韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2015.29.2.215
제 29집 제 2호, 2015. 5. 215-239

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 29, No. 2, May. 2015. 215-239

다양한 표상활동 중심 분수학습이 분수의 이해 및 수학적 태도에 미치는 효과[1)]

안 지 선 (서울본동초등학교)
김 민 경 (이화여자대학교)†

본 연구는 다양한 표상활동을 중심으로 한 분수학습이 분수의 이해 및 수학적 태도에 미치는 영향을 알아보기 위한 것으로서 서울 소재 B초등학교 4학년 33명 전체학생을 대상으로 실시하였다. 활동적, 영상적, 상징적 표상활동으로 이루어진 분수학습을 6주간 15차시에 걸쳐 진행한 결과 관계적 이해에 도달한 학생들의 비율이 증가하였으며, 분수 학업성취도 검사 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ에서 평균 90점 가까이 또는 그 이상의 높은 성취도를 보였다. 수학적 태도 변화를 알아보기 위해서 두 종속표본 t검정을 실시한 결과, 유의수준 .01에서 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 결론적으로 다양한 표상활동 중심의 분수학습은 학생들의 관계적 이해도와 분수 이해력을 향상시키고, 학생들의 학습지향성, 자기통제, 흥미, 가치인식, 자신감을 높이며, 불안감을 감소시키는 등의 수학적 태도면에서도 긍정적 영향을 미쳤다고 할 수 있다.

Ⅰ. 서론

학업성취도 국제비교연구 TIMSS(Trends in International Mathematics and Science Study)와 PISA(Program for International Students Assessment) 결과에 따르면 우리나라 학생들은 수학 성취도는 매우 높으나, 정의적 영역은 매우 낮은 수준에 있다고 보고되고 있다(박정 외, 2004; 조지민 외, 2012; 최승현 외, 2013). 이종희, 김수진(2010)은 위의 결과를 바탕으로 학교 현장에서 결과 중심이 아닌 학습 과정 자체에서 즐거움을 맛볼 수 있는 경험을 제공하는 학습 방법 개발의 필요성을 강조한 바 있다. '수학에 대한 흥미'와 '수학에 대한 태도'의 국가 간 비교 연구를 한 김영국(2008)은 우리나라 학생들의 낮은 수준의 정의적 태도를 개선하기 위한 방안으로 다양하게 수학적으로 표현하는 활동이 의미있다고 보았다.

홍은숙, 강완(2008)의 연구에서 학생들이 분수 개념을 이해하지 못하고 개념을 외우려고 한다는 문제점을 지적하였듯이 실제 학교 현장에서는 단순히 공식을 외워 문제를 해결하는 학생들을 쉽게 찾아볼 수 있으며, 수학 수업 중 많은 부분이 이해보다 절차적 기능과 계산 측면을 강조하고 있다(김선영, 2003; 유현주, 1995; 조병윤, 1992; 추은영, 2003; Post, Behr & Lesh, 1982). 김옥경(1997)도 수학 수업이 교과서 위주로 실생활과 동떨어진 상황 속에 수학적 개념을 성급하게 추상화하고, 연산의 의미를 알지 못한 채 연산을 실행하고 있으며 학생들에게 기호적, 추상적 수준에서 조작하도록 요구한다고 문제점을 지적한 바 있다.

특히 분수학습과 관련한 연구(Behr & Post, 1992; Bezuk & Cramer, 1989; Kouba, Zawojewski & Strutchens, 1997; Lesh, Behr & Post, 1987; Moss & Case, 1999)에서도 많은 학생들이 분수를 이해하는데 어려

1) 본 논문은 2014년 안지선의 학위논문의 일부 내용을 보완하고 재수정한 것임.
* 접수일(2015년 2월 18일), 심사(수정)일(2015년 4월 28일), 게재확정일(2015년 5월 8일)
* ZDM분류 : C32
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 관계적 이해, 표상, Bruner의 EIS이론, 분수 이해력
† 교신저자 : mkkim@ewha.ac.kr

움을 나타낸다고 보고되었다. 분수 학습에서 개념적 이해보다 절차적 지식이나 계산법에 중점을 둔 교수·학습 방법이 분수 학습에 어려움을 느끼게 하는 주된 요인 중의 하나로 지적된다(Armstrong & Bezuk, 1995; Bezuk & Bieck, 1992; Cramer, Post & delMas, 2002; Freudenthal, 1983; Hiebert & Behr, 1988; Streefland, 1982). 김용태 외(2005)는 분수의 개념 도입에서는 약간의 조작활동이 이루어지지만, 분수 연산이 도입되면서는 거의 조작활동 없이 형식적인 기호로 학습한다는 문제점을 제시하였다.

위와 같이 선행연구들을 살펴보았을 때, 형식적인 계산 알고리즘과 기호로 표상된 반복적인 문제풀이를 통한 학습이 아닌 다양한 활동을 통해 수학적 개념에 대한 이해를 하는 것이 매우 중요함을 알 수 있다. Skemp(1987)는 수학적 개념의 이해를 관계적 이해와 도구적 이해 두 가지로 설명하면서, 관계적 이해는 도구적 이해와 대비되는 개념으로 수학적 원리의 과정을 이끌어내는 능력이며, 의미 있는 수학 학습이 되기 위해서는 도구적 이해보다 관계적 이해를 통한 학습이 이루어져야 한다고 강조하였다. 이러한 관계적 이해를 이끌어내기 위해서는 학생들의 발달수준에 적합한 교수·학습 방법이 필요하다. 김정식(2005)과 현동희(2000)의 연구에서는 구체적 조작물을 통해 의미 이해를 도모해야 한다고 주장한 바 있으며, Connell과 Peck(1993)은 의미 있는 분수의 덧셈과 뺄셈 지도를 위해 일반적으로 비형식적인 탐구가 알고리즘 지도에 선행되는 것이 바람직하다고 언급한 점을 비추어볼 때, 추상성을 지닌 수학교과 지도 시 구체적 조작활동에서부터 출발하는 것이 필요하다. 대부분의 학생들은 구체적인 단계에서 바로 추상적인 단계로 넘어가지 못하기 때문에 구체적인 탐색활동과 추상적인 기호 알고리즘을 이어줄 연결고리가 필요하므로 구체물 조작을 통해 이해한 것을 그림으로 표현하는 영상적 표상 단계가 필요하다고 볼 수 있다. 추상화된 수학적 기호를 다룰 수 있는 수준의 학생들에게도 영상적 직관과 연결짓는 것이 수학 학습에서 효과적인 전략이라 하였다(Watson, Campbell & Collins, 1993). 이는 인지경로에 따른 단계적인 교수·학습의 필요성을 강조한다는 점에서 Jerome S. Bruner가 주장한 활동적, 영상적, 상징적 표상단계(Enactive representation, Iconic representation, Symbolic representation)와 일맥상통한 것으로 볼 수 있다.

위의 연구들의 주장을 종합해 볼 때, Bruner의 EIS이론에 따라 활동적, 영상적, 상징적 표상활동을 거쳐 개념·원리에 접근하는 수학학습을 통해 학생들의 이해를 높일 수 있을 것으로 기대된다. 따라서 본 연구에서는 Bruner의 EIS이론에 따른 다양한 표상활동 중심의 분수학습을 통해 분수의 이해 측면과 수학적 태도에 미치는 영향을 살펴보고자 한다. 학생들의 분수의 이해정도를 심층적으로 확인하기 위해 분수학업성취도검사 외에 관계적 이해도 보고자 하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. Bruner의 EIS이론

Piaget의 발생적 인식론을 바탕으로 Bruner는 지식의 구조이론에서 어떤 영역의 지식도 세 가지 과정으로 표현해 낼 수 있다고 하였다. 개념적 지식 구조를 이해시킬 때 실물 그대로를 제시하여 행동화, 조작화의 신체적 동작으로 표현하게 하는 활동적 표상(enactive representation), 영상을 통해 그림이나 모형으로 지식을 이해하는 영상적 표상(iconic representation), 논리적 명제에 의한 기호나 문자로 지식을 이해하는 상징적 표상(symbolic representation)이다(최창우, 2006).

표상 체계에 대한 이론의 가장 대표적인 출발점이었던 Bruner(1964)는 활동적 표상, 영상적 표상, 상징적 표상의 순서로 학생의 인식능력과 사고방법이 발달한다는 EIS이론을 주장하였다.

첫 번째 단계인 활동적 표상(enactive representation)은 대상을 직접 다룸으로써 정보를 표현하고 그 대상은 수행되는 행동에 의해 표현되는 양식이다. 즉, 어떤 개념을 학습할 때 그 개념을 의미하고 있는 물건이나 대상을

직접 조작하는 활동을 통해 그 개념을 표현하는 것을 말한다(구광조, 오병승, 전평국, 1995). 두 번째 단계인 영상적 표상(iconic representation)은 수학적 개념을 도식적으로 표현한 것으로 일종의 기하학적 표현이라 할 수 있다. 실생활의 여러 현상을 머릿 속에서 변형·조직하여 문제 해결에 활용함으로써 덧셈이나 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 식의 전개 등을 그림으로 표현할 수 있으며 내면화된 가역적 행동이 가능하므로 이 표현을 사용하는 것은 구체적 조작기에 해당된다고 볼 수 있다. 세 번째 단계인 상징적 표상(symbolic representation)은 추상적이고 본질적인 형태의 기호를 사용하는 것이다. 언어 능력의 발달과 함께 나타나는데, 학생들이 수학적인 연산을 기호로 표기하기 시작할 때는 추상적인 표현을 읽는 능력이 형성된 시기라고 한다. 상징적 표상 양식은 기호를 사용한다는 점이 가장 큰 특징이며, 예를 들어 1,2,3 등의 숫자로 표현을 하거나, +, -, =과 같은 기호를 사용해서 수식을 사용하는 것이다(최창우, 2006).

Bruner의 연구에 따르면 활동적, 영상적, 상징적 표상 단계는 순서에 따라 발달하며, 각 표상양식의 획득은 선행 표상양식에 좌우되기 때문에 후속 표상양식으로서의 전이가 가능하기 위해서는 각 단계의 표상양식에 대한 많은 연습이 필요하다고 한다. 이와 같은 세 가지 표상방법은 서로 위계가 있어서 Bruner는 상징적 표현을 가장 상위 단계의 표상으로 보았다. 표상양식 면에서 활동적, 영상적, 상징적 표상의 순서로 발달하기 때문에 교수 학습 또한 이와 같은 순서로 해야 함을 강조하고 있다(박성택, 2006). Bruner(1964)는 활동적, 영상적, 상징적 순서에 따른 경험을 제공함으로써 학습자들에게 수학적 구조를 형성시킬 수 있다고 주장하였다.

2. Skemp의 관계적 이해와 도구적 이해

도구적 이해(instrumental understanding)는 수학적 규칙이 왜 그렇게 적용되는지는 알지 못한 채 암기한 법칙을 문제 해결에 적용하는 이해수준을 의미한다. 학생들이 원리에 대한 이해없이 기계적으로 공식을 외워 정답을 구하는 경우 도구적 이해를 했다고 볼 수 있다. 예를 들어, 대분수를 가분수로 고치는 과정은 이해하지 못한 채, 대분수의 자연수와 분모를 곱하고 분자를 더해 가분수로 고치는 방법만을 기억한 채 문제를 해결하는 경우를 들 수 있다.

관계적 이해(relational understanding)는 무엇을 해야 할지와 왜 그런지를 모두 아는 것으로 수학적 개념, 원리, 법칙이 만들어지기까지의 과정에 대한 이해를 하는 것을 의미한다. 예를 들어, $2\frac{3}{4}$과 같은 대분수를 가분수로 고치는 경우 자연수 2를 $\frac{1}{4}$과 같은 크기로 각각 4등분을 하여, $\frac{1}{4}$이 11개 모여 $\frac{11}{4}$이 되는 과정을 이해하고, 이 과정 속에서 대분수의 자연수와 분모를 곱한 후 분자를 더하게 되는 규칙을 발견하는 수준이라 할 수 있다.

본 연구에서는 관계적 이해의 의미로 '수학적 개념·원리가 만들어진 과정을 이해하고, 표현할 수 있는가'로 정의하였다.

