{yh}(z, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(z) H_i(t) = \psi(z)^T \mathbf{H}_y(t) \quad (17b)$$

변분함수  $w(z)$ 와  $q(z)$ 도 동일한 방법으로 근사할 수 있다.

$$w(z) \simeq \sum_{i=1}^n w_i \phi_i(z) = \mathbf{w}^T \phi(z) \quad (18a)$$

$$q(z) \simeq \sum_{i=1}^n q_i \psi_i(z) = \mathbf{q}^T \psi(z) \quad (18b)$$

혼합유한요소법에서는 형상함수  $\phi_i$ 와  $\psi_i$ 의 종류에 따라 수치 해의 정확성과 안정성이 크게 달라진다. 이 논문에서는 정확하고 안정된 수치 해를 얻기 위한 형상함수로서  $\phi_i$ 를 일차함수로,  $\psi_i$ 를 이차함수로 결정하였으며, 그 외 차수의 형상함수 쌍에 대해서는 부정확하거나 불안정한 해가 도출되었다. 식 (17)과 (18)을 식 (16a)와 (16b)에 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$\int_{-L_t}^{L_t} \varepsilon \phi \phi^T dz \ddot{\mathbf{E}}_x + \int_{-L_t}^{L_t} c_{ref} g \varepsilon \phi \phi^T dz \dot{\mathbf{E}}_x - \int_{-L_t}^{L_t} \phi' \psi^T dz \dot{\mathbf{H}}_y = \int_{-L_t}^{L_t} \phi \left( -\frac{\partial J}{\partial t} - c_{ref} g J \right) dz \quad (19a)$$

$$\int_{-L_t}^{L_t} \mu \psi \psi^T dz \dot{\mathbf{H}}_y + \int_{-L_t}^{L_t} \psi \phi'^T dz \mathbf{E}_x + \int_{-L_t}^{L_t} c_{ref} g \mu \psi \psi^T dz \mathbf{H}_y = 0 \quad (19b)$$

이로부터 PML을 고려한 시간영역 맥스웰방정식의 Semi discrete form을 얻게 된다. 식 (19a)와 (19b)는 노드에서의 전기장과 자기장을 나타내는 벡터  $\mathbf{U} = [\mathbf{E}_x \ \mathbf{H}_y]^T$ 에 대해 다음과 같은 선형 미분방정식 시스템의 형태로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{T} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{S} \mathbf{U} = \mathbf{P}(t) \quad (20)$$

여기서,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{S}$  및  $\mathbf{P}(t)$ 는 아래와 같이 정리된다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \int_{-L_t}^{L_t} \varepsilon \phi \phi^T dz & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (21a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \int_{-L_t}^{L_t} c_{ref} g \varepsilon \phi \phi^T dz & - \int_{-L_t}^{L_t} \phi' \psi^T dz \\ \mathbf{0} & \int_{-L_t}^{L_t} \mu \psi \psi^T dz \end{bmatrix}, \quad (21b)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \int_{-L_t}^{L_t} \psi \phi'^T dz & \int_{-L_t}^{L_t} c_{ref} g \mu \psi \psi^T dz \end{bmatrix}, \quad (21c)$$

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \int_{-L_t}^{L_t} \phi \left( -\frac{\partial J}{\partial t} - c_{ref} g J \right) dz \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (21d)$$

## 5. 수치예제

### 5.1 균일영역 해석

이 논문에서 제시하는 PML을 이용한 전자기파 전파해석 방법을 검증하기 위해 Fig. 3과 같이 양 끝에 PML이 위치한 1차원 영역을 고려하였다.  $x = \pm 50\text{m}$  위치에 길이 10m의 PML을 도입하였으며, 영역의 투자율과 유전율은 각각  $\mu = 1.2566 \times 10^{-6} \text{H/m}$ ,  $\varepsilon = 8.8472 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 이다. PML의 파동흡수 성능을 조절하는 반사계수는  $|R| = 10^{-12}$ 을 사용하였고, 이보다 작은 값에 대해서는 PML의 파동흡수 성능에 큰 차이가 없음이 확인되었다. PML을 경계로 하는 유한 영역의 중앙 위치( $z=0$ )에서 식 (22)로 표현되는 sine파 형태의 전류( $\partial J/\partial t$ )를 공급하였다.

