韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2015.29.2.157
제 29집 제 2호, 2015. 5. 157-196

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 29, No. 2, May. 2015. 157-196

중등 수학교과서가 다루는 수학사의 비판과 대안

박 제 남 (인하대학교)†
장 동 숙 (인하대학교 대학원)

본 논문의 목적은 중등 수학교과서에 기술되어 있는 수학사의 주요 문제점을 알아보고, 그리고 중등 수학교과서에 수학문화의 전이가 반영되어야함을 주장하는데 있다. 교과서에서 다루는 수학사는 기축시대와 고대 그리스에서 고대 이집트, 고 바빌로니아, 그리고 이슬람 수학을 제외한 유럽으로의 수학문화의 전이가 반영되어 있다. 우리는 이를 알아보고 수학사적 문제의 대안을 제시하였다.

Ⅰ. 도입

본 논문은 초등 수학교과서가 기술하는 수학사의 문제점과 그 보완 방안(박제남, 2014b)의 후속 연구이다.

최근 수학사를 활용한 교수·학습방법의 연구가 교사연수(정해남, 2012), 영재교육(한경혜, 2006), 그리고 다문화 관련 연구(정수용 외, 2014) 등에서 활발히 진행되고 있다. 한경혜(2006)는 1970년대 중반부터 수학교육에 활발하게 도입된 수학사의 의미가 논의된 측면을 다음 3가지로 제시하였다. 첫째, 학문 이론적 측면에서 보자면 수학교육의 근본적인 목표는 수학에 관한 균형잡힌 상(像)에 도달하는 것이며, 둘째, 교육 이론적 측면에서 보자면 우선 수학사에 대한 고찰은 수학뿐만이 아니라 문화적 배경에 대한 교육에도 일조하며, 셋째, 교수·학습 방법론적 측면에서 수학사 도입의 의의를 논할 수 있다는 것이다. 정수용 외(2014)는 교수·학습에서 수학사를 활용하는 방안을 내적 현안과 외적 현안으로 구분하여 이에 대한 필요성을 "수학이 인간의 발명품임을 이해할 수 있는 기회를 제공함과 동시에 수학이 가지고 있는 문화적 상대성과 다양성을 깨달아 가도록 기여해야 한다."로 제시하였다.

그러나 교사가 제시하는 수학사를 활용한 교수·학습방안은 교과서에 기술된 수학사의 내용에 의존할 수밖에 없으므로 우리가 먼저 생각해야 할 것은 "교과서 집필진이 수학사를 올바르게 기술하고 있는가?"이다. 이와 같은 입장에서 볼 때, 수학사는 크게 두 가지 측면을 고려하여 교과서에 기술되어야 한다. (1) 수학사의 사실적 기술 측면으로서 학계에서 보편적으로 통용되는 이론이 교과서에 반영되어야 한다. 즉, 교과서 집필진은 수학사 내용을 소개할 때, 복수의 대학수준 이상의 전문 서적이나 권위 있는 논문을 참고해야 하며 흥미위주의 청소년 도서나 인터넷 자료를 참고한다든지 오류가 있는 지난 교과서의 수학사 내용을 그대로 사용하는 일은 피해야 한다. (2) 수학사의 포괄적 기술 측면으로서 수학문화의 전이가 교과서에 편중 없이 반영되어야 한다. 환언하면, 고대 이집트, 고 바빌로니아에서 고대 그리스, 그리고 로마로 다시 이슬람에서 유럽으로 이루어진 수학문화의 전이가 교과서에 반영되어야 하며 특정 문명 중심으로 기술하는 것은 바람직하지 못하다.

교과서 내용과 관련된 수학사를 우리가 다양한 관련 전문서적이나 논문을 참고하여 객관적으로 기술하려 노력한다면 수학문화의 전이를 수학 교과서에 자연스럽게 반영할 수 있기 때문에 사실적 기술과 포괄적 기술의

* 접수일(2014년 12월 26일), 심사(수정)일(2015년 2월 17일), 게재확정일(2015년 3월 9일)
* ZDM 분류 : A33, A34, A32
* MSC2000 분류 : 97-01, 97-03, 97U20
* 주제어 : 수학사, 수학교육, 기축시대, 수학문화전이
† 교신저자: jnpark@inha.ac.kr

두 가지 측면을 서로 독립적으로 볼 수는 없다.

우리는 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 하에서 출간된 모든 중·고등학교 교과서(이하 중등 수학교과서)가 기술하는 수학사를 검토하여 문제가 있다고 판단한 내용을 '탈레스와 기하학', '피타고라스와 피타고라스 정리', '파르테논 신전과 황금비', '플라톤과 작도문제', '아르키메데스와 원주율', '디오판토스와 산술', '알콰리즈미와 이차방정식', '데카르트와 직교좌표', '네이피어와 로그', '뉴턴과 적분', '뉴턴과 사이클로이드', 그리고 '카르다노와 삼차방정식'으로 나누어 제3장에서 광범위한 자료를 바탕으로 알아보았으며 수학문화의 전이를 기반으로 하여 이집트, 바빌로니아, 이슬람, 그리고 중국 등에서 그 뿌리를 찾아 대안을 제시하였다. 수학문화 전이의 역할에서 보다 깊이 있는 중국과 인도의 수학사는 추후 연구로 미루도록 하겠다.

