

압전재료에 대한 면외하중하의 모서리 경사 균열

최성렬*† · 사종엽* · 정재택**

* 영남대학교 기계공학부, ** 전남대학교 기계공학부

Inclined Edge Crack in a Piezoelectric Material Under Antiplane Loads

Sung Ryul Choi*†, Jong Youb Sah* and Jae Tack Jeong**

* School of Mechanical Engineering, Yeungnam Univ.,

** School of Mechanical Engineering, Chonnam National Univ.

(Received February 2, 2015 ; Revised April 12, 2015 ; Accepted May 8, 2015)

Key Words: Piezoelectric(압전), Antiplane(면외), Intensity Factor(강도계수)

초록: 횡등방성 압전재료에 대한 모서리경사균열 문제를 해석하였다. 두 기계적 집중 면외하중과 전기적 집중 면내하중이 표면과 균열면에 각각 작용하고, 균열면은 절연균열면이다. 일반화된 변위벡터를 도입하고 Mellin 변환을 사용하여 문제를 수식화하고, 이로부터 Wiener-Hopf 식을 유도하였다. 이식을 풀므로써 폐형으로 주어지는 해를 얻었다. 임의의 균열길이나 경사각에 대해서도 적용이 되는 응력 및 전기변위 강도계수와 에너지 방출율을 구하였다. 이 해는 중첩에 의하여 임의로 분포하는 전기기계하중 문제에 대한 해를 제공하는 기본해로 사용될 수 있다.

Abstract: The occurrence of an inclined edge crack in transversely piezoelectric material is analyzed. Concentrated antiplane mechanical and inplane electrical loads are applied at the boundary and crack surface, respectively. The crack surfaces are assumed to be impermeable to the electric field. Using the Mellin transform with the introduction of a generalized displacement vector, the problem is formulated, and the Wiener-Hopf equation is derived. By solving the equation, the solution is obtained in a closed form. The intensity factors of the stress, the electric displacement, and the energy release rate are obtained for any crack length and inclination angle. These solutions can be used as fundamental solutions and can be superimposed to represent any arbitrary electromechanical loading.

1. 서론

압전재료는 응력에 의해 전하가 발생되고 전기장에 의해 변형이 발생하는 전기기계적인 고유특성을 지니는 재료로서, 그 고유한 특성으로 인하여 센서, 액추에이터, 지능형 구조물등 많은 용도로 사용되고 있다. 균열과 같은 결함은 압전성을 부여하기 위해 필요한 분극처리과정이나 반복적인 전기장으로 인해 사용중에 발생하게 되고, 재료강도를 저하시키는 주된 원인이 된다.

압전재료에 대한 연구는 Parton⁽¹⁾이 간단한 균

열문제를 고려한 이후로 많은 국내외 연구자에 의하여 횡등방(transversely isotropic) 압전체에 대한 다양한 형태의 면외균열문제가 해석되었다.⁽²⁻⁸⁾ 면외균열문제는 횡등방성 압전재료에서 분극방향과 직교방향인 평면방향으로 전기장이 인가될 때 발생하는 면외변형(antiplane deformation)과 관련된 균열문제를 말한다.

Pak^(2,3)는 기계적 전단하중과 전기적 평면하중이 작용하는 무한크기의 압전체에 대한 절연균열(impermeable crack)문제를 복소함수를 도입하여 균열선단의 응력과 전기변위에 대한 엄밀해를 구하였다. 이로부터 응력, 변형률, 전기장 및 전기변위의 4개 장(field)에 대한 강도계수(intensity

† Corresponding Author, srchoi@yu.ac.kr

factor)와 에너지방출률(energy release rate)를 구하여 균열안전성을 검토하였다. 스트립(strip) 상하면에 기계 및 전기적 하중이 작용하는 면외균열 문제 및 스트립과 직교하는 수직균열 문제는 Kwon등⁽⁵⁻⁷⁾에 의하여 수행되었다. Fourier 변환을 이용하여 적분방정식을 유도하고 재료의 강도계수와 에너지방출률을 구하고, 재료물성치와 균열 크기에 따른 영향을 알아보았다. Kwon⁽⁸⁾은 원판에 내재된 중앙균열을 Mellin 적분변환을 사용하여 해석하였으며 기타 원호균열등 면외문제들이 해석되었다.⁽⁹⁾

압전재료의 표면에서 발생하는 모서리 균열(edge crack)에 대한 해석은 소수의 연구자에 의하여 수행되었다. Li 및 Fan⁽¹⁰⁾은 표면과 직교하는 이종압전재료에 대한 균열문제를 Fourier 변환을 이용하여 해석하고 엄밀해를 구하였다. Choi⁽¹¹⁾는 수직모서리 균열문제를 Mellin 변환을 이용하여 해석하여 엄밀해를 얻었다. Wu등^(12,13)은 이종재료에 내재된 전위문제를 복소함수를 도입하여 해석하고, 등각사상을 이용하여 표면균열에 대한 엄밀해를 구하였다. 지금까지 해석된 표면 균열문제는 대칭균열에 대한 해석이고, 표면과 임의의 각을 이루는 비대칭 경사균열(inclined crack)에 대해서는 해석된 바 없다.