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 10^{13} \sin(4\pi \times 10^8 t) \quad (22)$$

이 전류는 마이크로파 대역인 200MHz의 단일 주파수를 가지며 주기는 1/200MHz이다. 시간간격  $\Delta t$ 는 주기를 적어도 15개의 간격으로 분할하는 것이 일반적이며, 이에 따라

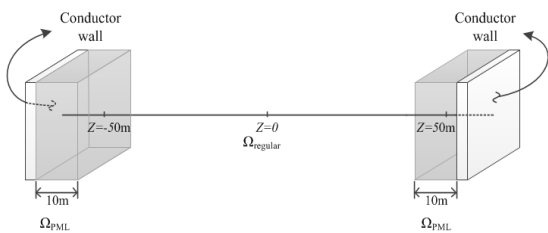


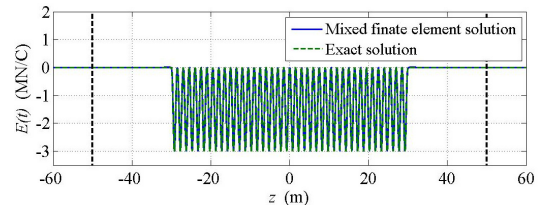
Fig. 3 PML-truncated infinite domain (current is supplied at  $z=0$ )

본 예제에서는 시간간격을  $\Delta t = 4 \times 10^{-11} \text{s}$ 로 설정하였다. 요소의 길이는  $L_e = 0.025 \text{m}$ 이고, 전기장  $E_x$ 에 대해서는 1차, 자기장  $H_y$ 에 대해서는 2차의 형상함수를 사용하였다.

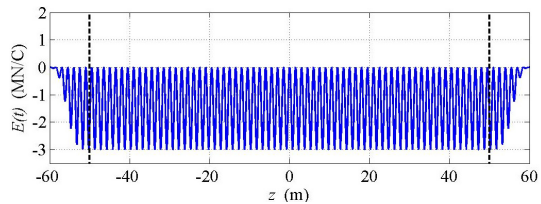
위 매질과 전류의 입력조건에 대하여 맥스웰방정식에 라플라스 변환을 적용하여 유도한 전기장의 정해는 헤비사이드 함수  $H(t-t_0)$ 를 사용하여 식 (23)과 같이 표현될 수 있다.

$$E_x(z, t) = \frac{10^5}{8\pi} \mu c H \left( t - \frac{|z|}{c} \right) \cos \left\{ 4 \times 10^8 \pi \left( t - \frac{|z|}{c} \right) - 1 \right\} \quad (23)$$

이 때  $c$ 는 자유공간에서 진행되는 전자기파의 속력으로서  $3 \times 10^8 \text{m/s}$ 이다. Fig. 4는  $t=0.1, 0.3 \mu\text{s}$ 에서 마이크로파의 전파 양상을 나타낸다. Fig. 4(a)로부터 마이크로파가 PML에 도달하기 전에는 정해와 수치 해가 거의 일치함을 알 수 있으며, Fig. 4(b)와 같이 마이크로파가 좌우로 전파되어 PML영역을 통과하면 점차 전기장의 크기가 감소된다. 중앙점( $z=0$ )에서의 마이크로파 시간이력은 Fig. 5와 같다. 수치 해와 정해를 비교하였으며, 경계에서 반사파가 발생하지 않아 두 그래프가 거의 일치함을 알 수 있다.



(a)  $t = 1 \times 10^{-7} \text{s}$



(b)  $t = 3 \times 10^{-7} \text{s}$

Fig. 4 Snapshots of electric field  $E_x$  due to the harmonic current excitation( $\partial J/\partial t$ ) at the midpoint

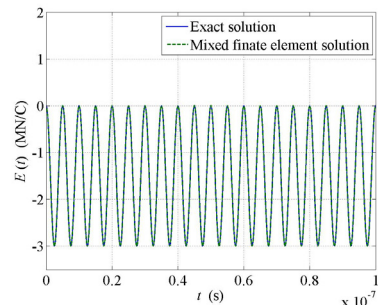


Fig. 5 Comparison between exact and numerical solutions of the electric field  $E_x(0, t)$  due to the harmonic current excitation

sine 함수와 같은 단일주파수의 전류가 아닌 복합주파수의 전류에서는 어떻게 응답하는지 확인해 보기 위해, 위의 예제와 같은 1차원 영역의 중앙에 식 (24)의 스텝펄스 형태의 전류( $\partial J/\partial t$ )를 적용하여 해석을 실시하였다. 이 때  $\partial J/\partial t$ 의 시간이력과 주파수 스펙트럼을 Fig. 6에 나타내었다.