바빌로니아 역사에서 고 바빌로니아 기간(The Old Babylonian Period)은 기원전 2000년-기원전 1600년으로(V. Katz, 2007) 사용하고 고대 이집트 연대는 버낼(M. Bernal, 2012, p.767)의 이집트 연표를, 번역운동 기간 압바스 왕조 칼리프의 이름과 재위기간은 구타스(D. Gutas, 2013)의 연표를, 그리고 수학자들의 영문명과 생몰연대는 카즈(V. Katz, 2009)가 제시한 자료를 사용하였다.

Ⅱ. 기축시대(Axial Age)

야스퍼스(K. Jaspers, 1883-1969)가 부른 기축시대(axial age)란 인류의 정신적 발전에서 중심축을 이루는 시기로 기원전 6세기와 5세기에 불가사의한 삼투현상에 의해 동시대적인 문화적 약진이 있었으며 바로 그때 진정한 종교, 철학, 과학이 시작되었다는 것이다. 중국에서 공자와 노자가, 인도에서 부처가, 페르시아에서 조르아스터가 활동했고, 바빌로니아에서 유대교가 창시되었는데 그 중에서도 가장 중요한 것은 그리스의 기적(Greek miracle)으로 소크라테스, 플라톤, 아리스토텔레스에 의하여 이루어졌다(M. Bernal, 2012). 종교학자 암스트롱(K. Armstrong, 2010)은 서문에서 기축시대를 대략 기원전 900년부터 기원전 200년 사이로 언급하며 중국의 유교와 도교, 인도의 힌두교와 불교, 이스라엘의 유일신교, 그리고 그리스의 철학적 합리주의를 예로 들고 있다. 문학가 보나르(A. Bonnard, 2011b)는 탈레스의 등장에 대하여 "인류의 역사에서는 마치 폭발처럼 갑작스럽게 새로운 형태의 행동이나 사고가 나타나는 순간이 있다. 아시아 대륙에 위치한 그리스, 그러니까 이오니아에서 기원전 7세기 말 무렵에 탈레스와 그를 따르는 학파와 더불어 과학, 즉 합리적인 과학 지식이 출현한 것도 그런 식이었다."로 설명하며 수학자 벨잔(D. Veljan, 2000) 또한 피타고라스의 출현을 기축시대로 설명한다. 버낼은 그의 저서《블랙 아테나, 2》에서 광범위한 역사적 자료를 바탕으로 기축시대를 반박하는데 수학이나 과학에 대해서는 거의 다루지는 않는다. 그러나 블랙 아테나 저술 이후 버낼(M. Bernal, 1992)은 수학 이외에 의학과 천문학 등에서 고대 그리스에 대한 고대 이집트의 영향을 언급하며,《블랙 아테나 1, 2》와 버낼의 논문에 대한 팔터(R. Palter, 1993)의 비판을 재반박하면서 수학, 천문학, 의학, 그리고 피라미드학에 대한 그의 의견을 피력한다(M. Bernal, 1994). 우리는 수학에 대한 그의 의견을 3.2절에서 다룰 것이다.

수학문화에서 기축시대란 탈레스나 피타고라스의 출현을 설명하는 것으로 그들의 학문적 성취를 고대 이집트나 메소포타미아의 학문적 영향을 완전히 배제하고 자생적인 것으로 몰고 가 수학문화의 근원을 고대 그리스에 한정하는 것이다(박제남, 2014a; 2014b). 특히, 이집트 수학에 대한 폄하는 19세기와 20세기 초에 보편적이었던 아프리카인은 위대한 지적 성취가 가능하지 않다는 가정이 강화된 것과 무관하지 않다(M. Bernal, 1992 참고).

수학의 근원이 고대 이집트에 있다는 플라톤(Plato, 429-347 BCE), 아리스토텔레스(Aristotele, 384-322 BCE), 그리고 헤로도토스(Herodotus, 대략 484-425 BCE)의 주장을 알아보자. 플라톤은 기원전 370년에 쓴 대화록《Phaedrus》에서 수학의 근원을 이집트로 언급한다(Platon[3], 2011, 274d).

---

3) 역해 자는 주석(400)에서 플라톤이 전설을 자작(自作)했을 가능성이 높다고 소개한다(p.140). 1820년대 괴팅겐대학의 칼 오

> 소크라테스: (...) 이집트의 나우크라티스(Naucratis) 지방에는 옛 토착신들 가운데 어떤 신이 있었는데, 그 신은 사람들이 아이비스(Ibis)라고 부르는 성스러운 새의 주인이었다네. 그 신의 이름은 토트(Theuth)였지. 이 신이 맨 처음 수(number)와 계산법(calculation), 기하학, 천문학, 그리고 체커와 주사위게임을 발명했지, 그러나 이들 가운데 최고는 문자(letters)라네 (...)