본 연구에서는 횡등방성 압전재료 표면에서 표면과 임의의 각을 이루며 형성된 경사균열문제를 해석하고자 한다. 균열의 경계조건은 절연균열조건으로 두었고, 압전재료 표면과 균열면의 한 점에 면외집중 기계적하중과 면내 집중 전기하중이 작용하는 문제를 택하였다. 해석방법은 변위와 전위함수를 한 개의 벡터로 두고, Mellin적분변환을 이용하여 경계치문제를 수식화하였다. 이를 해석함으로써 균열선단의 기계적 및 전기적 강도계수에 대한 엄밀해를 구한다. 균열각에 따른 강도계수의 영향을 알아보았다. 이 해석의 결과는 임의로 분포하는 하중에 대해서도 해석이 가능한 경사균열문제의 Green함수로 사용이 가능하다.

2. 기본이론식

2.1 기본방정식

횡등방 선형압전재료의 분극방향을 z 축으로 두면, xy 평면은 등방평면이 된다. 면외기계적하중과 면내 전기적 하중으로 주어지는 경계조건은 면내 변위성분 $u_x = u_y = 0$ 이 되어, 면외변

위 u_z 및 전위 ϕ 가 존재하게 된다.⁽²⁾

해석의 편의를 위하여 극좌표계 (r, θ) 를 도입하여 변위와 전위를 나타내면 다음과 같이 주어진다.

$$u_z = u_z(r, \theta), \quad \phi = \phi(r, \theta) \quad (1)$$

$\sigma_{zj}, \gamma_{zj}, D_j, E_j$ ($j=r, \theta$)를 각각 응력, 변형률, 전기변위 및 전기장 성분으로 둔다면, 이들에 대한 변형률과 전기장의 미분관계 및 구성방정식은 다음과 같이 주어진다.^(2,4)

$$\gamma_{zr} = u_{z,r}, \quad \gamma_{z\theta} = r^{-1} u_{z,\theta} \quad (2)$$

$$E_r = -\phi_{,r}, \quad E_\theta = -r^{-1} \phi_{,\theta} \quad (3)$$

$$\sigma_{zj} = C_{44} \gamma_{zj} - e_{15} E_j \quad (4)$$

$$D_j = e_{15} \gamma_{zj} + \epsilon_{11} E_j \quad (5)$$

여기서 콤마(comma)는 변수의 편미분을 말하고, 하첨자 j 는 $j=r, \theta$ 를 말한다. 또한 상수 $C_{44}, e_{15}, \epsilon_{11}$ 은 각각 전단계수, 압전상수 및 유전상수를 나타낸다.

체적력과 자유전하가 없을 때 응력과 전기변위의 지배방정식을 u_z 및 ϕ 로 나타내면 다음의 Laplace 식을 만족한다.

$$\nabla^2 u_z = 0, \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

여기서 $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + (1/r^2)\partial^2/\partial \theta^2$ 인 2차원 Laplace 연산자를 말한다.

2.2 벡터함수의 표현

압전문제는 해석의 편의를 위하여 열벡터를 도입하여 많이 해석되고 있다.^(4,12) 변위 및 전위에 대한 일반화된 변위벡터 $\mathbf{u}(r, \theta) = [u_z, \phi]^T$ 를 도입하자. 그러면 면력벡터 $\mathbf{T}_\theta = [\sigma_{z\theta}, D_\theta]^T$ 및 변형률벡터 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{z\theta}, -E_\theta]^T$ 는 식 (2)~(5)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{T}_\theta = [\sigma_{z\theta}, D_\theta]^T = \mathbf{M} r^{-1} \mathbf{u}_\theta \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{z\theta}, -E_\theta]^T = r^{-1} \mathbf{u}_\theta$$

여기서 상첨자 T는 행렬의 전치를 말하고, 상수 행렬 \mathbf{M} 은 다음과 같다.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} C_{44} & e_{15} \\ e_{15} & -\epsilon_{11} \end{bmatrix} \quad (8)$$

변위벡터 \mathbf{u} 는 식 (6)으로부터 다음과 같다.

$$\nabla^2 \mathbf{u}(r, \theta) = 0 \quad (9)$$

3. 수식화 및 전개

3.1 문제의 설정

Fig. 1은 해석하고자 하는 문제를 그림으로 보인 것으로서, 정점 o 를 기점으로 길이 b 인 경사 균열이 x 축과 경사각 ω 를 이루며 반경방향으로 내재하고 있다. 표면을 따라 거리 l 인 점에 면외 집중 전단하중 Q_0 및 면내 집중 전기변위 D_0 가 작용하고 있고, 절연 균열면을 따라 거리 h 인 곳에 집중전단하중 Q_h 및 집중전기변위 D_h 인 하중이 작용한다. 해석을 위하여 균열선을 기준으로 상하 두 부분으로 나누어 압전체의 영역을 구분하였다.