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \begin{cases} 1 \times 10^{13}, & t \leq 5 \times 10^{-8} \text{ s} \\ 0, & t > 5 \times 10^{-8} \text{ s} \end{cases} \quad (24)$$

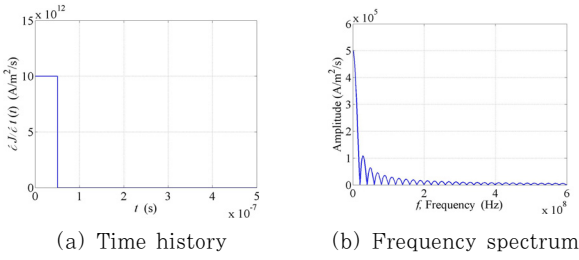


Fig. 6 Time history and frequency spectrum of a rectangular step pulse  $\partial J/\partial t$

최대 주파수가 약 600MHz인 식 (24)의 스텝펄스에 대하여 시간간격은  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-10}$  s, 요소 길이는  $L_c = 0.1$  m를 사용하였고, 매질의 투자율과 유전율, PML의 반사계수는 단일주파수 예제의 경우와 같다. 식 (25)는 영역 내의 전자기적 물성치와 스텝펄스 전류를 고려하여 맥스웰방정식으로부터 유도한 정해이다.

$$E_x(z,t) = -\frac{10^{13}\mu c}{2} \left[ H\left(t - \frac{|z|}{c}\right) \left(t - \frac{|z|}{c}\right) - H\left(t - \left(\frac{|z|}{c} + 5 \times 10^{-8}\right)\right) \left(t - \left(\frac{|z|}{c} + 5 \times 10^{-8}\right)\right) \right] \quad (25)$$

Fig. 7은  $t = 0.1, 0.3 \mu\text{s}$ 에서 영역 내의 전기장 분포를 나타낸다. 시간의 흐름에 따라 마이크로파가 좌우로 전파되는 것을 확인할 수 있다. Fig. 7(a)는 마이크로파가 PML에 입사하기 전의 모습이고, Fig. 7(b)는 마이크로파가 PML에

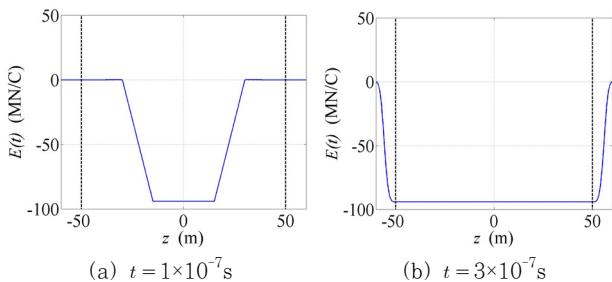


Fig. 7 Snapshots of electric field  $E_x$  due to the step current pulse( $\partial J/\partial t$ ) supplied at the midpoint

진입하여 크기가 급격하게 감소하는 모습을 나타낸다. 식 (24)의 스텝펄스로 인해 일반영역에 발생하는 전기장의 크기는  $E_x = 94.1 \text{ MN/C}$ 이었고, 일반영역과 PML의 경계에서는 반사파가 발생하지 않았다. 따라서 복합주파수의 마이크로파역시 PML에서 효과적으로 흡수됨을 알 수 있다. Fig. 8은  $z = 0$ 의 위치에서 식 (25)의 전기장( $E_x(z,t)$ )에 대한 정해와 수치 해의 시간이력을 비교한 그래프이다. 정해와 유한요소 해석에 의한 수치 해에 차이가 거의 없음을 알 수 있다.