또한 아리스토텔레스는 “수학은 이집트에서 탄생한 것” 또는 “기하학을 이집트 사제들이 이론적으로 발전시켰다.”고 주장하며 헤로도토스 등의 많은 고대 작가들이 이와 매우 유사한 내용을 언급한다(M. Bernal, 2011; A. Cajory, 1991; T. Heath, 1949). 그리스는 이집트로부터 기하학을 배웠다는 헤로도토스의 언급을 보자(Herodotos, 2012, Book II. 109).

> 사제들에 따르면 왕은 또 국토를 나누어 전 아이귑토스인들에게 같은 크기의 네모난 땅을 주고 해마다 소작료를 받아 세수를 충당했다. 받은 땅의 일부가 강물에 떠내려갔을 경우 당사자는 왕을 찾아가 신고했다. 그러면 왕이 조사관들을 파견해 할당된 땅이 얼마나 줄었는지 다시 측량하게 하여 땅이 준만큼 소작료를 줄여주었다. 내 생각에, 그런 연유로 기하학이 창안되어 헬라스로 수입된 것 같다. 해시계와 해시계의 바늘과 하루를 12부분으로 나누는 지식은 헬라스인들이 바빌론인들에게 배웠기에 하는 말이다.

이와 같이 다수의 고대 그리스 학자들이 주로 이집트만을 언급하는 이유는 기원전 2000년-기원전 1800년경의 바빌로니아의 기하, 대수, 천문학이 알렉산드로스 시대나 그 이후까지도 고대 그리스인들에게 대부분 알려지지 않았기 때문으로 보인다(T. Heath, 1949, p.195).

우리나라 중등 수학교과서에서 탈레스를 ‘닮음(비례)의 신’, ‘최초로 비례문제를 푼사람’, 또는 ‘최초의 수학자’ 등으로 그리고 피타고라스를 ‘피타고라스 정리를 처음으로 발견했다’ 또는 ‘피타고라스 정리를 처음으로 밝혔다’로 기술하는 것은 고대 이집트와 고 바빌로니아의 학문적 성취를 무시한 기축시대에 따른 서술로 보이는데 우리는 제3장 3.1과 3.2에서 다양한 자료를 바탕으로 이를 반박할 것이다.

Ⅲ. 중등 수학교과서가 다루는 수학사

초등 수학교과서와 마찬가지(박제남, 2014b)로 중등 수학교과서가 가지고 있는 수학사의 문제점은 오류와 편중으로 요약된다. 즉, (1) 교과서 필자들은 오류가 있는 일부 수학사를 새 교과서 개발과 관계없이 계속 차용하고 있다는 것이다. 몇 가지 예를 들면, ‘탈레스가 비례의 식을 최초로 발견했다’, ‘ 피타고라스가 피타고라스 정리를 최초로 발견 또는 증명했다’, ‘파르테논 신전의 전면은 황금비로 이루어져 있다’, ‘로마 장군 마르켈루스가 아르키메데스의 소원대로 원기둥에 구가 꼭 맞는 그림을 묘비에 새겨주었다’, ‘디오판토스가 자신의 묘비에 나이를 알 수 있도록 묘비에 기록해 두었다’, ‘데카르트가 천장의 파리를 보고 좌표를 도입하였다’ 또는 ‘뉴턴이 적분을 창안하였다’ 등의 내용들이 수학사의 정설로 우리나라 수학 교과서에 자리 잡고 있다. (2) 교과서 필자들은 수학문화의 전이를 무시하고 있다는 것이다. 즉, 고대 이집트, 고 바빌로니아, 그리고 이슬람 수학을 배제하고 고대 그리스에서 현대 유럽으로 수학문화의 전이를 다루고 있으며 기축시대의 영향으로 현대수학문명의 뿌리를 고대 그리스로 제한한다. 따라서 수학 내용과 관련된 (최초)수학자들은 고대 그리스인 및 유럽인들이다. 그러나 중등

트프리트 뮐러의 사료 비평(source criticism) 기법은 플라톤처럼 이집트에서 공부한 그리스인들이 남긴 기록을 터무니없는 소리로 공격하는데 이용되기 시작했다(M. Bernal, 2011, p.612-613)

수학의 내용은 주로 방정식, 기하, 미적분이 주류이며 이와 같은 분야의 일부 또는 대부분은 고대 이집트, 고 바빌로니아, 인도, 그리고 이슬람 수학 덕분이다.