표면에 대한 경계조건을 벡터식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{T}_\theta(r, \theta = \pi/2) = \mathbf{T}_0 \delta(r-l), \quad 0 < r < \infty \quad (10a)$$

$$\mathbf{T}_\theta(r, -\pi/2) = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (10b)$$

여기 및 여기 이하에서 $\mathbf{T}_0 = [Q_0, D_0]^T$ 인 열벡터를 말하고, $\delta(\cdot)$ 는 델타함수를 말한다.

한편 균열면은 다음과 같은 조건으로 표현된다.

$$\mathbf{T}_\theta(r, \theta = \omega^+) = \mathbf{T}_h \delta(r-h), \quad 0 < r < b \quad (11a)$$

$$\mathbf{T}_\theta(r, \omega^-) = 0, \quad 0 < r < b \quad (11b)$$

여기서 $\mathbf{T}_h = [-Q_h, -D_h]^T$ 를 말한다.

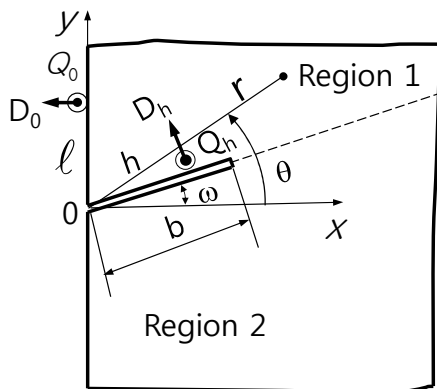


Fig. 1 Inclined edge crack in a piezoelectric half plane under antiplane concentrated loadings of magnitude of Q_0 and Q_h , and inplane electric loadings of D_0 and D_h

또한 균열면을 제외한 $\theta = \omega$ 상의 재료는 다음과 같은 연속조건에 있게 된다.

$$\mathbf{T}_\theta(r, \omega^+) = \mathbf{T}_\theta(r, \omega^-), \quad b < r < \infty \quad (12a)$$

$$\mathbf{u}(r, \omega^+) = \mathbf{u}(r, \omega^-), \quad b < r < \infty \quad (12b)$$

이때 응력 및 전기변위의 점근거동은 다음과 같다.

$$\mathbf{T}_\theta \sim \begin{cases} r^{-\lambda} & \text{as } r \rightarrow 0, \quad 0 < \lambda < 1/2 \\ r^{-1} & \text{as } r \rightarrow \infty \\ (r-b)^{-1/2} & \text{as } r \rightarrow b^+ \end{cases} \quad (13)$$

3.2 Mellin 적분변환

변위벡터 $\mathbf{u}(r, \theta)$ 의 r 에 대한 Mellin변환 $m[\mathbf{u}(r, \theta)]$ 을 $\hat{\mathbf{u}}(p, \theta)$ 라고 두면, 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\mathbf{u}}(p, \theta) = m[\mathbf{u}(r, \theta)] = \int_0^\infty \mathbf{u}(r, \theta) r^{p-1} dr \quad (14)$$

$$(\lambda - 1 < \text{Re } p < 0)$$

여기서 적분이 존재하는 p 의 실수부 $\text{Re } p$ 의 범위는 점근거동 식 (13)으로부터 구해진다.

식 (9)를 Mellin 변환하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\left(-\frac{d^2}{d\theta^2} + p^2\right) \hat{\mathbf{u}}(p, \theta) = 0 \quad (15)$$

식 (15)의 해를 영역별로 나누어 표기하면 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{u}}_j(p, \theta) = \mathbf{A}_j(p) \cos(\theta - \omega)p + \mathbf{B}_j(p) \sin(\theta - \omega)p \quad (j = 1, 2) \quad (16)$$

여기서 $\mathbf{A}_j(p), \mathbf{B}_j(p)$ ($j = 1, 2$)는 경계조건으로부터 결정되어야 할 미지함수벡터들이다.

일단 식 (16)의 미지함수들이 결정된다면 Mellin 역변환에 의하여 $\mathbf{u}_j(r, \theta)$ 가 결정된다. 이에 대한 형식적인 표현식을 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_j(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\mathbf{u}}_j(p, \theta) r^{-p} dp \quad (17)$$

$$(\lambda - 1 < c < 0)$$

식 (16)의 미지함수 $\mathbf{A}_j(p), \mathbf{B}_j(p)$ ($j = 1, 2$)를 결정하기 위하여, 경계조건 식 (10)~(12)를 Mellin 변환하고 새로운 미지함수벡터를 도입하여 정리

하면, 미지함수벡터 $T_+(p), G_-(p)$ 에 대한 다음의 Wiener-Hopf 식을 얻는다.