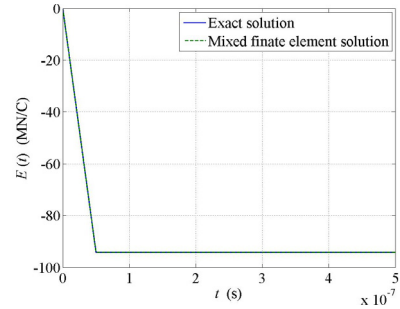


Fig. 8 Comparison between exact and numerical solutions of the electric field  $E_x(0,t)$  due to the step current pulse

혼합유한요소해석 결과의 정확도를 평가하기 위해 위의 예제에 대해 오차분석을 실시하였다. 오차의 크기를 정량화하기 위해 두 가지 norms을 도입하였다. 첫째는 일반영역에서 계산되는 전기장의  $L^2$ -norm으로서 다음과 같이 정의된다.

$$D(t) = \left[ \int_{-L}^L E^2(z,t) dz \right]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

둘째로 정해와 수치 해의 오차에 대한  $L^2$ -norm을 식 (26)에 의해 계산되는 정해의  $L^2$ -norm의 최대값으로 정규화하여 식 (27)과 같이 상대오차(normalized  $L^2$  error)를 정의하였다.

$$e(t) = \frac{\left[ \int_{-L}^L \{E_x^h(z,t) - E_x^{ex}(z,t)\}^2 dz \right]^{\frac{1}{2}}}{\max_t D_{ex}(t)} \quad (27)$$

이때,  $E_x^h$ 와  $E_x^{ex}$ 는 각각 전기장의 수치 해와 정해를 나타낸다. 이 상대오차는 시간에 대한 함수이며, Fig. 6의 스텝펄스가 영역의 중앙점에 작용할 때 상대오차의 시간이력을 Fig. 9에 나타내었다. 이 결과로부터 정해에 대해 0.0015 이하의 상대오차가 유지되는 것을 확인할 수 있다.

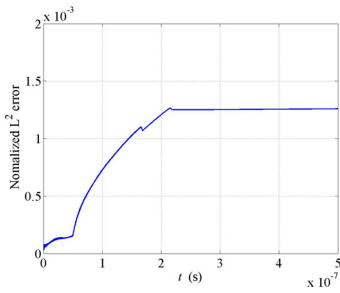


Fig. 9 Time history of the normalized  $L^2$  error (domain is homogeneous and excited by a step current pulse  $\partial J/\partial t$ )

### 5.2 비균일영역 해석

공간상에 콘크리트 구조체가 포함된 비균일 영역에서 마이크로파의 전파해석을 실시하였다. Fig. 10과 같은 1차원 영역의  $x = \pm 10\text{m}$ 의 위치에 2m 길이의 PML을 적용하였고,  $5\text{m} < z < 7\text{m}$  구간에 콘크리트 영역을 도입하였다. 시간간격은  $\Delta t = 4 \times 10^{-12}\text{s}$ , 요소의 길이는  $L_e = 0.0025\text{m}$ 이고 콘크리트 구간의 유전율과 투자율은 각각  $\epsilon_c = 3.9789 \times 10^{-11}\text{F/m}$ ,  $\mu_c = 1.2566 \times 10^{-6}\text{H/m}$ 이다. 콘크리트 이외의 영역에서는 5.1절에서 사용한 것과 같은 일반적인 자유공간의 유전율, 투자율 값을 사용하였으며, 그 외의 조건은 동일하다.  $z=0$ 에서 식 (28)과 같이 2GHz의 주파수를 갖는 sine 파형의 전류( $\partial J/\partial t$ )를 공급하였다.