3.1 탈레스(Thales, 624-547 BCE)와 기하학

탈레스나 피타고라스(Pythagoras, 573-497 BCE)처럼 이집트를 방문하여 문화적 영감을 얻은 대표적인 학자로 호메로스(Homer, 기원전 9세기 경), 솔론(Solon, 630-560 BCE), 헤로도토스(Herodotus, 대략 484-425 BCE), 플라톤(Plato, 429-347 BCE), 그리고 데모크리투스(Democritus, 460-370 BCE) 등을 예로 들 수 있다. 기원전 7세기경부터 이미 수많은 그리스 유명 인사들이 이집트를 찾았고 고색창연한 이집트 문화에 깊은 감명을 받았다(W. Durant, 2011; Van De Mieroop, 2011). 특히 탈레스와 비슷한 시기에 활동한 입법가 솔론은 당시 이집트 파라오 아메스 2세(Ahmose II, 재위기간: 570-526 BCE)가 공포한 법령: "이집트인들은 저마다 자신의 수입을 매년 주 장관에게 신고해야 한다. 신고하지 않거나 정당한 수입임을 입증할 수 없는 자는 사형에 처한다."를 이집트에서 가져다가 아테나이인들에게 시행했다(Herodotos, 2012, p.267).

탈레스의 일식예측에 대하여 헤로도토스(Herodotos, 2012, I. 74)는 장소만 언급하지만 플리니(Pliny, 1967)는 77~79년에 편찬한 저서《자연사(Natural history)》(Book II, p.203)에서 탈레스가 예측한 천문현상은 기원전 585년에 알뤼아테스(Alyattes)왕의 통치지역에서 일어난 일식이었다고 기록한다. 현대 계산에 의하면 기원전 585년 5월 28일에 소아시아에서 일식이 일어났으며 뤼디아인들과 메데스인들이 전쟁을 한 지역에 해당된다. 탈레스가 일식을 예측했다는 주장은 19세기부터 커다란 논란의 대상인데 1864년에 마틴(T. Martin)이나 노이게바우어(O. Neugebauer, 1957, p.142)는 단호하게 탈레스의 예측을 아낙사고라스의 떨어지는 운석의 이야기 보다 더 이상 믿을 수 없는 것으로 주장했으며, 히스(T. Heath, 1981a)는 그의 천문학 지식의 한계를 "바빌로니아인들이 수 세기의 관측을 통해 일식의 주기를 $6,585\frac{1}{3}$일로 사용한 것을 탈레스도 분명히 알았지만 지구를 물 위에 떠있는 통나무 같은 원판으로 알고 있었기 때문에 그는 월식을 설명할 수 없었다."고 주장한다.

최근 학자들은 탈레스의 예측의 가능성을 찾으려 노력하고 있다. 판체코(D. Panchenko, 1994)가 탈레스가 일식현상을 관찰한 때를 기원전 582년 9월 21일 또는 기원전 581년 3월 16일로 제시한 것을 Stephenson·Fatoohi(1997)는 소아시아의 현상을 바탕으로 동일 학술지에 기원전 585년 5월 28일로 수정 제시한다. 일식이 발생한 시기를 기원전 585년 5월 28일로 제시한 가장 최근의 논문(D. Couprie, 2004)에 대하여 케르헤타(M. Querejeta, 2011)는 "논문의 주장에 대한 타당성을 확신하지만 탈레스가 주기기법(cyclic mechanism)을 사용하지 않았다면 그의 예측을 과학적으로 여길 수 없다."라는 단서를 달고 있다.

탈레스는 수학자, 천문학자 그 밖에도 상인, 공학자, 정치가, 철학자, 과학자 등으로 소개되며(Herodotos, 2012; Aristoteles, 2009; Platon, 2013), 탈레스처럼 그리스인이 여러 직업을 갖는 것을 키토(H. Kitto, 2004)는 "사물을 전체적으로 파악하는 감각이야말로 그리스 정신의 가장 전형적인 특징일 것이며, 그것은 또한 많은 그리스인이 동시에 여러 업무를 담당하는 생활태도이기도 하다."로 설명한다. 후기 철학자나 철학사가에 의하여 인용되고 있는 그의 업적은 이집트와 바빌로니아의 영향을 받은 것이 확실하며, 이정우(2014)가 말하듯이 이오니아의 밀레토스 출신으로서 이집트를 방문해 수학, 천문학 등을 배웠고, 당대 사람들에게 신기하게 비친 몇 가지 업적으로 유명했고 정치적·문화적으로도 존경받은 인물이었음을 알 수 있다. 러시아 과학 아카데미 철학연구소(2008)는 "(자연)철학자로서 탈레스는 이집트인으로부터 물을 만물의 근원 또는 원리로 생각하도록 배웠던 것"으로 보고 있다.

삼각형의 닮음비와 도형의 닮음은 "중학교 수학②"에서 다룬다. 류희찬 외(2013b)는 "탈레스에게 비례(닮음)의 신이라는 별명이 붙여졌다."고 기술하고, 김원경 외(2012)는 "탈레스가 피라미드를 직접 재지 않고도 알아 맞혀

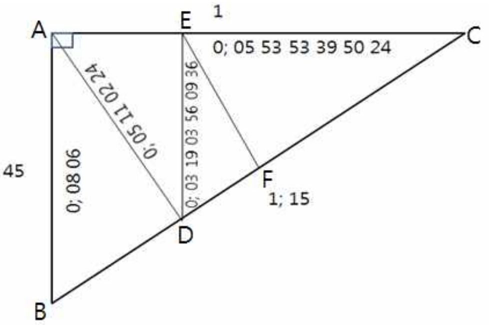
이집트 왕을 놀라게 했다.”로 소개하고 있다.