Skemp와 관련된 선행연구들 중 관계적 이해를 높이기 위한 교수·학습 방법(김경희, 2007; 노지선, 2005; 황민영, 2009)에 대한 연구들을 살펴본 결과, 관계적 이해를 높일 수 있는 교수·학습방법 및 프로그램들이 중·고등학교에서 이루어진 경우가 많아 초등을 대상으로 한 연구가 부족한 실정이다. 따라서 관계적 이해를 높이는 방안에 대한 연구가 필요함을 알 수 있다.

3. 분수 관련 2007 및 2009 개정 교육과정 및 교과서 분석

2009 개정 교육과정은 학년군 단위로 변경되면서 3~4학년군에서 다루어야 하는 내용을 <표 Ⅱ-1>과 같이 제시하였다. 2007 개정 교육과정에서 2학년에 처음 도입되었던 분수내용이 3학년으로 상향 이동되어, 분수에 대한 이해 및 등분할 개념을 3학년에서 다루게 되었다. 2007 개정 교육과정에 제시되었던 4학년 2학기 내용이 2009 개정에서는 1학기로 변경되고, 분수의 종류 및 분수의 크기 비교 등에 대한 4학년 1학기 학습내용은 3학년 2학기로 이동하였다. 이에 따라 3학년 때 2007 개정 교육과정에 따르고, 2014년도에 2009 개정 교육과정을 적용

받는 4학년 학생의 경우, 학습결손이 생기게 된다. 김미영, 백석윤(2010)에 의하면 계통성의 특징을 갖는 수학 교과의 경우 선행 지식인 분수 개념이 올바르게 형성되지 않으면 후속 학습인 분수의 연산이 불가능하다고 지적한 바 있다. 따라서 본 연구에서는 2007 개정 교육과정을 참고하여 분수학습을 진행하였다.

<표 Ⅱ-1> 분수 관련 2009 개정 교육과정 내용체계

	2009 개정 교육과정	2009 개정 교육과정에 따른 교과서 체제	
3~4 학년군	· 분수 -양의 등분할을 통하여 분수를 이해하고 읽고 쓰기 -단위분수와 진분수의 의미를 알고, 그 관계 파악 -진분수, 가분수, 대분수를 알고, 그 관계 파악 -단위분수의 크기 비교 -분모가 같은 분수의 크기 비교 · 분수의 덧셈과 뺄셈 -분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 계산하기	3학년 1학기	-전체와 부분의 크기 알기 -분수로 나타내기 -분모가 같은 분수의 크기 비교 -분자가 1인 분수의 크기 비교
		3학년 2학기	-분수와 진분수 알기 -가분수와 대분수 알기 -대분수를 가분수로, 가분수를 대분수로 나타내기 -분수의 크기비교
		4학년 1학기	-분모가 같은 분수끼리의 덧셈 -분모가 같은 분수끼리의 뺄셈 -(자연수)-(분수)의 뺄셈 -분모가 같은 대분수끼리의 뺄셈

분수와 관련된 내용을 다룬 수학교과서를 Bruner의 EIS 표상이론 관점에서 분석해 본 결과 <표 Ⅱ-2>와 같이 2007 개정 교육과정에 따른 3~6학년 교과서에서 구체적 조작을 통한 표상 활동(E)이 안내되지 않았다. 교과서의 구성은 그림을 활용한 영상적 표상이 대부분을 차지하고 있었고, 그림으로 개념 또는 원리를 익힌 후, 기호를 사용한 상징적 표상활동이 이루어지도록 매 차시 제시되었다. 학습순서는 EIS이론과 일치하나 실제적인 조작활동을 통한 개념 및 원리 습득이 생략된 채 이미지가 주를 이룬 체제였다. 영상적 활동에서는 수막대, 사각형, 원모양에 색칠하는 등의 반복적인 패턴이 많았다.

<표 Ⅱ-2> 교과서에 나타난 표상의 유형

단계	학습주제	E (활동적 표상)	I (영상적 표상)	S (상징적 표상)
3-가	이산량의 등분할	×	○	○
	부분의 양을 전체의 양과 비교하여 분수로 나타내기	×	○	○
	몇 개인지 알아보기	×	○	○
	동분모 분수의 크기 비교	×	○	○
	분자가 1인 분수의 크기 비교	×	○	○
4-가	분수와 진분수 알기	×	○	○
	가분수와 대분수 알기	×	○	○
	대분수를 가분수로, 가분수를 대분수로 나타내기	×	○	○
	분모가 같은 가분수, 대분수의 크기 비교	×	○	○
4-나	분수의 합이 진분수인 덧셈	×	○	○
	분수의 합이 가분수인 진분수의 덧셈 방법 이해하기	×	○	○
	분모가 같은 대분수의 덧셈	×	○	○
	분모가 같은 진분수의 뺄셈, 자연수와 진분수의 뺄셈	×	○	○
	분모가 같은 대분수의 뺄셈	×	○	○
	대분수와 진분수의 덧셈, 뺄셈	×	○	○
5-가	진분수의 덧셈	×	○	○
	대분수의 덧셈	×	○	○
	진분수의 뺄셈	×	○	○
	대분수의 뺄셈	×	○	○
	세 분수의 덧셈과 뺄셈	×	○	○

방정숙, 이지영(2009)의 연구에서도 교과서에 시각적 모델의 활용 빈도가 매우 높으며, 분수 연산의 특성상 구체물을 활용한 활동이 부족하다고 언급한 바 있다. Piaget에 따르면 초등학생들은 구체적 조작기 단계로 구체적 조작활동을 통해 개념에 접근해야 이해할 수 있기 때문에 분수학습에 있어 학생들의 이해를 도울 수 있도록 활동적 표상활동의 개발이 필요하다. 또한 영상적, 상징적 표상활동 간의 유기적인 연계를 통해 보다 쉽게 개념·원리 습득이 되도록 해야 할 필요성이 있다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 대상

본 연구는 다양한 표상활동을 중심으로 한 분수학습이 분수의 이해 및 수학적 태도에 미치는 영향을 알아보기 위한 것으로서 서울 소재 B초등학교 4학년 1반 학생 17명(남: 8명, 여: 9명)과 4학년 2반 16명(남: 6명, 여: 10명)을 대상으로 실시하였다. 연구 대상이 소속된 학교는 전체 12학급의 소규모학교로 학급당 인원이 적어, 4학년 전체 학생을 대상으로 하였으며, 교육복지특별지원 학교로 선정될 만큼 학생들의 학교외의 수학교육경험은 낮은 편이었다. 분수학습의 계열성을 고려해 보았을 때, 분수의 연산이 처음 도입되는 4학년 학생을 대상으로 하는 것이 적합하다고 판단되어 4학년 학생을 연구 대상으로 선정하였다.

2. 연구 설계

다양한 표상활동 중심의 분수학습은 <표 Ⅲ-1>과 같은 흐름으로 이루어졌다. 도입부분에서는 매 차시 학습내용과 관련한 실생활 문제를 제시하였다. 학생들은 문제상황을 파악하고, 무엇을 해결해야 하는지를 알게 되는 단계이다. 전개부분에서는 학습내용과 관련한 조작활동을 통해 개념에 접근하고, 조작활동과정을 그림과 같은 영상적 표상의 형태로 나타내어보았다. 마지막으로 활동적, 영상적 표상 과정을 기호와 같은 상징적 표상으로 나타내어 개념·원리를 정리해보았다. 활동 1~3이 활동적 표상(E), 영상적 표상(I), 상징적 표상(S) 단계에 따라 이루어지며 마지막 활동이 끝난 후에는 다양한 형태의 표상과정을 통해 습득한 개념·원리를 발견하여 정리하였다. 정리 단계에서는 학생들이 다양한 표상활동을 통해 발견한 개념·원리를 적용하여 문제를 해결하였다. 또한 학생들의 이해도를 평가하기 위해 '오늘의 퀴즈' 형식으로 관계적 이해를 평가하면서 마무리하였다. 단위 수업시간 40분이내에 평가를 끝내지 못한 경우, 쉬는 시간을 활용하였다.

<표 Ⅲ-1> 다양한 표상활동을 중심으로 한 분수학습의 흐름

단계	교수·학습 활동		학습활동형태
도입	·실생활 문제 제시		전체활동
전개	활동1	활동적 표상(E) ⇨ 영상적 표상(I) ⇨ 상징적 표상(S)	전체, 모둠별 및 개별활동
	활동2	활동적 표상(E) ⇨ 영상적 표상(I) ⇨ 상징적 표상(S)	
	활동3	활동적 표상(E) ⇨ 영상적 표상(I) ⇨ 상징적 표상(S) 조작활동을 통한 개념·원리탐색 / 조작활동과정을 그림으로 나타내기 / 활동적·영상적 표상을 기호로 나타내기 ⇨ 원리 탐색 및 발견	
정리	·학습내용 정리 및 문제해결 ·관계적 이해 평가(오늘의 퀴즈)		전체 및 개별활동

활동적 표상활동은 분수원타일, 패턴블록 등의 교구를 사용하거나, 색막대 이동하기, 투명컵에 골판지 채우기, 사진 오리기 등의 학생들이 직접 체험하는 활동을 의미한다. 영상적 표상활동은 구체물 조작에 의해 습득된 지식을 그림으로 그리거나, 색칠하는 등의 이미지로 표현하는 것을 말하며, 상징적 표상활동은 활동적, 영상적 표상 과정을 기호, 문자, 수식 등으로 표현하는 단계이다. 즉, 인지경로에 따라 구체에서 추상으로 학습하는 것이 효과적이라고 주장한 Bruner의 EIS이론의 단계를 따르고자 하였다.

위의 세 가지 표상활동을 적용한 분수학습의 내용은 2007 개정 교육과정에 따라 분수개념을 다루고 있는 4학년 1학기 6단원과 4학년 2학기 1단원을 통합 재구성하여 <표 Ⅲ-2>와 같이 15차시로 구성하였다. 1학기 7차시와 2학기 9차시로 이루어진 기존의 교과서 체제에서 문제해결, 이야기 마당, 단원 평가부분을 생략하고 2학기 분수학습내용으로 바로 연계하도록 구성하였다. 진분수, 대분수의 덧셈 및 뺄셈과 같은 연산을 주로 다루고 있는 2학기 내용은 난이도와 학습계열에 따라 재구성하였다.

<표 Ⅲ-2> 본 연구 적용을 위한 분수학습 내용의 재구성

구분	차시	주제	학습 내용	비고
분수의 개념	1	분수와 진분수 알기	· 분모와 분자의 용어 알기 · 진분수의 개념 이해하기	4학년 1학기 6단원
	2	가분수와 대분수 알기	· 가분수의 개념 이해하기 · 대분수의 개념 이해하기	
	3	대분수를 가분수로 나타내기	· 대분수를 가분수로 나타내는 방법 이해하기	
	4	가분수를 대분수로 나타내기	· 가분수를 대분수로 나타내는 방법 이해하기	
	5	분수의 크기 비교(1)	· 분모가 같은 가분수의 크기 비교하는 방법 이해하기	
	6	분수의 크기 비교(2)	· 분모가 같은 대분수의 크기 비교하는 방법 이해하기	
분수의 덧셈	7	진분수의 덧셈(1)	· 분수의 합이 진분수인 덧셈 방법 이해하기	4학년 2학기 1단원
	8	대분수의 덧셈	· 분모가 같은 대분수의 덧셈 방법 이해하기 · 대분수의 덧셈을 자연수끼리, 진분수끼리 나누어 계산하는 원리 이해하기	
	9	진분수의 덧셈(2)	· 분수의 합이 가분수인 진분수의 덧셈 방법 이해하기 · 가분수인 계산 결과를 대분수로 나타내기	
	10	대분수와 진분수의 덧셈	· 대분수와 진분수의 덧셈 방법 이해하기	
분수의 뺄셈	11	진분수의 뺄셈	· 분모가 같은 진분수의 뺄셈 방법 이해하기	
	12	대분수의 뺄셈(1)	· 분모가 같은 대분수의 뺄셈 방법 이해하기	
	13	자연수와 진분수의 뺄셈	· 자연수와 진분수의 뺄셈 원리 이해하기	
	14	대분수와 진분수의 뺄셈	· 대분수와 진분수의 뺄셈 방법 이해하기	
	15	대분수의 뺄셈(2)	· 분수끼리 뺄 수 없는 대분수의 뺄셈 방법 이해하기	

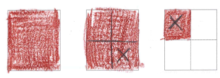
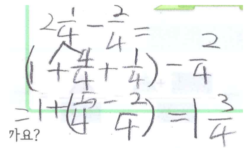
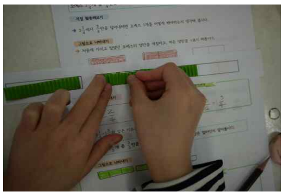
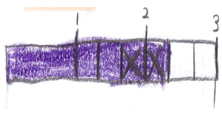
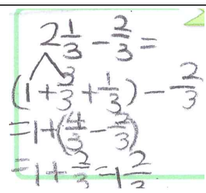
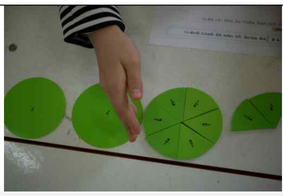
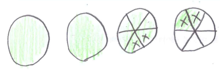
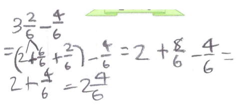
Bruner의 EIS이론을 반영하여 다양한 표상활동 중심으로 개발한 프로그램의 예는 <표 Ⅲ-3>과 같다. 와플모형과 떡꼬치 사진, 분수원타일의 조작활동을 통해 받아내림이 있는 대분수끼리의 뺄셈 원리를 체험하도록 하였다. 진분수끼리 뺄 수 없어서 자연수를 등분하는 상황이 포함되도록 그림으로 나타내고, 풀이과정을 써 봄으로써 형식적 알고리즘에 의한 분수의 뺄셈이 아닌 원리를 활동적, 영상적, 상징적 표상의 연계를 통해 관계적으로 이해할 수 있도록 활동을 구성하였다.