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 10^{13} \sin(4\pi \times 10^9 t) \quad (28)$$

Fig. 11은 식 (28)의 sine 파형 전류를 사용하였을 경우에  $t = 0.02, 0.04, 0.06\mu\text{s}$ 에서 마이크로파의 전파 양상을 나타낸다. 그래프로부터 sine 형태의 마이크로파가 두께 2m의 콘크리트를 통과할 때 어떤 파형을 나타내는지 알 수 있다. 연속적으로 공급되는 sine 함수 형태의 전류에 의해 콘크리트 영역에서는 파장이 짧아져 조밀하게 보이며, 콘크리트를 지난 영역에서는 일부 투과하여 진폭이 감소된 채 유

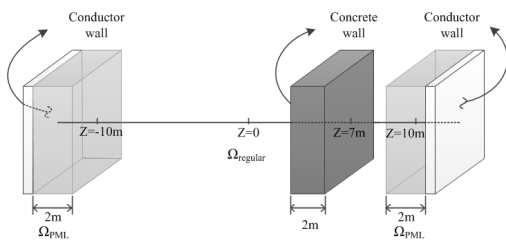
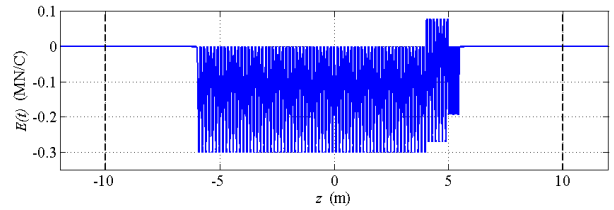
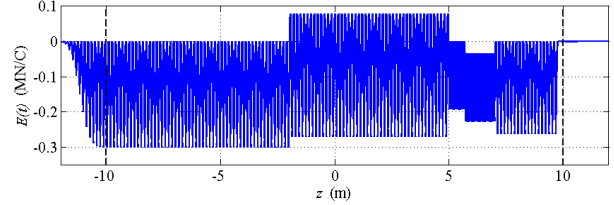


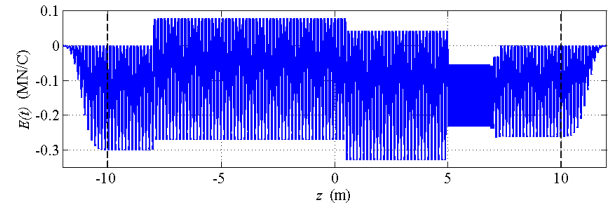
Fig. 10 PML-truncated infinite domain containing a concrete wall at  $5\text{m} \leq z \leq 7\text{m}$



(a)  $t = 2 \times 10^{-8}\text{s}$



(b)  $t = 4 \times 10^{-8}\text{s}$



(c)  $t = 6 \times 10^{-8}\text{s}$

Fig. 11 Snapshots of  $E_x$  due to the harmonic current excitation (concrete wall is located at  $5\text{m} \leq z \leq 7\text{m}$ )

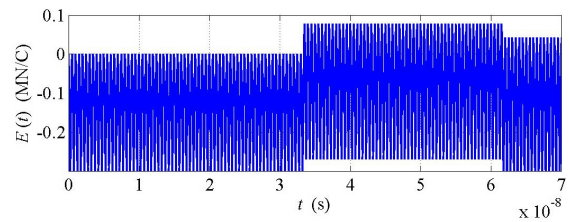


Fig. 12 Time history of  $E_x(0,t)$  caused by the harmonic current excitation (domain contains a concrete wall at  $5\text{m} \leq z \leq 7\text{m}$ )

지된다. 콘크리트 이전 영역에서는 역위상의 반사파에 의해 정상파와 같이 거동하고, 중앙점을 넘어서는 부분에서는 반사파와 진행파의 방향이 같아 중첩되어 전파된다. 이처럼 균일하지 않은 영역에서는 매질의 물성치 분포에 따라 마이크로파의 형상이 다르게 나타난다.

Fig. 12는 중앙점( $z=0$ )에서 측정된 전기장의 시간이력이다. 콘크리트에 의한 반사 및 투과 효과는  $t = 0.034\mu\text{s}$ 에서 최초로 관찰되며, 이후 파동의 형상이 지속적으로 유지된다.

### 5. 결 론

이 논문에서는 콘크리트 구조물과 자유공간으로 이루어진 무한 매질에서 PML을 경계로 하는 유한영역을 구성하고, Galerkin법에 기반하여 평면전자기파에 대한 시간영역 맥스

엘방정식의 해를 구하는 혼합유한요소해석 기법을 제시하였다. 혼합유한요소해석의 형상함수로는 전기장에 대해 일차함수, 자기장에 대해 이차함수를 사용하였으며, 이는 전기장에 대해 수치적으로 안정된 결과를 보였다.