류희찬 외(2013b)가 소개하는 것과 같이 ‘비례(닮음)의 신’ 또는 “비례의 식을 최초로 발견했다.” 등의 표현은 김용운(1975, p.36-37)의 영향으로 보이며, 참고로 초등수학 6학년 교과서 비례식에서 탈레스를 ‘비례의 신’으로 표현했으나(2007 개정, 수학 6-1, 익힘책) ‘2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정’의 새 교과서는 비례식과 비례배분(5~6학년군)에서 더 이상 탈레스를 다루지 않는다.

김원경 외(2012)가 소개한 내용의 출처는 국내 서적으로 김용운(1975, p.37), 그리고 김용운・김용국(1985, p.45)이며 다시, 이에 대한 출처는 국외 서적으로 1893년에 초판으로 나온 카조리(F. Cajori, 1991)로 추정된다. 카조리(F. Cajori, 1991)는 탈레스가 이집트 사제로부터 수학과 과학을 배웠으며 플르타르코스(Plutarch, 46-120)의 주장을 인용하여 아마시스(Amasis)왕이 탈레스가 그림자로부터 피라미드의 높이를 잰 것에 대하여 놀랐다고 기술하고 있지만 김용운(1975, p.37)이 언급한 “비례의 문제를 생각해서 비례식을 푼 처음의 사람”은 기술하지 않는다. 여기서 아마시스왕은 아메스 2세(Ahomes II, 재위기간: 570-526 BCE)이다. 2세기 로마 역사가 플르타르코스의 주장은 지어낸 듯한 느낌이 드는데 기원전 8세기가 끝나갈 무렵 그리스에는 화폐가 도입되면서 자영농들이 서서히 노예로 전락하였고(A. Bonnard, 2011a), 프삼테크 1세(Psamtek I, 재위기간: 664-610 BCE) 때, 이집트가 앗시리아로부터 독립하는 과정에서 이오니아, 키리아, 리디아 출신을 용병으로 고용하였다(손주영・송경근, 2011). 아메스 2세의 치세에 와서 이집트는 최대의 번영을 누려 사람이 사는 도시가 2만 개나 되었고, 아메스 2세는 이집트에 정착하기를 원하는 그리스인들에게 나일강 삼각주에 위치한 나우크라티스(Naucratis) 시를 무역을 위한 집단 거주지로 내주었다(Herodotos, 2012, II, 177, 178; Van De Mieroop, 2011, p.297). 더욱이 손주영・송경근(2011)에 따르면 이때까지만 해도 이집트인들은 그리스인들을 유치하고 미개한 속물로 여겼다고 한다. 솔론이 6세기 초 당시 이집트 수도였던 사이스(Sais)를 방문했을 때, 그를 친족으로 대접한 사이스인의 도움으로 원로 사제와 이야기를 나누는 기회까지 얻을 수 있었는데, 그 자리에서 한 이집트 사제가 대체로 그리스 역사에 무지한 그리스인에 대하여 솔론을 나무라는 내용을 보자 (Platon, 2000, 22b).

> 아. 솔론, 솔론! 당신들 헬라스인들은 언제나 아이들이고, 연로한 헬라스인이라곤 없구려, (...) 당신들은 모두가 마음이 어리다오. 당신들은 옛날의 전설로 인한 오래된 소신도, 연륜이 오랜 학식도 자신들의 마음속에 전혀 지니고 있지 못하기 때문이오.

이와 같은 시대상황에서 전 이집트를 장악한 사이스(Sais)왕조 파라오 아메스 2세와 상인인 탈레스가 만났다고 보기에는 어려움이 있다고 판단된다. 또한, 우정호 외(2012a)는 삼각형의 닮음의 예를 “(...) 아메스 파피루스에는 밑면이 직사각형 모양인 피라미드를 건축할 때, 옆면의 경사도가 일정하게 유지되도록 하려면 어떤 조건이 필요한가? 라는 문제가 있다.”를 기술하고 있는데, 이 문제는 《아메스 파피루스(A’h-mosè papyrus)》에 존재하지 않는다. 기록에 의하면 삼각형의 닮음비의 사용은 기원전 1800년경으로 올라간다(V. Katz, 2007; J. Høyrup, 2002). 점토판 IM 55357([그림 Ⅲ-1])은 기원전 1800년경에 사용된 것으로 추정되며 수학내용은 16단계로 나누어진다. $\triangle ABC$ 는 직각삼각형으로 $AC=1$, $AB=0;45 = 45/60 = 3/4$, 그리고 $BC=1;15 = 1 + 15/60 = 5/4$이고 내부에서 만들어진 것들도 직각삼각형으로 $\triangle ABD$ 와 $\triangle ABC$, 그리고



[그림 Ⅲ-1] 점토판 IM 55357

$\triangle ADE$ 와 $\triangle ADC$ 등에서 닮음 삼각형의 성질이 쓰이고 있다(J. Høyrup, 2002, p.231-233).