$$T_+(p) = K(p) M^{-1} G_-(p) + L(p) + J(p) \quad (18)$$

여기서 커널함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{\sin \pi p}{p \sin(\pi p/2 + \omega p) \sin(\pi p/2 - \omega p)} \\ J(p) &= \frac{\cos(\pi p/2 - \omega p)(h/b)^p}{p \sin(\pi p/2 - \omega p)} M^{-1} T_0 \\ L(p) &= \frac{-(h/b)^p}{p \sin(\pi p/2 - \omega p)} M^{-1} T_h \end{aligned} \quad (19)$$

식 (18) 내의 $T_+(p), G_-(p)$ 는 각각

$$T_+(p) = \int_0^1 [u(b\xi, \omega^+) - u(b\xi, \omega^-)] \xi^{p-1} d\xi \quad (20a)$$

$$G_-(p) = b \int_1^\infty T_\theta(b\xi, \omega) \xi^p d\xi \quad (20b)$$

으로 정의된 새로운 미지함수 벡터이다. 식 (13) 으로부터 $T_+(p), G_-(p)$ 는 각각 $Re P > \lambda - 1, Re P < 0$ 에서 해석적임을 안다.

또한 미지함수벡터 $A_j(p), B_j(p) (j=1,2)$ 는 새로운 미지함수벡터 $G_-(p)$ 와 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} A_1(p) &= \frac{M^{-1}}{p \sin(\pi p/2 - \omega p)} \\ &\times [\cos(\pi p/2 - \omega p) [b^p G_-(p) + h^p T_h] - l^p T_0] \\ B_1(p) &= (b^p/p) M^{-1} G_-(p) \\ &+ (h^p/p) M^{-1} T_h \\ A_2(p) &= \frac{-b^p \cos(\pi p/2 + \omega p)}{p \sin(\pi p/2 + \omega p)} M^{-1} G_-(p) \\ B_2(p) &= (b^p/p) M^{-1} G_-(p) \end{aligned} \quad (21)$$

Wiener-Hopf 식 (18)의 해로부터 미지함수벡터 $T_+(p), G_-(p)$ 가 결정되면, 식 (21)에 의하여 미지함수벡터 $A_j(p), B_j(p) (j=1,2)$ 가 모두 결정된다. 이결과를 식 (16)에 대입하면 Mellin 변환된 $\hat{u}_j(p, \theta)$ 를 얻고 이를 Mellin 역 변환식 (17)에 대입하여 적분식을 평가하면, 변위와 전위에 대한 엄밀해를 얻을 수 있다.

3.3 Wiener-Hopf 식의 풀이

Noble⁽¹⁵⁾의 저서에 서술된 방법을 사용하면 식

(18)로 주어진 Wiener-Hopf식의 해가 구성될 수 있다. 그 해석절차를 설명하면, 먼저 복소평면에 공동영역이 존재하는 영역에서 좌반과 우반영역에서 각각 해석적인 함수를 분리하고, 다음에 해석적접속이론에 의하여 두 함수군을 한 개의 전함수(entire function)로 두고 이를 연립함수로서 미지함수벡터가 결정된다.

먼저 식 (18)의 해를 구하기 위해서 $K(p)$ 를 p 의 좌우반 평면에서 각각 해석적인 함수의 곱으로 분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K(p) &= K_-(p)/K_+(p); \\ K_+(p) &= \frac{4\pi^2 e^{\chi p} p}{\pi^2 - 4\omega^2} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(\frac{\pi+2\omega}{2\pi}p)\Gamma(\frac{\pi-2\omega}{2\pi}p)} \\ &= \frac{4\pi}{\pi^2 - 4\omega^2} \frac{p^2}{K_-(-p)} \end{aligned} \quad (23a,b)$$

여기서 상수 χ 는

$$\chi = \frac{\pi+2\omega}{2\pi} \ln \frac{\pi+2\omega}{2\pi} + \frac{\pi-2\omega}{2\pi} \ln \frac{\pi-2\omega}{2\pi} \quad (23c)$$

이고, $\Gamma(\cdot)$ 는 감마함수를 말한다. $K_+(p)$ 는 $Re p > -1/2$ 에서, $K_-(p)$ 는 $Re p < 1/2$ 에서 해석적이다. 이하 동일하게 p 의 좌반과 우반평면에 대한 해석함수를 하첨자를 사용하여 구분하여 표기한다.