<표 Ⅲ-3> 다양한 표상활동 중심 교수·학습과정안(15차시)

차 시	15차시		주 제	대분수의 뺄셈
학습내용	분수끼리 뺄 수 없는 대분수의 뺄셈 방법 이해하기			
학습목표	대분수의 뺄셈을 할 수 있다.			
활동내용				
도입		· 실생활 문제 제시		
		E: 활동적 표상	I: 영상적 표상	S: 상징적 표상
전개	활동 1	· 와플 한 개를 똑같이 4등분을 하여 $\frac{1}{4}$조각을 5개 만들기 · $\frac{5}{4}$에서 $\frac{2}{4}$만큼 덜어내기 · 와플 2개에서 1개 덜어내기	· 활동과정을 그림으로 그리고 $1\frac{2}{4}$만큼 지우기	· 남은 와플의 양을 뺄셈식으로 나타내기 $3\frac{1}{4}-1\frac{2}{4}$ $=(2+1+\frac{1}{4})-1\frac{2}{4}$ $=(2+\frac{4}{4}+\frac{1}{4})-1\frac{2}{4}$ $=2\frac{5}{4}-1\frac{2}{4}=1+\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$
전개	활동 2	· 떡꼬치 모형 $4\frac{3}{5}$ 중 떡꼬치 한 개를 똑같이 5등분하기 · $\frac{8}{5}$에서 $\frac{4}{5}$를 빼고, 3개에서 2개를 빼기	· 활동과정을 그림으로 그리고 $2\frac{4}{5}$만큼 지우기	· 남은 떡꼬치의 양을 뺄셈식으로 나타내기 $4\frac{3}{5}-2\frac{4}{5}$ $=(3+1+\frac{3}{5})-2\frac{4}{5}$ $=(3+\frac{5}{5}+\frac{3}{5})-2\frac{4}{5}$ $=3\frac{8}{5}-2\frac{4}{5}=1\frac{4}{5}$
전개	활동 3	· 분수원타일로 $3\frac{1}{6}$ 만들기 · 원 1개를 $\frac{1}{6}$타일 6개로 바꾸기 · $\frac{7}{6}$에서 $\frac{4}{6}$만큼 덜어내기 · 남은 분수원타일 세어보기	· 활동과정을 그림으로 나타내기 · 원 1개를 6등분하기 · $3\frac{1}{6}$에서 $1\frac{4}{6}$만큼 지우기	· 남은 분수원타일의 양을 뺄셈식으로 나타내기 $3\frac{1}{6}-1\frac{4}{6}$ $=(2+1+\frac{1}{6})-1\frac{4}{6}$ $=(2+\frac{6}{6}+\frac{1}{6})-1\frac{4}{6}$ $=2\frac{7}{6}-1\frac{4}{6}=1\frac{3}{6}$
정리		· 학습내용 정리 및 문제해결 · 오늘의 퀴즈 풀기		

다양한 표상활동 과정은 <표 Ⅲ-4>와 같이 이루어졌으며, Bruner의 EIS이론의 순서를 따라 진행하였다.

<표 Ⅲ-4> 다양한 표상활동 과정 예시(14차시)

<table>
<tr><th></th><th>활동적 표상(E)</th><th></th><th>영상적 표상(I)</th><th></th><th>상징적 표상(S)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">활동 1</td><td></td><td rowspan="2">⇨</td><td></td><td rowspan="2">⇨</td><td></td></tr>
<tr><td>오예스 $2\frac{1}{4}$개에서 $\frac{2}{4}$조각을 먹기 위해, 오예스 1개를 4등분한 뒤, $\frac{2}{4}$만큼 먹기</td><td>사각형 1개를 4등분으로 나누기, 먹은 양 $\frac{2}{4}$만큼 지우기</td><td>남은 오예스의 양을 뺄셈식으로 나타내기</td></tr>
<tr><td rowspan="2">활동 2</td><td></td><td rowspan="2">⇨</td><td></td><td rowspan="2">⇨</td><td></td></tr>
<tr><td>색막대판에 색막대 $2\frac{1}{3}$만큼 올려놓기, 1막대 1개를 $\frac{1}{3}$막대 3개로 바꾸고 $\frac{2}{3}$만큼 덜어내기</td><td>색막대를 그리고, 1막대 한 개를 3등분한 뒤, $2\frac{1}{3}$에서 $\frac{2}{3}$만큼 지우기</td><td>남은 색막대의 양을 뺄셈식으로 나타내기</td></tr>
<tr><td rowspan="2">활동 3</td><td></td><td rowspan="2">⇨</td><td></td><td rowspan="2">⇨</td><td></td></tr>
<tr><td>분수원타일로 $3\frac{2}{6}$만들기, 원 1개를 $\frac{6}{6}$타일로 바꾸고, $\frac{8}{6}$에서 $\frac{4}{6}$만큼 덜어내기</td><td>분수원타일을 그리고 원 1개를 6등분하기, $3\frac{2}{6}$에서 $\frac{4}{6}$만큼 지우기</td><td>남은 분수원타일의 양을 뺄셈식으로 나타내기</td></tr>
</table>

3. 측정 도구

가. 분수 이해도 검사

학생들의 분수 이해를 측정하기 위해, 분수 학업성취도 검사 외에 관계적 이해 검사를 실시하여 학생들의 이해 수준을 심층적으로 살펴보았다.

(1) 관계적 이해 검사

여러 연구(권성룡, 1997; 김옥경, 1997; 신준식, 1996; 염석일, 2001)에서도 학생들이 단지 알고리즘에 따라 문제를 해결한다고 하여 이해를 했다고 보기는 어렵다고 하였다. 즉, 과정에 대한 관찰없이 문제해결 결과만으로는

학생들이 관계적으로 이해를 했는지 도구적으로 이해했는지 파악하기가 어렵다는 것이다. 이를 종합해 볼 때, 여러 학자들은 관계적 이해의 중요성을 강조해왔다고 볼 수 있다.

따라서 학생들의 이해수준을 파악할 방법이 필요한데, Vinner(1991)와 Moore(1994)는 학생들이 표현한 이미지를 통해 이해과정을 파악할 수 있다고 하였다. Vinner(1991)는 개념을 이해한다는 것은 개념이미지를 형성하는 것이므로 분수 개념에 대한 개념이미지를 살펴보는 것은 학생의 분수 개념이해를 살펴보는 한 가지 방법이 될 수 있다고 하였다. 분수에 대한 개념이미지란 분수개념에 대해 학생이 가진 '표상'을 말하므로, 학생의 분수표상을 고찰함으로써 학생의 분수 개념의 이해를 평가할 수 있다고 본 것이다. 한편 Moore(1994)는 Vinner의 개념이해에 대한 아이디어를 개념 이해 도식(concept understanding scheme)으로 확장시켰다.

따라서 본 연구에서는 개념이해에 대한 Vinner(1991)와 Moore(1994)의 이론을 참고하여 학생들의 관계적 이해를 평가하는 기준으로 '수학적 개념·원리를 이해하여 개념이나 원리가 드러나게 그림으로 나타낼 수 있는가'로 설정하였다. EIS 표상이론의 흐름에 맞게 활동적, 영상적, 상징적 표상활동을 모두 마친 후, 매 차시가 끝난 뒤 서술평가 형식의 '오늘의 퀴즈'를 실시하여 학생들이 관계적 이해를 하고 있는지 파악하였다. 개념 또는 원리를 그림과 함께 설명한 학생들의 응답을 통해 각 차시별 개념 또는 원리에 대해 관계적 이해를 했는지 판단하고자 구미종(2002)의 관계적 이해도 평가 문항에 대한 평가기준 틀과 명혜경(2007)의 수와 연산 이해력 평가기준 틀을 참고하여 <표 Ⅲ-5>의 평가기준을 작성하였다(부록 1 참조).

학생들을 수학학업성취도에 따라 상수준, 하수준으로 구분하여 수준에 따른 관계적 이해의 변화를 보고자 하였다. 관계적 이해 평가 시, 한 차시 이상 결석한 경우 변화를 보기 어려우므로 결석한 학생 2명을 제외한 31명을 대상으로 분석하였다.

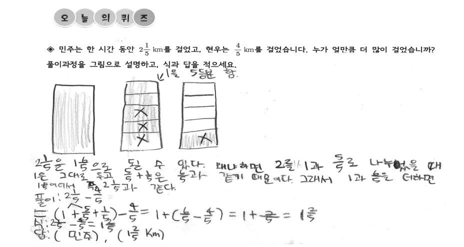
<표 Ⅲ-5> 관계적 이해 평가를 위한 분석적 기준

구분	평가 기준		배점
상	수학적 개념·원리를 이해하여 문제해결에 적용하는 수준 (관계적 이해수준)	· 해당 개념·원리가 드러나게 그림으로 표현하고, 과정을 올바르게 설명함. · 풀이과정과 답이 모두 맞음.	4점
		· 개념·원리를 이해하고 있으며, 풀이과정을 올바르게 설명하였으나, 계산과정에서 오류가 있음. · 개념·원리를 이해하고 있으나, 개념·원리를 나타내는 과정이 아닌 결과를 그림으로 표현함.	3점
중	수학적 개념·원리에 대한 이해 없이 암기한 법칙을 문제해결에 적용하는 수준(도구적 이해수준)	· 그림으로 올바르게 설명하였으나, 개념·원리에 대한 이해가 부족함. · 풀이과정과 답이 모두 맞음.	2점
		· 그림에 오류가 있고 개념·원리를 이해하지 못함. · 계산과정에 오류가 있음.	1점
하	수학적 개념·원리에 대한 이해에 도달하지 못한 수준	· 풀이과정이 옳지 않고, 오답인 경우 · 그림과 방법 설명을 전혀 나타내지 못함. · 무응답	0점

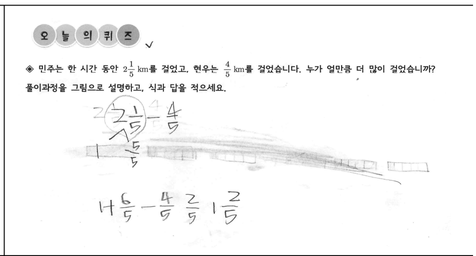
관계적 이해를 보고자 한 평가였기 때문에 개념·원리를 이해하고 과정에 대한 설명이 정확하나 단순 계산 실수의 경우는 3점을 부여하였다. 위의 기준에 의해 3점 이상을 받은 학생은 개념·원리를 그림과 함께 설명할 수 있으므로 관계적 이해수준에 도달했다고 판단하고, 개념·원리에 대한 이해 없이 기계적으로 암기하여 문제를 해결한 학생은 도구적 이해수준이라 생각되어 2점을 부여하였다. 또한 오답인 경우나, 무응답인 경우는 0점을 부여하였다. 개념·원리는 이해하였으나 그림으로 표현하는 능력이 부족할 수 있다는 점을 감안하여 그림에 대한 제시가 부족할 경우, 1:1 면담을 통해 학생들이 이해한 바를 추가적으로 파악하였다. 1:1 면담은 연구가 진행되는 기간 중 수학 시간 전 쉬는 시간 10분동안 진행하였다.