해석 결과, PML 내에서는 전기장과 자기장의 크기가 급격히 감소하는 등 PML의 우수한 파동흡수 성능을 확인할 수 있었다. 특히 마이크로파 대역의 단일 주파수와 복합 주파수의 전류( $\partial J/\partial t$ ) 입력에 대하여 본 논문에서 제시한 기법으로부터 얻은 마이크로파의 수치 해와 표준 맥스웰방정식으로부터 유도한 정해가 일치함을 보였다. 또한 계산영역 내에 콘크리트가 포함된 비균일 매질에서의 해석을 통해 콘크리트 영역에 대한 투과파와 반사파의 거동을 확인하였다.

정해와 수치 해 오차의  $L^2$ -놈으로부터 계산되는 상대오차는 전자기파가 PML에 진입한 이후에 0.13%로 일정하게 유지되었는데, 이로부터 PML에서 반사파가 거의 발생하지 않고 파동이 효과적으로 흡수됨을 알 수 있다.

본 논문에서 제시하는 전자기장 시간이력의 수치적 계산 기법은 구조물 손상탐지를 위한 측정파형 역해석 기법의 개발에 적용될 수 있을 것으로 기대된다. 또한 향후 다차원 공간에서의 전자기파 해석에 확장 적용될 수 있을 것이며, 매질에서의 전자기파 감쇠현상을 반영할 경우에는 보다 실제적인 전자기파 전파 해석이 가능할 것으로 기대된다.

### 감사의 글

본 연구는 2014년도 미래창조과학부 재원에 의한 한국연구재단의 지원(NRF-2014R1A1A1006419)과 2014학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었습니다. 연구비 지원에 깊은 감사를 드립니다.

### References

- Bloemenkamp, R.F., van den Berg, P.M.** (2000) Time-Domain Profile Inversion using Contrast Sources, *Inverse Problems*, 16, pp.1173~1193.
- Haber, E., Oldenburg, D.W., Shekman, R.** (2007) Inversion of Time-Domain Three-dimensional Electromagnetic Data, *Geophys. J. Int.*, 171, pp.550~564.
- Kang, J.W.** (2013) Time Domain Elastic Full-waveform Inversion using One-dimensional Mesh Continuation Scheme, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 26(4), pp.213~221.
- Kang, J.W., Kallivokas, L.F.** (2010) Mixed Unsplit-Field Perfectly Matched Layers for Transient Simulations of Scalar Waves in Heterogeneous Domains, *Comput. Geosci.*, 14(4), pp.623~648.
- Lee, J.F., Lee, R., Cangellaris, A.** (1997) Time-Domain Finite-Element Methods, *IEEE Trans. Antennas & Propag.*, 45(3), pp.430~442.
- Pla-Rucki, G.F., Eberhard, M.O.** (1995) Imaging of Reinforced Concrete: State-of-the-Art Review, *J. Infrastruct. Syst.*, 1, pp.134~141.

### 요 지

본 논문에서는 전자기파에 대한 수치적 파동흡수 경계모델인 Perfectly-Matched-Layer(PML)를 개발하고 PML을 연동시킨 유한요소법에 의해 콘크리트 구조물을 통과하는 마이크로파의 전파거동을 해석하는 수치적 기법을 제시한다. 콘크리트 부재와 공기로 구성된 무한매질을 PML을 경계로 하는 유한영역으로 치환하고, 이 유한영역에서 평면 전자기파에 대한 시간영역 맥스웰방정식의 수치 해를 혼합유한요소법에 의해 계산하였다. 공기로만 이루어진 균일매질의 경우와 콘크리트 구조물이 존재하는 비균일 매질의 경우에 대하여 단일주파수 및 복합주파수를 갖는 마이크로파의 전기장을 계산하였고, 오차분석을 위해  $L^2$ -놈 형태로 표현되는 정해와 수치 해의 상대오차를 정의하여 수치 해의 정확도를 평가하였다. 이 연구는 마이크로파를 이용한 철근콘크리트 구조물의 건진도평가 및 손상평가에 적용될 수 있다.

**핵심용어** : Perfectly-Matched-Layers(PMLs), 혼합유한요소법, 콘크리트 구조물, 마이크로파, 맥스웰방정식