식 (18)의 양변에 $K_+(p)$ 를 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$K_+(p) T_+(p) = K_-(p) M^{-1} G_-(p) + K_+(p) L(p) + K_+(p) J(p) \quad (24)$$

식 (24)의 우변 둘째항을 p 의 좌우반평면에서 해석적인 함수로 분해하면 다음과 같이 된다.

$$K_+(p) L(p) = L_-(p) + L_+(p); \quad (25a)$$

$$L_-(p) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n / (p - p_n) \quad \text{for } l/b < 1 \quad (25b)$$

$$L_+(p) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n / (p + \xi_n) \quad \text{for } l/b > 1 \quad (25c)$$

여기서 상수벡터 a_n, b_n 은 다음과 같다.

$$b_n = \lim_{p \rightarrow p_n} (p - p_n) K_+(p) L(p) \quad (25d)$$

$$a_n = \lim_{p \rightarrow -\xi_n} (p + \xi_n) K_+(p) L(p) \quad (25e)$$

$$p_n = 2\pi n / (\pi - 2\omega), \xi_n = n \quad (25f)$$

식 (24)의 우변 세제항을 동일하게 분해하면 다음과 같다.

$$K_+(p) \mathbf{J}(p) = \mathbf{J}_-(p) + \mathbf{J}_+(p); \quad (26a)$$

$$\mathbf{J}_-(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n / (p - p_n) \quad \text{for } h/b < 1 \quad (26b)$$

$$\mathbf{c}_n = \lim_{p \rightarrow p_n} (p - p_n) K_+(p) \mathbf{J}(p) \quad (26c)$$

식 (25) 및 (26)을 식 (24)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} K_+(p) \mathbf{T}_+(p) - \mathbf{L}_+(p) - \mathbf{J}_+(p) \\ = K_-(p) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_-(p) + \mathbf{L}_-(p) + \mathbf{J}_-(p) = \mathbf{\Omega} \end{aligned} \quad (27)$$

이 식의 좌변은 $Re p > -1/2$ 에서, 우변은 $Re p < 0$ 에서 해석적이므로 해석적이어야 하는 식 (27)의 양변은 p 의 전평면에서 해석적인 전함수벡터 $\mathbf{\Omega}$ 가 된다. 식 (27)의 좌변에 $p=0$ 을 대입하여 계산하면, 다음과 같이 결정된다.

$$\mathbf{\Omega} = -\mathbf{L}_+(0) - \mathbf{J}_+(0) \quad (28)$$

식 (27) 및 (28)로부터 미지함수벡터 $\mathbf{T}_+(p)$ $\mathbf{G}_-(p)$ 를 계산하면 최종적으로 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_+(p) &= [\mathbf{\Omega} + \mathbf{L}_+(p) + \mathbf{J}_+(p)] / K_+(p) \\ \mathbf{G}_-(p) &= \mathbf{M} [\mathbf{\Omega} - \mathbf{L}_-(p) - \mathbf{J}_-(p)] / K_-(p) \end{aligned} \quad (29)$$

4. 해석결과

균열선단이란 Fig. 1에서는 $r=b, \theta=\omega$ 에 해당하고, 이와같은 균열선단부근의 강도계수(intensity factor)는 다음과 같이 정의되는 4개의 종류가 존재한다.⁽²⁾

$$\begin{aligned} [K^\sigma, K^D]^T &= \lim_{r \rightarrow b^+} \sqrt{2\pi(r-b)} [\sigma_{z\theta}(r, \omega), D_\theta(r, \omega)]^T \\ [K^\gamma, K^E]^T &= \lim_{r \rightarrow b^+} \sqrt{2\pi(r-b)} [\gamma_{z\theta}(r, \omega), E_\theta(r, \omega)]^T \end{aligned} \quad (30)$$

여기서 K^σ 는 응력강도계수, K^D 는 전기변위강도계수, K^γ 는 변형률강도계수, K^E 는 전기장강도계수를 말한다. 이들 강도계수는 균열선단의 장들이 $1/\sqrt{r-b}$ 의 특이성 정도를 나타낸 값으로서, 균열선단의 점근해석을 수행함으로써 엄밀해를 얻을 수 있다.

식 (7)의 관계를 식 (17)에 대입하면 균열선상

의 면력벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{T}_\theta(r, \theta = \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{M} \mathbf{B}_1(p) p r^{-p-1} dp \quad (31)$$

식 (18) 및 (21)을 식 (31)에 대입한 식에, 다음의 적분관계식⁽¹⁶⁾

$$\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-\mu x} dx = \sqrt{\pi/\mu} \quad (Re \mu > 0) \quad (32)$$

을 이용하여 평가하면, $r \rightarrow b^+, \theta = \omega$ 인 균열선단부근의 면력은 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{T}_\theta(\rho, \omega) = \sqrt{\frac{\pi^2 - 4\omega^2}{4\pi b}} \mathbf{M} \mathbf{\Omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \quad (\rho \rightarrow 0) \quad (33)$$

여기서 $\rho = r - b$ 를 말한다.