위의 평가기준을 적용하여 평가한 예시는 다음과 같다. 분수의 뺄셈 관련 14차시에 학습한 대분수와 진분수

의 뺄셈의 경우 관계적 이해에 도달하였다고 평가한 사례는 [그림 Ⅲ-1]과 같다. 4점을 받은 학생 응답의 경우 $2\frac{1}{5}$에서 $\frac{4}{5}$를 뺄 수 없으므로 1을 똑같이 5등분하여 $1\frac{6}{5}$으로 만들고, $\frac{4}{5}$를 빼서 계산하는 과정을 그림으로 설명하였다. 즉, $2\frac{1}{5}$이 $1\frac{6}{5}$으로 바꿀 수 있는 이유에 대한 이해를 하고 있다고 판단되어 관계적 이해를 한 것으로 보았다.



관계적 이해에 도달한 학생의 응답(4점)



도구적 이해에 도달한 학생의 응답(2점)

[그림 Ⅲ-1] 학생의 반응 채점 예시

이와는 달리 [그림 Ⅲ-1]에서 나타나는 것처럼 $2\frac{1}{5}$을 $1\frac{6}{5}$으로 바꿀 수 있는 이유는 알지 못한 채 계산하여 문제를 해결한 경우 도구적 이해를 한 것으로 보아 2점을 부여하였다. 학생들의 서술응답만으로는 원리를 이해하지 못한 것인지 표현을 못한 것인지 알 수 없기 때문에, 1:1 면담을 통해 확인하였다. [그림 Ⅲ-1]을 보고 도구적 이해에 도달했다고 판단한 근거는 아래의 대화와 같다.

교사: $2\frac{1}{5}$을 $1\frac{6}{5}$로 바꾸었는데, 어떻게 바꾸었는지 과정을 말해줄래요?
학생: 2에서 1을 빼서 1이 되었고, 분자에 5를 더해서 $\frac{6}{5}$을 썼어요.
교사: 왜 자연수에서 1을 빼고, 분자에 5를 더했나요?
학생: 그렇게 계산해야 해요.
교사: 그럼 $2\frac{1}{5}$가 $1\frac{6}{5}$이 되는 이유는 모르겠나요?
학생: 네.

받아내림이 있는 분수의 뺄셈의 경우, 관계적 이해를 하였는지 도구적 이해를 했는지 분명하게 드러난다. 관계적 이해를 한 경우라면, $2\frac{1}{5}$이 $1\frac{6}{5}$과 같은 이유를 그림으로 설명할 수 있지만, 도구적 이해를 하였다면, 이유는 모른 채 자연수에서 1을 빼고, 분자에 분모의 수만큼 더하는 것을 암기하여 풀이하는 것을 볼 수 있다.

(2) 분수 학업성취도 검사

Bruner의 EIS이론에 근거하여 다양한 표상활동을 통한 분수학습을 실시한 후, 분수관련 수학학업성취도를 알아보기 위해 검사를 실시하였다. 분수 학업성취도 검사는 분수 개념이해(I)와 분수의 덧셈(II), 분수의 뺄셈(III)으로 크게 I, II, III 세 파트로 나누어 실시하였는데, 분수 개념이해(I) 파트(부록 2 참조)는 6차시 학습 후, 분수의

덧셈(II) 파트는 10차시 후에, 분수의 뺄셈(III) 파트는 15차시 후에 이루어졌다.

세 파트 모두 각 차시의 학습내용을 두루 반영되도록 구성(<표 III-6> 참조)하였는데, 총 20문항 중에는 상수준이 6문항, 중수준이 8문항, 하수준이 6문항으로 상중하의 난이도를 30%, 40%, 30%의 비율로 정해 문항을 출제하였다. 본 연구에 사용된 검사 도구는 초등수학 관련 박사과정 중에 있는 교사 2인과 석사학위를 소지하고 초등학교 4학년 담임 경력이 있는 교사 1인의 검토 및 조언을 바탕으로 수정・보완하여 내용타당도를 높였다.

각 문항 당 5점씩 배점하여 총 100점이며, 분수 학업성취도 검사에는 분수 개념・원리에 대해 잘 알고 있는지에 대한 성취도 평가이므로 부분 점수 없이 정답과 오답으로 처리하였다. 평가의 타당도를 높이기 위해 본 연구 대상에 적용하기 전 서울 S초등학교 5학년 3개 반을 대상으로 pilot 테스트를 실시하였다. 20문항으로 구성된 학업성취도 검사를 40분동안 실시하였으며, 문항 내적 일관성 신뢰도(Cronbach α)를 검증하였다. 분수 학업성취도 검사 I,II,III의 신뢰도는 각각 .647, .468, .853이었으며, 낮은 신뢰도를 보인 분수 학업성취도 검사II의 경우 신뢰도가 낮은 문항을 수정·보완하여 본 연구 대상에게 적용하였다.

<표 III-6> 분수 학업성취도 검사지 문항 내용

유형	문항 내용	문항번호			문항수
		상	중	하	
분수 학업성취도 검사 I **(분수의 개념)**	분수의 종류(진분수)	4	2	1	3문항
	분수의 종류(가분수)	11	7	5	3문항
	분수의 종류(대분수)		3	6	2문항
	가분수를 대분수로 나타내기	13	8	12	3문항
	대분수를 가분수로 나타내기	14	9,10		3문항
	분모가 같은 가분수의 크기 비교	16	15	17	3문항
	분모가 같은 대분수의 크기 비교	20	19	18	3문항
분수 학업성취도 검사 II **(분수의 덧셈)**	분수의 합이 진분수인 덧셈	18	2,5,16	1	5문항
	분수의 합이 가분수인 덧셈	4,15	7,8	3	5문항
	분모가 같은 대분수의 덧셈	9,20	6	14,17	5문항
	대분수와 진분수의 덧셈	19	12,13	10,11	5문항
분수 학업성취도 검사 III **(분수의 뺄셈)**	분모가 같은 진분수의 뺄셈	6	2,3,8	1	5문항
	(자연수)-(분수)의 계산	7,20	10,16	5	5문항
	분모가 같은 대분수의 뺄셈	17,18	12	4,9	5문항
	대분수와 진분수의 뺄셈	19	13,14	11,15	5문항

나. 수학적 태도 검사

본 연구에서는 이종희 외(2011)가 개발한 검사도구를 사용하여 수학적 태도를 측정하였다. 이 검사지는 학습지향성 5문항, 자기통제력 6문항, 불안 4문항, 흥미 5문항, 가치인식 6문항, 자신감 4문항, 총 30문항으로 구성되어 있으며 타당도는 요인 분석을 통해, 신뢰도는 Cronbach α를 통하여 검증되었다. 각 하위 요인별 신뢰도는 .667~.838이었으며, 전체 검사도구의 신뢰도는 .893으로 신뢰도가 높은 검사임을 알 수 있다. 이 검사를 본 연구 대상에게 시행한 결과 Cronbach α는 .663~.903이 나왔으며, 전체값은 .929로 높은 신뢰도를 보였다.

수학적 태도 검사는 동형 검사지로 사전, 사후에 2회 실시하였다. 다양한 표상활동을 통한 분수학습이 정의적인 측면에 영향을 미치는지를 알기 위하여 SPSS/WIN 18.0을 이용하고, 두 종속표본 t검정을 통해 사전, 사후 검사에서 수학적 태도의 변화가 나타나는지 살펴보았다. 양적 data 외에도 학생들의 일지와 관찰 및 1:1면담을 통해 다양한 표상활동 중심 분수학습의 어떤 측면이 수학적 태도의 하위요인에 영향을 미쳤는지 알아보았다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 분수의 이해

가. 관계적 이해

차시별 관계적 이해 평가 결과를 분석하여 어느 정도의 학생이 관계적 이해에 도달하였는지를 알아보았으며, 상수준과 하수준 간의 관계적 이해에 어떤 변화를 보이는지를 분석하였다.

(1) 차시별 관계적 이해 평가 결과

수업에 참여한 전체 학생 33명을 학기 초에 실시한 진단평가 결과를 기준으로 30%, 40%, 30%의 비율로 나누어 상수준 10명, 중수준 13명, 하수준 10명으로 구분하였다. 본 수업이 이루어지는 15차시 동안 해당 차시 수업에 참여하지 못한 결석생 2명(중수준 1명, 하수준 1명)의 결과를 제외하여 관계적 이해에 도달한 학생의 비율은 <표 Ⅳ-1>과 같다. <표 Ⅲ-5>의 관계적 이해 평가를 위한 분석적 기준에 의거하여 3, 4점을 받은 경우 관계적 이해에 도달하였다고 판단하였다.

<표 Ⅳ-1> 차시별 관계적 이해에 도달한 학생의 비율

차시	학습내용	관계적 이해에 도달한 학생의 비율	
1차시	분수와 진분수 알기	28명/ 31명	90.3%
2차시	가분수와 대분수 알기	21명/ 31명	67.7%
3차시	대분수를 가분수로 나타내기	16명/ 31명	51.6%
4차시	가분수를 대분수로 나타내기	12명/ 31명	38.7%
5차시	가분수의 크기 비교	27명/ 31명	87.1%
6차시	대분수의 크기 비교	30명/ 31명	96.8%
7차시	진분수의 덧셈(1)	26명/ 31명	83.9%
8차시	진분수의 덧셈(2)	24명/ 31명	77.4%
9차시	대분수의 덧셈	31명/ 31명	100%
10차시	대분수와 진분수의 덧셈	25명/ 31명	80.6%
11차시	진분수의 뺄셈	31명/ 31명	100%
12차시	대분수의 뺄셈(1)	30명/ 31명	96.8%
13차시	자연수와 진분수의 뺄셈	28명/ 31명	90.3%
14차시	대분수와 진분수의 뺄셈	28명/ 31명	90.3%
15차시	대분수의 뺄셈(2)	28명/ 31명	90.3%

다양한 표상활동 중심 분수학습에서 나타난 학생들의 관계적 이해를 살펴본 결과 15차시 중 11차시에서 80% 이상의 학생들이 관계적 이해에 도달하였다. 15차시의 학습내용은 1~6차시(분수의 개념), 7~10차시(분수의 덧셈), 그리고 11~15차시(분수의 뺄셈)로 구분할 수 있다. 세 영역에서의 관계적 이해에 도달한 학생 비율의 평균은, 분수의 개념(72.03%), 분수의 덧셈(85.47%), 분수의 뺄셈(93.54%)로 다양한 표상활동 중심의 분수학습이 진행될수록 관계적 이해를 한 학생의 비율이 점차 늘어나고 있음을 알 수 있다.

(2) 수준에 따른 관계적 이해의 변화

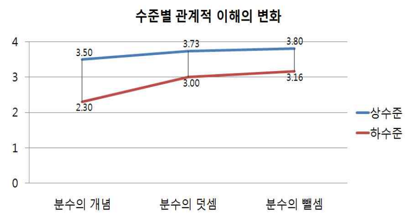
수준에 따라 관계적 이해에 변화가 있는지 알아보기 위해, 관계적 이해 평가 결과(<표 Ⅳ-2> 참조), 다양한 표상활동 중심의 분수학습 초반에 이루어진 분수의 개념과 관련해서 상수준 평균은 3.5이고, 하수준 평균은 2.3

이였다. 상수준 학생들은 분수학습이 이루어지는 초반부에서도 관계적 이해수준이 높았음을 알 수 있으며, 상수준과 하수준의 차이는 평균 1.2점 차이가 났다.