나일강 근처에는 지금도 거대한 피라미드가 35개나 남아 있으며 기자(Giza)에는 3개의 대 피라미드(the great pyramids)가 있고 탈레스가 여러 피라미드의 높이를 쟀다는 전설은 두 가지가 존재한다(J. Suzuki, 2002; H. Eves, 1983). 전해 내려오는 전설이 사실이라면 탈레스는 고대 이집트나 고 바빌론에서 배운 닮음의 성질을 피라미드의 높이 측정에 응용한 것으로 보는 것이 타당하다. 이를 위하여 탈레스보다 1200여 년 전에 고대 이집트인들이 다룬 기울기 문제를 알아보자. 고대 이집트인은 'seked(코탄젠트)'를 기울기로 사용하였으며(Chace, 1979; Robins·Shute, 1987) 아메스는 seked를 문제 56-60번에서 다루고 있다(Chace, 1979).

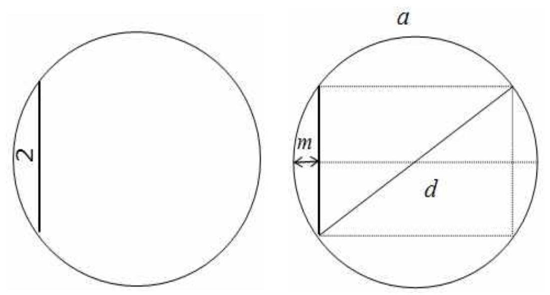
- 문제 56번: 코탄젠트 값이 18/25 seked(=54.25°)로 다흐슈르(Dakshur)에 있는 스네페루(Sneferu, 제4왕조의 시작, 기원전 2900년경)의 벤트 피라미드의 하부 기울기와 아메넴하트 3세(Amenemhet III, 재위기간: 1859-1814 BCE)의 피라미드의 기울기와 매우 가깝다.
- 문제 57-59번: 코탄젠트 값이 3/4 seked(=53.13°)로 기자의 케프렌(Chephren, 제4왕조 4번째 파라오)의 대 피라미드의 기울기와 가깝다. 그 이유는 $\cot\theta = \dfrac{(1/2)(140)}{(\text{높이})} = \dfrac{1}{7}\left(5\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$ (여기서 1 cubit = 7 plams). 따라서 피라미드의 높이 h 는 $\dfrac{280}{3} = 93\dfrac{1}{3}$ (cubit)이다. 59B는 59번의 역을 묻는 문제이다.
- 문제 60번: 코탄젠트 값이 1/4 seked(=75.96°)로 Meidum 피라미드(제3, 4왕조 시대)의 기울기와 매우 유사하다(T. Heath, 1981a, p.128; K. Mendelssohn, 1974; C. Rossi, 2003; L. Miatello, 2005).

로시는 seked을 사용하여 많은 피라미드의 기하적 분석을 14쪽의 양으로 제시하고 있다(C. Rossi, 2003, p.243-256). 중등수학에서 다루는 '원의 2등분'이나 '원주각' 등의 관련 내용을 탈레스가 최초로 알고 증명했을까? 이를 알아보기 위하여 탈레스가 가지고 있는 각의 인식부터 살펴보자. 히스(T. Heath, 1981a)는 "이집트인들이 피라미드 면의 기울기나 닮음을 결정하기 위하여 사용한 기울기 seked(코탄젠트)와 같은 어떤 꼴의 형태로 각을 이해하고 있었을 뿐 우리가 지금 사용하고 있는 것으로 이해하고 있지는 않았다."고 주장한다. 현재 우리가 사용하고 있는 360° 기반의 각도(degree)는 기원전 5세기 초 바빌로니아인들이 도입한 것이다(Van Brummelen, 2009; O. Neugebauer, 1957; 박제남, 2014b).

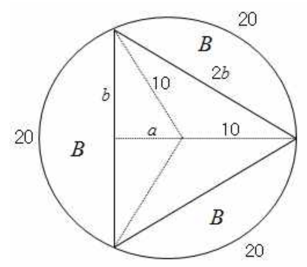
이집트를 방문하여 기하학을 공부한 탈레스가 증명했다고 Proclus, Eudemus, Pamphila 등의 역사가나 철학사가들로부터 전해지는 정리는 모두 6개로 유클리드(Euclid, 4세기 BCE)의 《원론(The elements)》에서 찾아볼 수 있다(Euclid, 1956, Book I(Definition 17, Proposition 5, Proposition 15, Proposition 26), Book III(Proposition 31), Book VI(Proposition 4)). 탈레스의 증명에 대한 현존하는 기록은 없으며 그 추측만 있을 뿐인데 이미 이집트인들은 6개의 정리를 모두 알고 있었던 것으로 보인다(D. Burton, 2007; T. Heath, 1981a).