식 (30) 및 (33)을 연립하면 K^σ 및 K^D 는 다음과 같이 결정된다.

$$\mathbf{K}_\theta \equiv [K^\sigma, K^D]^T = \sqrt{\frac{\pi^2 - 4\omega^2}{4\pi b}} \mathbf{M} \mathbf{\Omega} \quad (34)$$

또한 식 (7), (30)으로부터 K^γ 및 K^E 는 다음의 관계로 결정된다.

$$\mathbf{K}_S \equiv [K^\gamma, -K^E]^T = \mathbf{M}^{-1} [K^\sigma, K^D]^T \quad (35)$$

강도계수에 대한 엄밀해가 결정되므로써, 선형 압전재료에 대한 에너지방출률 J 은 다음의 관계에서 용이하게 계산된다.⁽²⁾

$$J = \frac{1}{2} [K^\sigma K^\gamma - K^D K^E] \quad (36)$$

5. 결과에 대한 토의

5.1 강도계수식

본 연구에서 얻은 결과를 특별한 경우에 대한 기존연구자의 결과와 비교함으로써, 해의 타당성을 검증하여 보고자 한다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 극좌표계로 $r=b, \theta=\omega$ 인 균열선단 주변에서, 면력은 $1/\sqrt{\rho}$ 의 특이성을 보이고 있음을 식 (33)에서 알 수 있다.

압전재료 강도계수(intensity factor)의 정성적인 특성을 검토하고자 식 (26)~(28)를 식 (34)에 대입하면 다음의 형식적인 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [K^\sigma, K^D]^T &= C_0(b, \omega, l) [Q_0, D_0]^T \\ &+ C_h(b, \omega, h) [Q_h, D_h]^T \end{aligned} \quad (37)$$

여기서 C_0, C_h 는 변수들 b, ω, l, h 에 의존하는 상수 값을 말한다. 등분포외력이 무한거리에 작용하고 무한크기의 압전체 내부에 유한균열이 존재할 때, 응력 및 전기변위 강도계수 K^σ, K^D 는 재료물성치에 무관하고, 외력에 대하여 서로 독립적임을 기존 연구자⁽²⁾에 의하여 제시되었는데, 이와 같은 결과가 모서리 경사균열에 대해서도 적용될 수 있음을 식 (37)로부터 확인할 수 있다. 즉, 식 (37)에서 강도계수는 재료물성치에 무관하고, K^σ 는 기계적하중 Q_0, Q_h 의 함수이고, 한편 K^D 는 전기하중 D_0, D_h 의 함수관계에 있음을 알 수 있다. 이는 K^σ 식에서 Q_0, Q_h 값을 D_0, D_h 로 대체하면, K^D 식이 됨을 상기할 때, 만일 탄성문제에 대한 해를 알고 있다면, 모서리 경사균열에서도 복잡한 해석없이 압전재료에 대한 해를 얻을 수 있음을 말하고 있다.

특별한 경우로서 수직균열은 $\omega = 0$ 에 해당한다. $\omega = 0$ 일 때 식 (25) 및 (26)과 연계하여 계산하면 식 (28)의 Ω 는 다음과 같이 압축된다.

$$\Omega = 2M^{-1}[f_0 \mathbf{T}_0 - f_h \mathbf{T}_h] / \pi, \quad (38)$$

$$f_0 = [1 + (l/b)^2]^{-1/2}, f_h = [1 - (h/b)^2]^{-1/2}$$

$\omega = 0$ 일 때 강도계수는 식 (38)를 식 (34)에 대입함으로써 다음과 같이 압축되어 표현된다.

$$[K^\sigma, K^D]^T = [f_0 \mathbf{T}_0 - f_h \mathbf{T}_h] / \sqrt{\pi b} \quad (39)$$

식 (39)의 강도계수는 수직균열에 대한 기존연구자의 해석결과와 일치함을 알 수 있고,⁽¹⁰⁻¹³⁾ 아울러 나머지 강도계수 또한 기존연구자의 결과와 일치함을 식 (35)으로부터 확인할 수 있다.

또다른 특별한 경우로서 기존의 경사균열문제에 대한 탄성해를 얻을 수도 있다. 집중전단하중 Q_0 만 작용하고 재료가 압전성을 상실한다면, 이는 집중하중 Q_0 가 작용하는 탄성재료에 문제와 동일하게 된다. 실제로 식 (34)에 $e_{15} = \epsilon_{11} = 0$ 및 $D_0 = D_h = 0, Q_h = 0$ 을 대입하여 얻은 결과는 탄성문제에 대한 기존의 연구 결과로 수렴됨을 알 수 있다.⁽¹⁷⁾

5.2 강도계수 및 에너지방출률

기계 및 전기적 집중하중이 표면에 작용하는 경우에 대하여 응력강도계수를 수치적으로 알아보았다. 수치계산에 사용된 재료는 PZT로서 물성치는 다음과 같다.

$$C_{44} = 3.53 \times 10^{10} N/m^2, e_{15} = 17.0 C/m^2 \quad (40)$$

$$\epsilon_{11} = 151 \times 10^{-10} C/Vm$$

계산을 위하여 편의상 하중거리 및 경사각(Fig. 1 참조)은 $l = 0.02m, \omega = 45^\circ$ 로 택하였고, 집중하중은 각각 $Q_0 = 2.950 \times 10^5 N/m, D_0 = 1.421 \times 10^{-4} C/m, Q_h = D_h = 0$ 로 두고, $b_0 = 0.01m$ 로 두었다. 식 (34),(39)를 연계하면 응력강도계수에 대한 수치계산 값을 얻을 수 있다. 균열길이비 b/l 에 따른 무차원화된 응력강도계수 $k^\sigma(b) \equiv K^\sigma(b, \omega = 45^\circ, Q_0, D_0) / K^\sigma(b=b_0, \omega=0^\circ, Q_0, D_0)$ 를 그림으로 나타내면 Fig. 2