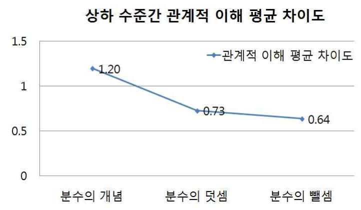
<표 Ⅳ-2> 영역별 관계적 이해 평가 결과

	분수의 개념	분수의 덧셈	분수의 뺄셈	변화도
상수준 평균(표준편차)	3.50(0.47)	3.73(0.24)	3.80(0.16)	+0.30
하수준 평균(표준편차)	2.30(0.84)	3.00(0.62)	3.16(0.30)	+0.86
상수준-하수준 차이도	1.20	0.73	0.64	-0.56

분수의 덧셈영역에서는 상수준이 3.73, 하수준이 3.00으로 평균 0.73점의 차이를 보였으며, 후반부에 이루어졌던 분수의 뺄셈영역에서는 상수준이 3.80, 하수준이 3.16으로 상수준과 하수준의 차이가 0.64로 줄어들었다. 상수준과 하수준의 관계적 이해의 변화를 살펴보면([그림 Ⅳ-2] 참조), 수준에 관계없이 모두 관계적 이해가 증가하였으며, 하수준 학생들의 변화도가 상수준에 비해 컸음을 확인할 수 있었다. 상수준과 하수준 간 관계적 이해 평균 차이([그림 Ⅳ-3] 참조)는 1.20에서 0.73, 0.64로 처음보다 0.56점이 줄어들었다. 이는 다양한 표상활동 중심 수업이 진행될수록 상수준과 하수준의 관계적 이해도 차이가 좁혀졌음을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-2] 수준별 관계적 이해의 변화



[그림 Ⅳ-3] 상하 수준간 관계적 이해 평균 차이도

위의 결과를 종합해 볼 때, 다양한 표상활동을 중심으로 한 분수학습은 추상적인 기호와 알고리즘을 적용한 연산을 처음부터 도입하지 않고, 구체물을 활용한 직접적인 조작활동을 충분히 경험한 후, 조작활동과정을 이미지로 표현해 보고, 이 과정을 기호로 표현하는 일련의 단계를 거침으로써 해당 차시의 개념 및 원리를 이해하는데 도움이 되는 것으로 판단된다. Piaget의 구체적 조작단계에 있는 학생들의 발달수준에 맞게 구체적 조작활동을 통해 개념·원리를 익히는 과정을 담고 있기 때문에 하수준의 학생들의 관계적 이해를 높이는데 효과가 있었다고 볼 수 있다.

나. 분수학업성취도

세 차례에 걸친 분수 학업성취도 검사 결과(<표 Ⅳ-3> 참조), 문항의 수준을 상중하 30, 40, 30% 비율로 출제한 분수 학업성취도 검사에서 평균 90점 가까이 또는 그 이상의 높은 성취도를 보였다.

<표 Ⅳ-3> 분수 학업성취도 검사 결과

	평균(표준편차)	상수준 평균	하수준 평균	수준간 차이도
분수 학업성취도 검사Ⅰ	89.55(12.59)	96.5	78.9	17.6
분수 학업성취도 검사Ⅱ	94.24(6.39)	100.0	91.7	8.3
분수 학업성취도 검사Ⅲ	93.18(7.48)	98.5	86.1	12.4

N=33

상수준과 하수준을 구분하여 분수 학업성취도 검사결과를 살펴본 결과, 분수 학업성취도 검사I에서는 상·하 수준간 17.6점 차이가 났다. 분수 학업성취도 검사Ⅱ에서는 상수준에 비해 하수준이 향상된 정도가 컸음을 알 수 있다. 분수 학업성취도 검사Ⅲ에서는 상수준, 하수준 모두 분수 학업성취도 검사Ⅰ보다는 높아졌으나 Ⅱ보다는 성취도결과가 낮아졌다.

수준에 따른 분수 학업성취도 검사결과를 종합해 본 결과, 다양한 표상활동 중심의 분수학습이 이루어진 초반보다 후반부에 성취도 결과가 높아졌으며, 수준간 차이도 줄어들었음을 확인할 수 있다.

2. 수학적 태도

가. 사전·사후 수학적 태도 결과

본 연구에서는 다양한 표상활동 중심의 수업이 수학적 태도에 미치는 효과를 검증하기 위해 두 종속표본 t검정을 유의수준 .01에서 실시하였다. 수학적 태도 사전 검사와 사후 검사 결과를 비교한 결과는 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4> 수학적 태도 검사 결과 평균(표준편차), N=33

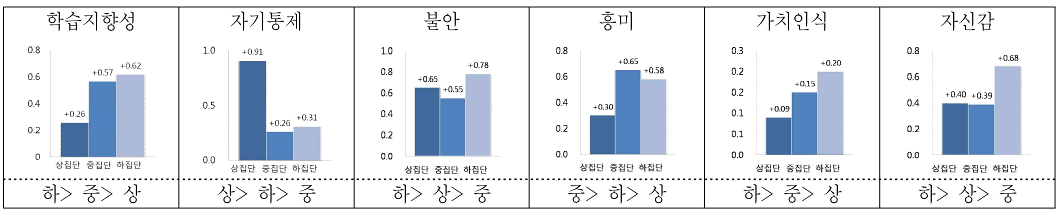
요인	사전	사후	t	p
전체요인	3.01(.47)	3.47(.38)	-8.89^{**}	.000
학습지향성	2.91(.69)	3.40(.56)	-6.19^{**}	.000
자기통제	2.75(.51)	3.23(.59)	-4.86^{**}	.000
불안	2.40(.91)	1.75(.72)	5.45^{**}	.000
흥미	3.11(.59)	3.63(.41)	-6.18^{**}	.000
가치인식	3.64(.36)	3.78(.35)	-3.57^{**}	.001
자신감	3.04(.56)	3.52(.45)	-7.30^{**}	.000

$^{**}p<.01$

사전·사후 수학적 태도 차이에 대한 통계적 유의성을 검정한 결과 t통계값은 -8.89, 유의확률은 .000으로서 유의수준 .01에서 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 수학적 태도 검사는 학습지향성, 자기통제, 불안, 흥미, 가치인식, 자신감의 하위요인들로 구성되어 있으며, 하위 요인별로 분석해 본 결과, 학습지향성, 자기통제, 불안, 흥미, 자신감 요인을 각각 분석한 결과 유의확률 .000으로 통계적으로 유의미한 차이가 있었으며, 가치인식의 경우 유의확률 .001로 역시 통계적으로 유의미한 차이를 보였다. 이는 다양한 표상활동 중심의 수업이 학생들의 학습지향성, 자기통제, 흥미, 가치인식, 자신감을 높이고, 불안감을 감소시키는 등의 긍정적 영향을 미친다고 설명할 수 있다.

나. 수준에 따른 수학적 태도 변화

수학학습수준과 수학적 태도와의 관련성이 있는지 살펴보고자, 상집단, 중집단, 하집단 학생들의 수학적 태도 하위 요인별 사전·사후결과를 살펴보았다. 상, 중, 하집단별 사전, 사후검사 평균 차이를 나타낸 결과는 [그림 Ⅳ-4]와 같다.



[그림 Ⅳ-4] 수학적 태도 하위 요인별 집단별 차이

학습지향성 측면에서 상, 중, 하 집단별 차이를 종합해볼 때 상집단은 자기통제 측면에서, 중집단은 흥미도에서, 하집단은 수학적 태도 6가지 요소 중 4가지 요소(학습지향성, 불안, 가치인식, 자신감)에서 큰 영향을 받았음을 알 수 있다. 즉, 수준에 관계없이 사전보다 사후에 실시한 수학적 태도 검사에서 6가지 하위 요인 모두 증가하여 긍정적인 변화가 있었으며, 수준별로 보았을 때는 하수준 학생들의 수학적 태도 변화에 미친 영향이 컸다고 해석할 수 있다.

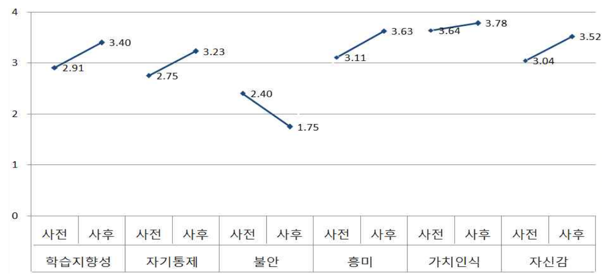
다. 수학적 태도 하위 요인별 변화 분석

수학적 태도를 구성하는 하위 요인별 문항수가 다르기 때문에 각 학생들의 응답결과를 문항수로 나누어 4점 만점으로 환산하였다. 수학적 태도 하위 요인을 비교한 결과 수학적 태도 사후검사 결과만을 보았을 때, 가치인식이 평균 3.78점으로 가장 높은 점수를 보였고, 흥미, 자신감, 학습지향성, 불안, 자기통제 순으로 나왔다. 하지만 다양한 표상활동 중심 분수학습이 큰 영향을 미친 하위 요인을 알기 위해 <표 Ⅳ-5>와 같이 사전, 사후 검사 결과 차이를 정리하였다.

<표 Ⅳ-5> 수학적 태도 하위 요인별 사전·사후 검사 차이

	사전 평균(표준편차)	사후 평균(표준편차)	평균 변화도
학습지향성	2.91(.69)	3.40(.56)	+ 0.49
자기통제	2.75(.51)	3.23(.59)	+ 0.48
불안	2.40(.91)	1.75(.72)	- 0.65
흥미	3.11(.59)	3.63(.41)	+ 0.52
가치인식	3.64(.36)	3.78(.35)	+ 0.14
자신감	3.04(.56)	3.52(.45)	+ 0.48

사전·사후 수학적 태도 검사 결과의 평균을 살펴보면([그림 Ⅳ-5] 참조), 수학적 태도 하위 요인 중 변화가 큰 요인은 평균 0.65점 차이를 보인 불안요소였다. 즉, Bruner의 EIS이론을 적용하여 다양한 표상활동 중심으로 한 분수학습이 수학에 대한 불안을 낮추는데 영향을 미쳤음을 알 수 있다. 그 다음으로는 수학적 흥미도에서 평균 0.52점이 향상되었으며, 0.49점이 향상된 학습지향성 순이었다. 자기통제와 자신감 영역은 평균 0.48점이 향상되었고, 차이 변화가 적은 영역은 가치인식이었다. 가치인식 영역은 사후검사결과 가장 높은 점수를 보인 영역이었지만 사전검사와의 가장 차이가 적은 것으로 보아, 사전 검사에서도 가치인식 수준이 높았음을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-5] 수학적 태도 하위 요인별 사전·사후 검사 평균

이를 종합해 볼 때, 다양한 표상활동 중심 수업이 수학적 태도에 긍정적인 영향을 미치고, 특히 수학에 대한 불안감을 낮추는데 효과적이었다고 판단할 수 있다.

라. 수학적 태도에 대한 학생들의 응답 사례

다양한 표상활동 중심의 분수학습 15차시가 끝난 후, 소감을 적은 학생들의 응답은 다음과 같았다. 학생들의 소감을 통해 다양한 표상활동 중심의 분수학습에서 어떠한 측면이 수학적 태도에 영향을 미쳤는지 분석해 보았다.

> 남○○: 분수원타일이나 모형피자, 초콜렛, 풍선껌, 오예스로 직접 해보니까 더 이해가 잘 돼서 좋았다.
> 김○○: 옛날에는 분수가 많이 어려웠지만 지금은 분수원타일로 분수를 해서 어렵지 않고 쉽다.
> 김○○: 직접 자르고 활동하니까 이해도 더 잘되었다.

학생들의 소감을 분석해 본 결과, 교구를 사용하거나 여러 가지 사물을 자르고, 나눠보는 등의 직접 손으로 해보는 조작활동을 통해 개념, 원리를 쉽게 이해할 수 있었다고 응답하였다. 즉, 다양한 표상활동을 중심으로 한 분수학습에서 활동적 표상활동이 학습의 이해도를 높였음을 알 수 있다.

> 박○○: 개념도 하나하나 머릿속에 기억이 남는다. 항상 개념 하나하나가 이해되고, 특히 그림과 식을 함께 했을 때가 너무 좋았다.
> 오○○: 교구로 해보고 그것을 그림, 식, 풀이 과정으로 모두 기록해보니 분수를 생각하면 그림, 식, 풀이 과정을 바로 떠올릴 수 있게 되었다.
> 홍○○: 분수가 어려워서 하기 싫었는데 음식으로 그림으로 해서 분수를 재미있게 배웠다.