먼저 원의 2등분에 대하여 알아보자. 동일한 간격으로 원을 2, 4, 또는 6개의 지름으로 나눈 것을 여러 유적에서 발견할 수 있으며, 이를 통하여 이집트인들은 지름이 원을 이등분한다는 것을 알고 있었다고 여겨진다(T. Heath, 1981a, Dahan-Dalmedico·Peiffer, 2010). 한편, 유클리드(Euclid, 1957)는 이를 증명하지 않고 Book I에서 정의 17로 서술하고 있기 때문에 탈레스가 지름이 원을 2등분한다는 것을 증명했다고 보기에는 어려움이 따른다.

이어서 반원의 원주각이 직각이라는 성질의 출처는 어디인지 그리고 탈레스는 이를 증명했는지 알아보자. 고 바빌로니아인들은 중심각이 원주각의 두 배라는 것을 탈레스보다 이미 1400여 년 전에 알고 있었다(H. Eves, 1990).

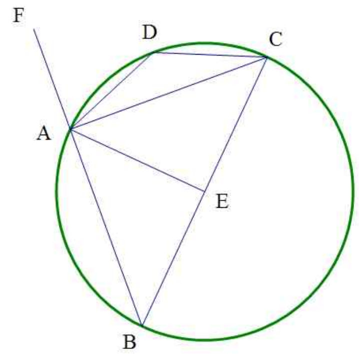


[그림 III-2] 점토판 BM 85194



[그림 III-3] 점토판 MS 3051

고 바빌로니아 시대에 사용된 것으로 알려진 점토판 BM 85194([그림 Ⅲ-2])는 1900년에 노이게바우어와 뚜레우-당긴(Thureau-Dangin)에 의하여 판독되었으며 주제별로 35개의 문제가 수록되어 있고 이 중 20번은 반원의 원주각이 직각인 성질을 이용하여 지름이 20이고 둘레가 60인 원[4]으로부터의 거리가 2인 현의 길이를 구하는 문제이다(V. Katz, 2007, p.130-137). 점토판에서 주어진 것은 원의 둘레 $a=60$, 따라서 지름은 $d=20$, 그리고 원 끝으로부터의 길이는 $m=2$이다. 이로부터 원에 내접하는 직사각형의 폭 $d-2m=16$을 구하고 직각삼각형의 성질로부터 (현의 길이)= $\sqrt{20^2-16^2}=12$를 구한 것이다(J. Friberg, 2007a; J. Høyrup, 2002).



[그림 III-4] 유클리드의 원주각

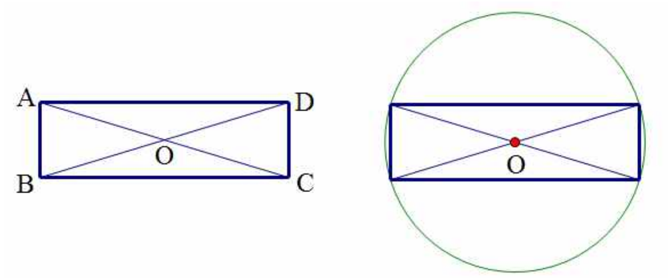
원에 내접하는 정삼각형과 이등변삼각형을 MS 3051([그림 Ⅲ-3])과 TMS I에서 각각 다루는데 삼각형의 닮음비와 중심각이 원주각에 두 배라는 성질을 사용하고 있다. 고 바빌로니아 인들은 원과 삼각형의 성질에 대하여 잘 알고 있었다. 매우 유사한 문제가 이집트 수학사에서도 발견되는데, P.Cairo #36은 정삼각형과 내접원, 높이에 의하여 이등분되는 정삼각형, 그리고 B([그림 Ⅲ-3])에 해당되는 현과 원주로 이루어진 도형 3가지를 차례로 담고 있다(J. Friberg, 2007a). 탈레스의 증명 방법으로 알려진 유클리드의 《원론》(Book Ⅲ, Proposition 31)의 기록을 살펴보자([그림 Ⅲ-4] 참고)(Euclid, 1956).

(증명) $\angle BAC = \angle ABC + \angle ACB$, $\angle FAC = \angle ABC + \angle ACB$이다. 따라서 $\angle BAC = \angle FAC$ 이므로 $\angle BAC$ 는 직각이다.

탈레스의 방법이라는 주장에 대한 반론도 존재한다. 유클리드는 '삼각형의 내각의 합은 직각의 두 배'를 사용하여 명제 31을 증명한 것이다. 그런데, 에우데무스(Eudemus, 4세기 BCE)에 따르면 삼각형의 내각의 합이 직각의 두 배라는 성질은 피타고라스 학파가 처음 발견한 것이기 때문에[5] 탈레스가 이를 사용했다고 믿기에는 어려움이 따른다(I. Thomas, 2006, p.169, p.177). 이에 대한 재반론으로 히스는 '이등변 삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다(Euclid, 1956, Book I, Proposition 5)'의 역을 탈레스가 알고 이를 이용했다고 주장한다(T. Heath, 1981a, p.136-137). 히스의 주장을 알아보자.