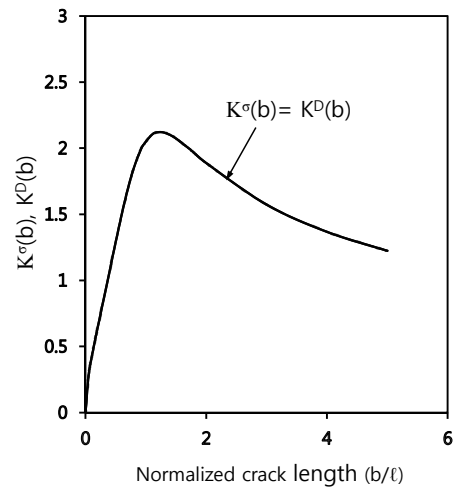


Fig. 2 Normalized intensity factor, $k^\sigma(b)$ and $k^D(b)$ as a function of b/l under given electro-mechanical loads of Q_0 and D_0 and $\omega = 45^\circ$

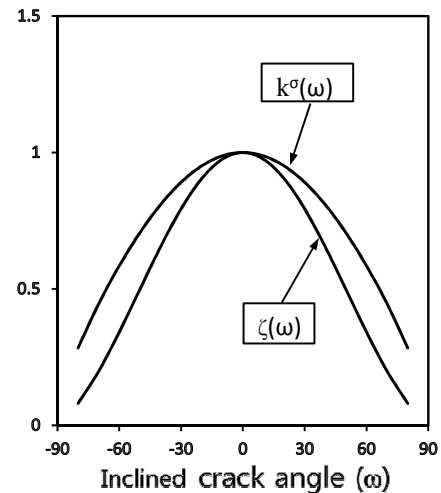


Fig. 3 Normalized stress intensity factor, $k^\sigma(\omega)$ and normalized energy release rate $\zeta(\omega)$ as a function of ω with length b approaching zero under given Q_0 and D_0

와 같다. k^σ 는 영(zero)에서 b 가 증가함에 따라 단조 증가를 보이다가 극값을 지나 단조감소를 보이고 있다. 이와같은 경향은 하중점과 균열선단간의 거리를 두고 얻을 수 있는 예측치와 정성적으로 일치함을 보이고 있다. 또한 동일한 식으로 부터 무차원화된 전기변위 강도계수 $k^D = k^\sigma$ 가 됨을 알 수 있다.

만일 내부결합이 없고 단순히 표면에 Q_0, D_0 가 작용하고, 하중에 의하여 모서리균열이 생성된다고 하자. 이때 생성되는 균열의 방향은 최대 응력강도계수 K_{max}^σ 혹은 최대에너지 방출률 J_{max} 이 발생하는 방향으로 예측할 수 있는 바 이를 수치적으로 알아 보았다. Fig. 3은 $b=0^+$ 에서 무차원화된 응력강도계수 $k^\sigma(\omega) \equiv K^\sigma(b=0^+, \omega, Q_0, D_0)/K^\sigma(b=0^+, \omega=0^0, Q_0, D_0)$ 를 식 (34),(38)로부터 구한 것이다. $\omega=0^0$ 에서 최대값을 보이고 있음을 알 수 있다. 한편 무차원화된 에너지방출률 $\zeta(\omega) \equiv J(b=0^+, \omega, Q_0, D_0) / J(b=0^+, \omega=0^0, Q_0, D_0)$ 은 식 (36), (39)로부터 계산할 수 있고, 이는 $\zeta(\omega) = [k^\sigma(\omega)]^2$ 로 표현됨을 알 수 있다. $\zeta(\omega)$ 는 $\omega=0^0$ 에서 또한 최대값을 보이고 있다. 파괴변수로 사용되는 K_{max}^σ 및 J_{max} 는 모두 $\omega=0$ 에서 발생함을 보인다. 이는 내부결합이 없이 단순히 외부 집중하중에 의해 표면균열이 생성된다면, 그 생성되는 방향은 $\omega=0$ 인 균열방향임을 제시하고 있다.

6. 결 론

횡등방성 압전재료의 표면에서 발생하는 모서리 경사균열문제를 해석하였다. 압전체의 표면의 한 점과 경사균열면의 한 점에 면외 집중하중과 면내 집중 전기변위가 각각 작용하고, 균열조건은 절연균열조건인 문제이다.