위와 같은 소감을 쓴 학생들은 다양한 표상활동 중에서 영상적 표상활동과정에서 흥미를 느꼈으며, 직접 체험한 활동적 표상과 그림으로 나타낸 영상적 표상, 식으로 나타낸 상징적 표상을 단계적으로 거쳤을 때 개념이 머릿속에 쉽게 떠오른다고 서술하였다. 활동적, 영상적, 상징적 표상단계를 거쳐 학습한 것이 도움이 되었다고 응답하였다.

아래의 응답을 통해, 학생들이 수업에 즐겁게 참여한 결과 수학교과에 대한 인식이 변화하였음을 알 수 있다.

> 남○○: 수학하면 지루하고 재미없는 과목인 줄 알았는데, 지금은 재미있어졌다.
> 김○○: 수학에서 자신감과 흥미가 생겼고, 분수를 또 배우고 싶은 기분이 든다.
> 김○○: 나는 원래 수학은 계산 같은 것만 하는 것인 줄 알았는데 분수를 배우면서 수학이 무엇인지 잘 알게 되었다. 처음에 수학이 재미없고 어려운 과목이라고 생각했는데 점점 하다 보니 흥미가 생겼다.

학생들의 수업 후 소감에서 <표 Ⅳ-6>과 같이 수학적 태도의 하위요인 흥미, 자기통제, 가치인식, 자신감, 학습지향성의 요소들을 찾을 수 있었다.

<표 Ⅳ-6> 수업 후 학생들의 소감

수업 후 학생들의 소감	관련 수학적 태도 요소
·분수를 또 배우고 싶은 기분이 든다. ·수학에 대해 더 알고 싶어졌다.	학습지향성
·처음에는 분수를 잘 못했는데, 더 쉽고 재미있게 공부해서 분수에 관심이 많아졌다. ·먹는걸로 해서 집중이 더 잘 되었다.	자기통제
·분수원타일로 공부한 뒤 그림으로 표현하고 해서 수학시험을 더 잘 보게 된 것 같다. ·분수가 어려워서 하기 싫었는데 음식으로 그림으로 해서 분수를 재미있게 배웠다.	불안
·수학수업이 원래 지루하고 재미없었는데 신나고 재미있었다. ·분수원타일로 수업하니 재미있었고, 수학이 이렇게 재미있는 줄 몰랐다.	흥미
·수학을 배우면서 모르는 것도 알게 되었다. 그래서 수학은 좋은 거라고 느꼈다. ·나는 원래 수학은 계산 같은 것만 하는 것인 줄 알았는데 분수를 배우면서 수학이 무엇인지 잘 알게 되었다.	가치인식
·옛날에는 분수가 많이 어려웠지만 지금은 분수원타일로 분수를 해서 어렵지 않고 쉽다. ·시험에도 자신이 있다.	자신감

이를 종합해 볼 때, 다양한 표상활동을 통한 분수학습을 통해 학생들은 수학에 대한 흥미를 느끼고, 자신감을 가지게 되었으며, 수학에 대해 부정적 인식을 가지고 있었던 학생들도 긍정적인 수학적 태도로 변화되었음을 알 수 있다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 Bruner의 EIS이론을 적용하여 다양한 표상활동 중심의 분수학습이 분수의 이해 및 수학적 태도에 미치는 영향을 알아보고자 하였다.

수학 교육이 추구하는 목표는 수학적 사고 능력, 문제해결 능력 등의 신장임에도 불구하고, 수학 교육이 이루어지고 있는 현장에서는 형식적인 계산 알고리즘과 기호로 표상된 반복적인 문제풀이를 통한 학습이 이루어지고 있어 학생들은 개념･원리를 이해하는데 어려움을 겪는 문제점이 있다고 여러 연구에서 언급한 바 있다. 특히 초등학교 수학 교육에서는 수학적 개념･원리의 의미를 이해하고 왜 그러한지를 발견하는 과정이 중요하다.

이에 학교 현장에서 제시되는 문제점들을 개선하기 위해 학생들의 발달수준을 고려하여 직접적인 조작활동을 통해 개념의 의미를 체험해보고, 궁극적으로 도달해야 할 추상적인 수학적 기호를 다루기까지 활동이 연계되도록 하는데 중점을 두어 15차시의 분수 학습 프로그램을 개발하여 적용하였다. 매 차시마다 3가지 상황을 제시하여, 각각의 상황마다 직접 조작해보는 활동적 표상단계(E)와, 활동과정을 그림 등으로 표현하는 영상적 표상단계(I), 그림으로 표현한 것을 수학적 기호 또는 문자와 같이 추상성을 띤 상징적 표상단계(S)를 순서대로 경험하도록 활동들을 구성하였다. 이를 통해 분수 개념과 연산의 의미를 활동과 연계하여 이해를 높이고자 하였다.

본 연구에서 다양한 표상활동 중심의 분수학습을 통해 학생들의 분수의 이해 및 수학적 태도에 대해 분석한 결과는 다음과 같다.

분수의 이해수준을 파악하기 위해 실시한 관계적 이해는 매 차시 후에 ‘오늘의 퀴즈’ 형태의 서술평가를 실시하였고, 학생들의 응답결과를 관계적 이해 평가기준에 따라 분석하였다. 매 차시의 개념 또는 원리에 대한 설명을 그림으로 표현한 경우 관계적 이해에 도달하였다고 판단하였으며, 이 결과를 바탕으로 매 차시 관계적 이해에 도달한 학생의 비율을 분석한 결과, 15차시 중 두 차시는 모든 학생이 관계적 이해에 도달하였으며, 열 한번의 차시에서는 전체 학생의 80%이상이 관계적 이해한 것을 알 수 있었다. 15차시 수업 중 분수의 개념, 분수의 덧셈, 분수의 뺄셈 세 영역으로 구분지어 변화를 살펴본 결과, 수업이 진행될수록 관계적 이해에 도달한 학생들의 비율이 증가함을 알 수 있었다.

수학학업수준에 따라 관계적 이해의 변화가 어떠한지 알아보기 위해 분수의 개념, 분수의 덧셈, 분수의 뺄셈 영역에서 상수준과 하수준의 관계적 이해 평가결과의 평균을 비교해 보았다. 상수준과 하수준 학생 모두 다양한 표상활동 중심의 분수학습이 진행될수록 관계적 이해도가 상승하였으며, 하수준이 상수준에 비해 상승 폭이 컸다. 상수준과 하수준 간 관계적 이해 평균 차이가 줄어드는 것을 확인할 수 있었다.

다양한 표상활동 중심 분수학습을 통해 분수 학업성취도의 변화를 본 결과는 다음과 같다. 분수의 개념, 분수의 덧셈, 분수의 뺄셈학습이 끝난 후 각각 분수 학업성취도 검사 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ을 실시한 결과 평균 90점 가까이 또는 그 이상의 높은 성취도를 보였다. 분수 이해력 검사결과를 상수준과 하수준으로 구분하여 분석한 결과, 수준 간 차이도 줄어들었음을 확인할 수 있다.

마지막으로 수학적 태도 변화를 알아보기 위해서는 수업이 시작되기 전에 실시한 수학적 태도 사전검사와 6주간에 걸친 15차시의 수업 후 실시한 사후 검사 결과를 두 종속표본 t검정으로 유의수준 .01에서 실시하였다. 그 결과 사전･사후 수학적 태도가 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 이는 다양한 표상활동 중심의 수업이 수학적 태도에 긍정적인 영향을 미쳤음을 알 수 있다. 학습수준과 수학적 태도 변화와의 관계를

파악하고자 수학적 태도의 하위 요인별 점수를 수준별로 구분하여 살펴본 결과, 상수준은 자기통제 측면에서, 중수준은 흥미도에서, 하수준은 수학적 태도 6가지 요소 중 4가지 요소(학습지향성, 불안, 가치인식, 자신감)에서 가장 큰 영향을 받았음을 알 수 있다. 수준에 관계없이 사전보다 사후에 실시한 수학적 태도 검사에서 6가지 하위 요인 모두 증가하여 긍정적인 변화가 있었으며, 수준별로 보았을 때는 하수준의 학생들이 큰 변화를 보인 것으로 해석할 수 있다. 수학적 태도를 구성하는 하위 요인별 사전·사후 검사에서 차이가 큰 영역을 분석해 본 결과 불안감, 흥미, 학습지향성, 자기통제 및 자신감, 가치인식 순이었다. 수학적 태도 사후검사에서 모든 영역이 향상되었지만, 수학에 대한 불안감을 낮추는데 효과적이었다고 판단할 수 있었다.

결론적으로 다양한 표상활동 중심의 수학학습은 학생들의 관계적 이해와 분수 학업성취도를 향상시켜주고, 학생들의 학습지향성, 자기통제, 흥미, 가치인식, 자신감을 높이며, 불안감을 감소시키는 등의 수학적 태도면에서도 긍정적 영향을 미친다고 설명할 수 있다.

Piaget의 아동발달 4단계 이론에 비추어보면, 본 연구의 대상은 구체적 조작기에 해당된다. 이 시기의 아동들은 구체적 활동과 무관한 형식적이고 논리적인 조작은 어렵기 때문에 구체물을 사용한 조작활동을 통해 개념을 이해하는 과정이 필요하다. 학생들의 발달단계를 고려해 보았을 때, 구체적 조작을 통한 활동이 필요함에도 불구하고 실제 교육현장에서 활용되고 있는 교과서에는 활동적 표상단계가 제시되어 있지 않았다. 따라서 본 연구에서는 활동적 표상활동에서부터 직접 체험한 과정을 그림으로 표현하는 영상적 표상단계와 이를 추상적인 기호로 나타내는 상징적 표상단계로 이어지도록 수업을 적용하였다. 학생들의 발달수준을 고려하여 활동적, 영상적, 상징적 표상단계를 거쳐 개념·원리를 알아가도록 수업한 결과, 학생들은 개념·원리에 대한 관계적 이해도가 높아졌으며, 관계적 이해에 도달함에 따라 분수 이해력도 같이 상승하게 되었다. 학생들은 직접적인 조작활동을 통한 학습에 흥미를 느끼고, 개념·원리를 이해하는데 도움이 되었기 때문에 수학에 대한 자신감이 생기는 등 수학적 태도에도 긍정적인 변화가 있었다. 본 연구에서 살펴본 바와 같이 다양한 표상활동이 수학적 개념·원리를 이해하는데 의의가 있으므로 학교 현장에서 학생들의 이해수준에 적합한 다양한 표상활동을 적용한 수업이 이루어지도록 지속적인 노력이 필요하다.

본 연구의 결과를 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 다양한 표상활동 중심의 분수학습이 분수의 개념이해와 분수의 덧셈, 뺄셈과 같은 연산의 의미 및 원리 이해에 효과적이었기 때문에 분수의 다른 영역에도 적용할 필요가 있다. 여러 연구(김선영, 2003; 김춘화, 2004; 최영주, 2005)에서 밝혔듯이 분수의 곱셈, 나눗셈에서 많은 학생들이 오개념을 가지고 다양한 오류를 보이고 있다. 따라서 개념·원리 이해가 심화되는 고학년 분수학습에 적용할 수 있는 다양한 표상활동 프로그램이 개발될 필요가 있다.

둘째, Bruner의 EIS이론을 적용한 수업은 중·고등학교 학생들을 대상으로 음악, 수학 교과에 대한 연구는 많으나 초등학교에서의 연구는 부족한 실정이다. 따라서 분수학습 외에도 학년별, 영역별로 개념·원리를 파악하는 학습내용에 대해 구체적인 조작활동과 추상적 기호 간의 연계를 통해 개념·원리에 대한 이해를 높일 수 있는 다양한 활동들이 고안되어야 한다.

셋째, 다양한 표상활동을 중심으로 한 수업 외에 관계적 이해를 높일 수 있는 교수·학습 방법에 대한 추후 연구가 필요하다. 관계적 이해를 하면 개념·원리를 잊어버렸더라도 다시 회상해 낼 수 있는 장점이 있으며, 근본적인 이해를 통해 학업성취도 또한 높일 수 있는 방법이다. 따라서 이해를 높이는 다양한 방안들이 연구된다면 수학학습에 긍정적인 방향을 제시할 수 있을 것이다.

넷째, 실험연구에서 사전, 사후의 차이만을 비교하지 않고, 수업이 진행될수록 관계적 이해에 대한 변화 추이에 초점을 두어 분수 이해력과의 관련성을 분석하는 질적 연구가 이루어질 수 있을 것이다. 수업에서의 어떤 요소가 관계적 이해에 영향을 미치는지 시사점을 제시할 수 있을 것이다.

마지막으로 초등수학에서는 구체적인 조작단계에 있는 학생을 대상으로 하기 때문에 학생들의 발달수준에 맞

추어 이해를 높이는 방안을 지속적으로 연구할 필요가 있다. 따라서 학교 현장에서 수학적 개념이나 원리를 직접 다루어 볼 수 있는 수학 교구를 다양하게 개발하고 적용해보는 노력이 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

구광조・오병승・전평국 (1995). 수학학습심리학. 서울: 교우사.

Koo, G. J., Oh, B. S., & Jeon, P. K. (1995). *The psychology of mathematics for instruction.* Seoul: Kyowoo Sa.

구미종 (2002). 패턴 블록을 활용한 분수학습에서 초등학교 4학년 학생의 학업성취도 및 태도에 관한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

Koo, M. J. (2002). *A study on the achievement and attitude of elementary school 4th graders in fraction learning using pattern blocks.* Master's Thesis, Ewha Womans University.

권성룡 (1997). 측정활동을 통한 분수학습 프로그램의 효과에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

Kwon, S. R. (1997). *A study on the effect of the instructional program of fraction based on measuring activities.* Master's Thesis, Korea National University of Education.

김경희 (2007). 수학교과에서 관계적이해를 위한 소프트웨어활용에 관한연구. 조선대학교 교육대학원 석사학위논문.

Kim, K. H. (2007). *A study on software application for relational understanding in mathematics subject.* Master's Thesis, Chosun University.

김선영 (2003). 분수의 덧셈, 뺄셈에 대한 오류 유형 분석 및 효과적인 지도방안 연구. 국민대학교 교육대학원 석사학위논문.

Kim, S. Y. (2003). *The error type analysis against the addition and a subtraction of the fountain and effective map plan research.* Master's Thesis, Kookmin University.

김미영・백석윤 (2010). 분수 덧셈, 뺄셈에서 나타나는 인지적 장애 현상 분석. 한국초등수학교육학회지, 14(2), 241-262.

Kim, M. Y., & Paik, S. Y. (2010). An analysis on cognitive obstacles using addition and subtraction with fractions. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea,* 14(2), 241-262.

김영국 (2008). 수학적 표현의 교수학적 의의. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 47(2), 155-168.

Kim, Y. K. (2008). On the pedagogical significance of mathematical representations. *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education,* 47(2), 155-168.

김옥경 (1997). 초등학교 6학년 학생들의 분수 개념 이해 및 분수 수업 방안에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

Kim, O, K. (1997). *A study on conceptual understanding of fractions for 6th graders and instructional methods for fractions.* Master's Thesis, Korea National University of Education.

김용태・신봉숙・최대욱・이순희 (2005). 유추를 통한 분수 연산에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 19(4), 715-731.

Kim, Y. T., Shin, B. S., Choi, D. U., & Lee, S. H. (2005). A study on operations with fractions through analogy, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education,* 19(4), 715-731.

김정식 (2005). 초등학교 수학교과서에 나타난 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 분석. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

Kim, J. S. (2005). *An analysis of addition and subtraction of fractions in elementary mathematics textbooks.* Master's

Thesis, Seoul National University of Education.

노지선 (2005). Skemp의 관계적 이해를 도입한 고등학교 함수영역의 지도 방안 연구. 동국대학교 교육대학원 석사학위논문.

Noh, J. S. (2005). *A study on the measure to teach the function section of high school with Skemp's relational understanding.* Master's Thesis, Dongguk University.

명혜경 (2007). 초등학생의 수학적 능력 향상을 위한 과정중심 수학 쓰기 프로그램 개발. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

Myung, H. K. (2007). *The development of the progress based mathematics writing program for improving mathematical abilities in elementary school.* Master's Thesis, Ewha Womans University.

박성택 (2006). 수학 학습 심리와 교수-학습 전략. 서울: 경문사.

Park, S. T. (2006). *The psychology of learning mathematics and teaching and learning strategies.* Seoul: Kyungmoon Sa.

박정 · 정은영 · 김경희 · 한경혜 · 이서영 (2004). 수학, 과학 성취도 추이변화 국제비교 연구 -TIMSS 2003 결과 보고서. 한국교육과정평가원연구보고 RRE 2004-3-2.

Park, J., Jeong, E. Y., Kim, K. H., Han, K. H. & Lee, S. Y. (2004). Trends in International Mathematics and Science Study -TIMSS 2003 result report, *Research report of Korea Institute for Curriculum and Evalution* RRE 2004-3-2.

방정숙 · 이지영 (2009). 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 초등학교 수학과 교과용도서 분석. 한국초등수학교육학회지, 13(2), 285-304.

Bang, J. S., & Lee, J. Y. (2009). An analysis of the addition and subtraction of fractions in elementary mathematics instructional materials, *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea,* 13(2), 285-304.

신준식 (1996). 실제적 접근 방법에 의한 분수 교수-학습 지도에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

Shin, J. S. (1996). *A study on the teaching and learning of fraction based on the realistic approach.* Doctorial Dissertation, Korea National University of Education.

염석일 (2001). 현실적 수학교육론에 의한 분수지도에 관한 기초연구. 진주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

Yeom, S. I. (2001). A *study on the teaching of fractions based on realistic mathematics education.* Master's Thesis, Jinju National University of Education.

유현주 (1995). 분수개념의 교수현상학적 분석과 학습 지도 방향에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Yoo, H. J. (1995). *A study on ways of instructing and a phenomenological analysis on fraction concept.* Doctorial Dissertation, Seoul National University.

이종희 · 김수진 (2010). PISA 2003 결과에서 수학의 정의적 영역에 영향을 주는 변인 분석. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 12(2), 219-237.

Lee, C. H., & Kim, S. J. (2010). Analysis of affective factors on mathematics learning according to the results of PISA 2003. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics,* 12(2), 219-237.

이종희 · 김선희 · 김수진 · 김기연 · 김부미 · 윤수철 · 김윤민 (2011). 수학 학습에 대한 정의적 성취 검사 도구 개발 및 검증. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 50(2), 247-261.

Lee, C. H., Kim, S. H., Kim, S. J., Kim, K. Y., Kim, B. M., Yoon, S. C., & Kim, Y. M. (2011). Development and verification of an affective inventory in Mathematical Learning. *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education,* 50(2), 247-261.

조병윤 (1992). 분수계산오류의 효과적인 교정 지도방안. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

Joh, B. Y. (1992). *A study on effective teaching for the remedy of errors in fraction computation.* Master's Thesis, Korea National University of Education.

조지민・김수진・김미영・옥현진・임해미・손수경 (2012). 학업성취도 국제 비교 연구 결과에 기초한 우리나라 학생들의 정의적 성취 향상 지원 방안. 한국교육과정평가원 연구보고 CRE 2012-4.

Joh, J. M., Kim, S. J., Kim, M. Y., Ok, H. J. Lim, H. M., & Sohn, S. K. (2012). Supportive way for improving affective achievement of Korean student based on the results of achievement international comparison. *Research report of Korea Institute for Curriculum and Evalution* CRE 2012-4.

추은영 (2003). 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 오류와 원인 분석. 춘천교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

Chu, E. Y. (2003). *An analysis on the errors and their causes in addition and subtraction of fraction with different denominator.* Master's Thesis, Chuncheon National University of Education.

최승현・구자옥・김주훈・박상욱・오은순・김재우 (2013). PISA와 TIMSS 결과에 기반한 우리나라 학생의 정의적 특성 함양 방안. 한국교육과정평가원연구보고 RRE 2013-8.

Choi, S. H., Koo, J. O., Kim, J. H., Park, S. W., Oh, E. S., & Kim, J. W. (2013). Improvable way of affective characteristic for Korean student based on the results of PISA and TIMSS. *Research report of Korea Institute for Curriculum and Evalution* RRE 2013-8.

최창우 (2006). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.

Choi, C. W. (2006). *Understanding of elementary mathematics education.* Seoul: Kyungmoon Sa.

현동희 (2000). 초등학교 수학 수업에서 패턴 블록의 활용 방안 연구. 인천교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

Hyun, D. H. (2000). A study on the method for using the pattern blocks in the mathematiocs class of elementary school. Master's Thesis, Incheon National University of Education.

홍은숙・강완 (2008). 분수 개념에 관한 초등학생의 비형식적 지식. 한국초등수학교육학회지, 12(1), 59-78.

Hong, E. S., & Kang, W. (2008). The informal knowledge of elementary school students about the concepts of fraction. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea,* 12(1), 59-78.

황민영 (2009). 중학교 1학년 학생의 관계적 이해와 도구적 이해에 기초한 평면도형의 성질 지도 방안 연구. 아주대학교 대학원 석사학위논문.

Hwang, M. Y. (2009). *A study on the plane figure teaching based on relational understanding and instrumental understanding of 1st grade middle school students.* Master's Thesis, Ajou University.

Armstrong, B. E., & Bezuk, N. (1995). Multiplication and division of fractions: The search for meaning, In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (p. 85-119). New York, NY: State University of New York Press.

Behr, M. J., & Post, T. R (1992). Teaching rational number and decimal concepts, In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in Grades K-8 : Research-based methods* (pp. 201-248). Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.

Bezuk, N., & Bieck, M. (1992). Current research on rational numbers and common fractions: Summary and implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grade mathematics* (pp. 118-136). NY: Macmillan Publishing Company.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? In P. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* - 1989 yearbook (pp.156-167). Reston, VA: NCTM.

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, *19*, 1-15.

Connell, M. L., & Peck, D. M. (1993). Report of a conceptual change intervention in elementary mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 329-350.

Cramer, K., Post, T., & DelMas, R. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula with the Effects of Using the Rational

Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(2), 111-144.
Freudental, H. (1983). *Fractions, didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
Hiebert, J., & Behr, M. (1988). Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 1-18). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Kouba, V., Zawojewski, J., & Strutchens, M. (1997). What do students know about numbers and operations? In P. A. Kenney & E. A. Silver (Eds.), *Results from the sixth mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 87-140). Reston, VA: NCTM.
Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Moore, R. C. (1994). Making transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 249-266.
Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147.
Skemp, R. R. (1987). *Psychology of learning mathematics*. 황우형 역(2000). 수학학습 심리학. 서울: 사이언스북스.
Streefland, L. (1982). Subtracting fractions with different denominators. *Educational Studies in Mathematics*, *13*, 233-255.
Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1982). Interpretations of rational number concepts. In L. Silvey & J. Smart (Eds.), *Mathematics for Grades 5-9*, 1982 NCTM Yearbook (pp. 59-72). Reston, VA: NCTM.
Vinner, S. (1991). The role of definition in teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
Watson, J. M., Campbell, K. J., & Collis, K. F. (1993). Multimodal functioning in understanding fractions. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 45-62.

The Effect of the Fraction Comprehension and Mathematical Attitude in Fraction Learning Centered on Various Representation Activities

Ahn, Ji Sun
Bondong Elementary School
E-mail : soar0202@hanmail.net

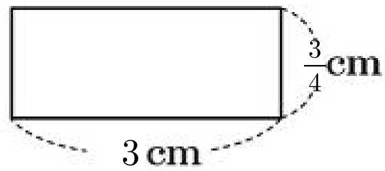
Kim, Min Kyeong†
Ewha Womans University
E-mail : mkkim@ewha.ac.kr

A goal of this study is figuring out how fraction learning centered on various representation activities influences the fraction comprehension and mathematical attitudes. The study focused on 33 4th-grade students of B elementary school in Seoul. In the study, 15 fraction learning classes comprising enactive, iconic, and symbolic representations took place over 6 weeks. After the classes, the ratio of the students who achieved relational understanding increased and the students averagely recorded 90 pt or more on the fraction comprehension test Ⅰ, Ⅱ and Ⅲ. Two-dependent samples t-test was conducted to analyze a significant difference in mathematical attitudes between pre-test and post-test. On the test result, there was the meaningful difference with 0.01 level of significance. To conclude, the fraction learning centered on various representation activities improves students' relational understanding and fraction understanding. In addition, the fraction learning centered on various representation activities gives positive influences on mathematical attitudes since it increases learning orientation, self-control, interests, value cognition, and self-confidence of the students and decreases fears of the students.