일반화된 변위함수벡터를 도입하고, 이를 Mellin 적분변환을 사용하여 경계치문제를 수식화하고 미지함수벡터에 대한 Wiener-Hopf 식을 유도하여 해를 구하였다. 이로부터 균열선단의 면력과 전기변위에 대한 점근거동 해를 구하였다. 이로부터 모서리 경사균열에 대한 4개 종류의 강도계수를 폐형해로 얻었다. 이결과는 임의의 경사각과 균열길이에 대해서도 해석이 되는 해가 된다.

응력강도계수를 보면 압전재료의 물성치에 무관하고 다만 면외집중하중만의 함수로 주어지고, 그 결과는 탄성해와 일치함을 알 수 있었다. 또

한 응력강도계수식에서 면외집중하중을 집중전기변위로 대체하면 전기변위강도계수 식이 됨을 알 수 있었다. 이로부터 동일 기하모양의 균열에 대한 탄성해를 안다면, 복잡한 해석없이도 압전체의 엄밀해를 얻을 수 있다는 무한고체물에 대한 연구결과가 반무한 압전체의 경사균열에서도 적용될 수 있음을 확인하였다.

본 연구의 해는 집중하중에 대한 해이므로, 이해의 적분을 통하여, 기하학적 모양이 동일하다면, 표면 혹은 균열면에 임의로 분포하는 기계전기적하중에 대해서도 해석이 가능한 Green함수가 된다.

경사균열 생성에 대한 응력강도계수와 에너지 방출율을 수치적으로 계산하여 보았으며, 그 최대값은 표면과 직교하는 방향이 됨을 알 수 있었다.

후 기

이 연구는 2014년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

참고문헌 (References)

- (1) Parton, V. Z., 1976, "Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials," *Acta Astronautica*, Vol. 3, pp. 671~683.
- (2) Pak, Y. E., 1990, "Crack Extension Force in a Piezoelectric Materials," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 647~653.
- (3) Pak, Y. E., 1992, "Linear Electro-elastic Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials," *Int. J. Frac*, Vol. 54, pp. 79~100.
- (4) Suo, Z., Kuo, C. -M., Barnett, D. M. and Willis, J. R., 1992, "Fracture Mechanics for Piezoelectric Ceramic," *J. Mechanics Physics Solids*, Vol. 40, pp. 739~765.
- (5) Kwon, J. H., Kwon, S. M., Shin, J. W. and Lee, K. Y., 2000, "Determination of Intensity Factors in Piezoelectric Ceramic Strip with Impermeable Crack," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 24, No. 6, pp. 1601~1607.
- (6) Shin, J. W., Kwon, S. M. and Lee, K. Y., 2001, "Eccentric Crack in a Piezoelectric Strip Under Electro-Mechanical Loading," *KSME International Journal*, Vol. 15, No. 1, pp. 21~25

- (7) Shindo, Y., Narita, F. and Tanaka, K., 1996, "Electroelastic Intensification Near Anti-Plane Shear Crack in Orthotropic Piezoelectric Ceramic Strip," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 25, pp. 65~71.
- (8) Kwon, J. H., 2004, "Central Crack in a Piezoelectric Disk," *KSME International Journal*, Vol. 18, No. 9, pp. 1549~1558.
- (9) Choi, S. T. and Earmme, Y. Y., 1998, "Antiplane Problem of Interfacial Circular-Arc Cracks in Transversely Isotropic Piezoelectric Media," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 22, No. 5, pp. 868~876.
- (10) Li, X. -F. and Fan, T. -Y., 2001, "Mode-III Interface Edge Crack Between Two Bonded Quarter-Planes of Dissimilar Piezoelectric Materials," *Archieve of Applied Mechanics*, Vol. 71, pp. 703~714.
- (11) Choi, S. R., 2008, "Green's Function of Edge Crack in Transversely Isotropic Piezoelectric Material Under Anti-Plane Loads," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 32, No. 1, pp. 43~53.
- (12) Wu, X.-F., Cohen, S. and Dzenis, Y. A., 2003, "Screw Dislocation Interacting with Interfacial and Interface Cracks in Piezoelectric Bimaterials," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, No. 7, pp. 667~682.
- (13) Wu, X.-F. and Dzenis, Y. A., 2003, "Screw Dislocation Interacting with an Interfacial Edge Crack Between Two Bonded Dissimilar Wedges," *International Journal of Fracture*, Vol. 117, L 9~L14.
- (14) Sosa, H. A. and Pak, Y. E., 1990, "Three-Dimensional Eigenfunction Analysis of a Crack in a Piezoelectric Material," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 26, No.1, pp. 1~15.
- (15) Noble, B., 1958, *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*, Pergamon Press, London.
- (16) Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., 2007, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th Ed., Academic Press, New York.
- (17) Hwang, E. H., Choi S. R. and Earmme Y. Y., 1992, "Inclined Edge Crack in Two Bonded Elastic Quarter Planes Under Out-of-Plane Loading," *Int. Journ. of Fracture*, Vol. 56, R39~R49.