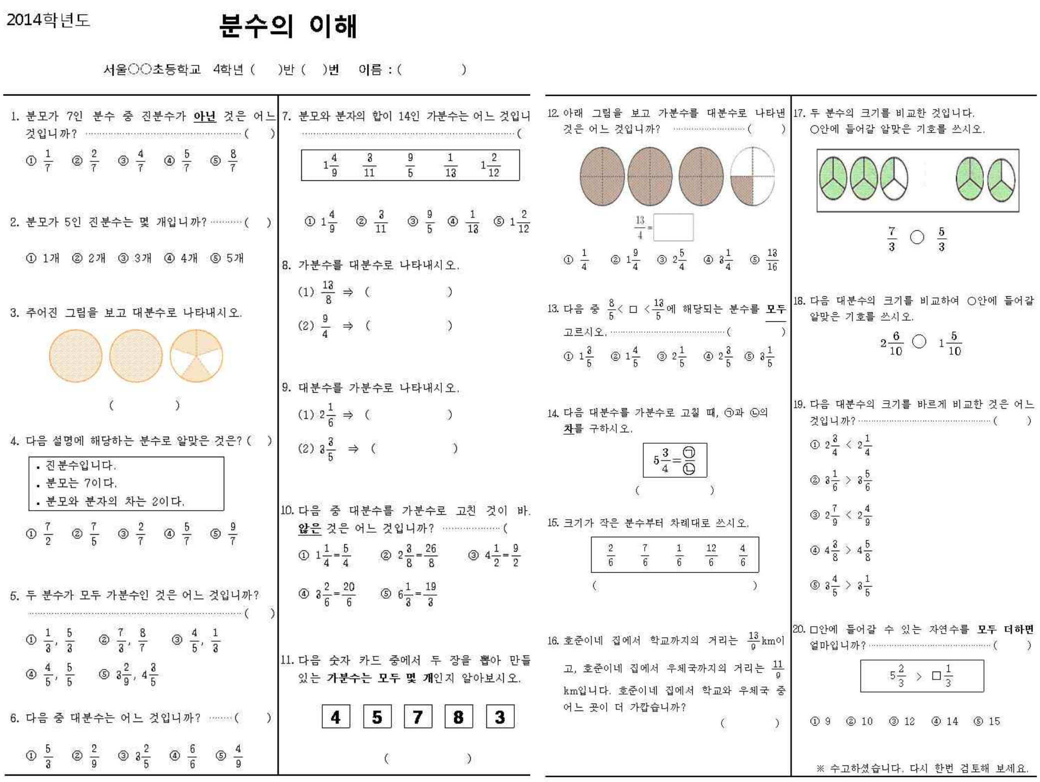
* ZDM Classification : C32
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : relational understanding, representation, EIS theory, fraction comprehension
† corresponding author

<부록 1> 관계적 이해 평가 문항

차시	주제	평가 문항
1	분수와 진분수 알기	◈ 진분수에 해당되는 분수를 3가지 쓰고, 그림을 그리며 진분수인 이유를 설명해 보시오.
2	가분수와 대분수 알기	◈ 가분수의 예를 그림으로 나타내고, 가분수인 이유를 설명해 보시오. ◈ 대분수의 예를 그림으로 나타내고, 대분수인 이유를 설명해 보시오.
3	대분수를 가분수로 나타내기	◈ 대분수 $2\frac{3}{4}$을 가분수로 나타내려고 합니다. 대분수를 가분수로 바꾸는 과정을 그림과 함께 글로 설명해 보세요.
4	가분수를 대분수로 나타내기	◈ 가분수 $\frac{9}{4}$를 대분수로 나타내려고 합니다. 가분수를 대분수로 바꾸는 과정을 그림과 함께 글로 설명해 보세요.
5	분수의 크기 비교(1)	◈ $\frac{7}{4}$과 $\frac{6}{4}$의 크기를 비교하고자 합니다. 어떤 분수가 더 큰지 그림과 함께 글로 설명해 보세요.
6	분수의 크기 비교(2)	◈ 지원이네 가족은 피자 $2\frac{1}{8}$판을 시켜먹고, 찬우네 가족은 $1\frac{2}{8}$판을 시켜먹었다면, 누가 더 많이 시켜먹었는지 그림을 그리면서 설명하세요. 대분수의 크기를 비교하는 방법이 드러나게 설명해 보세요.
7	진분수의 덧셈(1)	◈ 현수는 조각 퍼즐 전체의 $\frac{2}{6}$, 준영이는 $\frac{3}{6}$을 맞추었습니다. 현수와 준영이가 맞춘 조각퍼즐의 합은 얼마입니까? 풀이과정을 그림으로 나타내고, 식과 답을 적으세요.
8	대분수의 덧셈	◈ 카네이션 만들기를 하는데 빨간 색종이 $2\frac{1}{4}$장, 초록색 색종이 $1\frac{2}{4}$장이 필요합니다. 카네이션 한 송이를 만드는데 필요한 색종이는 모두 몇 장입니까? 풀이과정을 그림으로 나타내고, 식과 답을 적으세요.
9	진분수의 덧셈(2)	◈ 민기는 딸기우유를 $\frac{4}{5}$컵 마시고, 형은 초코우유를 $\frac{3}{5}$컵 마셨습니다. 민기와 형이 마신 우유의 양은 얼마입니까? 풀이과정을 그림으로 나타내고, 식과 답을 적으세요.
10	대분수와 진분수의 덧셈	◈ 현장학습체험으로 감자캐기를 하였습니다. 현진이는 감자를 $3\frac{2}{5}$kg을 캐고, 성현이는 현진이보다 $\frac{4}{5}$kg 더 캤습니다. 성현이가 캔 감자는 몇 kg입니까? 풀이과정을 그림으로 설명하고, 식과 답을 적으세요.
11	진분수의 뺄셈	◈ 철사 $\frac{5}{9}$m 중에서 $\frac{3}{9}$m를 잘라 사용하였다면, 남은 철사의 길이는 몇 m 입니까? 풀이과정을 그림으로 나타내고, 식과 답을 적으세요.
12	대분수의 뺄셈(1)	◈ 지수는 오늘 하루 동안 $2\frac{3}{5}$L의 물을 마셨고, 예림이는 오늘 하루 동안 $1\frac{2}{5}$L의 물을 마셨습니다. 누가 얼만큼 더 많은 물을 마셨습니까? 풀이과정을 그림으로 설명하고, 식과 답을 적으세요.
13	자연수와 진분수의 뺄셈	◈ 다음 사각형의 가로와 세로의 길이 중 어느 것이 몇cm 더 긴가요? 풀이과정을 그림으로 나타내고, 식과 답을 적으세요.

		
14	대분수와 진분수의 뺄셈	◈ 민주는 한 시간 동안 $2\frac{1}{5}$ km를 걸었고, 현우는 $\frac{4}{5}$ km를 걸었습니다. 누가 얼만큼 더 많이 걸었습니까? 풀이과정을 그림으로 설명하고, 식과 답을 적으세요.
15	대분수의 뺄셈(2)	◈ 현준이는 빵을 $3\frac{1}{4}$ 만큼 샀는데, 성희에게 $1\frac{3}{4}$을 주었습니다. 현준이에게 남은 빵의 양은 얼마입니까? 풀이과정을 그림으로 설명하고, 식과 답을 적으세요.

<부록 2> 분수 이해력 검사지 Ⅰ



2014학년도

분수의 이해

서울○○초등학교 4학년 ( )반 ( )번 이름 : ( )

1. 분모가 7인 분수 중 진분수가 **아닌** 것은 어느 것입니까? ( )
① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{8}{7}$

2. 분모가 5인 진분수는 몇 개입니까? ( )
① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

3. 주어진 그림을 보고 대분수로 나타내시오.
( )

4. 다음 설명에 해당하는 분수로 알맞은 것은? ( )
- 진분수입니다.
- 분모는 7이다.
- 분모와 분자의 차는 2이다.

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{9}{7}$

5. 두 분수가 모두 가분수인 것은 어느 것입니까? ( )
① $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}$ ② $\frac{7}{3}, \frac{8}{7}$ ③ $\frac{4}{5}, \frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{5}, \frac{5}{5}$ ⑤ $3\frac{2}{9}, 4\frac{3}{5}$

6. 다음 중 대분수는 어느 것입니까? ( )
① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $3\frac{2}{5}$ ④ $\frac{6}{6}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

7. 분모와 분자의 합이 14인 가분수는 어느 것입니까? (
$1\frac{4}{9}$ $\frac{3}{11}$ $\frac{9}{5}$ $\frac{1}{13}$ $1\frac{2}{12}$
① $1\frac{4}{9}$ ② $\frac{3}{11}$ ③ $\frac{9}{5}$ ④ $\frac{1}{13}$ ⑤ $1\frac{2}{12}$

8. 가분수를 대분수로 나타내시오.
(1) $\frac{13}{8}$ ⇒ ( )
(2) $\frac{9}{4}$ ⇒ ( )

9. 대분수를 가분수로 나타내시오.
(1) $2\frac{1}{6}$ ⇒ ( )
(2) $3\frac{3}{5}$ ⇒ ( )

10. 다음 중 대분수를 가분수로 고친 것이 바르지 **않은** 것은 어느 것입니까? (
① $1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ ② $2\frac{3}{8}=\frac{26}{8}$ ③ $4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$
④ $3\frac{2}{6}=\frac{20}{6}$ ⑤ $6\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$

11. 다음 숫자 카드 중에서 두 장을 뽑아 만들 수 있는 **가분수는 모두 몇 개**인지 알아보시오.
4 5 7 8 3
( )

12. 아래 그림을 보고 가분수를 대분수로 나타낸 것은 어느 것입니까? ( )
$\frac{13}{4}=$ □
① $\frac{1}{4}$ ② $1\frac{9}{4}$ ③ $2\frac{5}{4}$ ④ $3\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{13}{16}$

13. 다음 중 $\frac{8}{5}<$ □ $<\frac{13}{5}$에 해당되는 분수를 **모두** 고르시오. ( )
① $1\frac{3}{5}$ ② $1\frac{4}{5}$ ③ $2\frac{1}{5}$ ④ $2\frac{3}{5}$ ⑤ $3\frac{1}{5}$

14. 다음 대분수를 가분수로 고칠 때, ㉠과 ㉡의 **차**를 구하시오.
$5\frac{3}{4}=\frac{㉠}{㉡}$
( )

15. 크기가 작은 분수부터 차례대로 쓰시오.
$\frac{2}{6}$ $\frac{7}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{12}{6}$ $\frac{4}{6}$
( )

16. 호준이네 집에서 학교까지의 거리는 $\frac{13}{9}$km이고, 호준이네 집에서 우체국까지의 거리는 $\frac{11}{9}$km입니다. 호준이네 집에서 학교와 우체국 중 어느 곳이 더 가깝습니까?
( )

17. 두 분수의 크기를 비교한 것입니다. ○안에 들어갈 알맞은 기호를 쓰시오.
$\frac{7}{3}$ ○ $\frac{5}{3}$

18. 다음 대분수의 크기를 비교하여 ○안에 들어갈 알맞은 기호를 쓰시오.
$2\frac{6}{10}$ ○ $1\frac{5}{10}$

19. 다음 대분수의 크기를 바르게 비교한 것은 어느 것입니까? ( )
① $2\frac{3}{4} < 2\frac{1}{4}$
② $3\frac{1}{6} > 3\frac{5}{6}$
③ $2\frac{7}{9} < 2\frac{4}{9}$
④ $4\frac{3}{8} > 4\frac{5}{8}$
⑤ $3\frac{4}{5} > 3\frac{1}{5}$

20. □안에 들어갈 수 있는 자연수를 **모두 더하면** 얼마입니까? ( )
$5\frac{2}{3} >$ □$\frac{1}{3}$
① 9 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 15

※ 수고하셨습니다. 다시 한번 검토해 보세요.