4) 고 바빌로니아인은 원주율을 3 또는 25/8로 사용한다.

5) 프로클루스(Proclus)에 따르면 이는 후기 피타고라스 학파의 업적이다(M. Kline, 1972).



[그림 III-5] 히스의 추측

직사각형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라하자([그림 Ⅲ-5]). 두 삼각형 ADC, BCD에서 높이는 AD = BC 이고 CD는 공통이다. 따라서 두 삼각형 ADC, BCD는 같다(Euclid, Book I, Proposition 4). 그러므로 ∠ACD = ∠BDC 이고 ∠OCD = ∠ODC 이다. 앞서 언급한 데로, 탈레스는 이로부터 OD = OC 를 얻는다. 마찬가지로 OA = OB = OC = OD 가 성립한다. 이제 O를 중심으로 하고 점 A, B, C, D를 지나는 원을 그리면 반원의 원주각의 크기는 직각임을 알 수 있다. 우리 논문 필자들은 히스가 제시한 추측([그림 Ⅲ-5])에서 사용된 아이디어는 앞서 알아본 점토판 BM 85194([그림 Ⅲ-2])에 있다고 주장한다. 이제 탈레스의 증명 가능성에 대하여는 독자가 판단하기 바란다.

아메스(A'h-mosè)는 수학자인가? 버낼의 주장에 따르면 기원전 18세기 중엽에 힉소스(Hyksos)족은 시리아 · 팔레스타인 지역을 지배했고 기원전 1740년대 또는 기원전 1730년대에 (下)이집트로 이동하여 그곳에서 파라오의 왕조를 창건했다[6](M. Bernal, 2012, p.583). 힉소스왕조의 문서 보존 계획에 의하여 집필된(J. Derbyshire, 2006) 산술서인 《아메스 파피루스》의 서문에서 아메스는 자신을 힉소스왕조 파라오 아포피스 33년에 고대 이집트 제12왕조 아메넴하트 3세(재위기간; 1859-1814 BCE)때 쓰인 고문서를 복제(copy)하는 서기(scribe)라고 밝히고 모두 87개의 문제를 책으로 저술하였다(M. Bernal, 2012; A. Chace, 1979). 재번역을 통한 오해를 줄이기 위하여 체이스(A. Chace, 1979)의 번역을 그대로 쓰겠다.

> Accurate reckoning of entering into things, knowledge of existing all, mysteries ... secrets all. Now was copied book this in year 33, month four of the inundation-season [under the majesty of the] King of [Upper and] Lower Egypt, 'A-user-Rê', endowed with life, in likeness to writing of old made in the time of the King of Upper [and Lower] Egypt, [Ne-ma]'et-[Rê']. Lo the scribe A'h-mosè writes copy this.

copy라는 용어에 의지하여 유럽은 아메스를 수학자로 언급하지 않는다. 그 이유는 탈레스가 기축시대의 정당성을 지탱하는 대표적인 철학자이자 수학자이기 때문이다. 손주영·송경근(2011)에 따르면 고대 이집트 시대의 서기는 상형문자 3000여자를 능숙하게 조합하며 산술, 부기, 측량[7]을 배우고 신화를 읽고 외우는 교육에서 선발

---

6) 버낼은 "힉소스 군주들의 전부는 아니라 하더라도 대부분이 그 왕조에 충성을 받쳤으며, 그 직후 원정대가 출발해 크레타, 키클라데스, 그리고 남부 그리스의 비옥한 평원을 정복했다"고 주장한다(M. Bernal, 2012, p.583).

7) 칼핀스키(Karpinski, 1915)에 따르면 플라톤(Platon)의 시대나 그 후 수세기 이후에도 이집트인들은 측량사로서 명성을 높이 사고 있었다. 측량에서 한 변이 1 cubit인 정사각형의 대각선 길이가 double-remen으로 사용되어 $1-1-\sqrt{2}$ 직각삼각형 뿐 만이 아니라 무리수 $\sqrt{2}$ 를 이집트 서기들이 인지한 것으로 보인다(M. Bernal, 1992). 비어드는 고대 이집트인들이 방

된 강력한 권위를 가진 사회계층이다. 아메스가 저술한 시기를 히스(T. Heath, 1981a)와 카조리(F. Cajori, 1991)는 기원전 1700년경 또는 그 이전으로, 체이스(A. Chace, 1979)는 기원전 1650년으로 그리고 다수의 수학사 저자(Merzbach·Boyer, 2011; D. Burton, 2007; H. Eves, 1990; R. Gillings, 1976) 등은 기원전 1650년경으로 사용하고 있다. 아포피스의 재임 연대를 추정하는 것은 매우 어려운 일이지만, 박제남(2014b)은 버낼(M. Bernal, 2012, p.473-474)의 주장을 근거하여 아메스가 《아메스 파피루스》를 집필한 시기를 기원전 1607년으로 수정 제시한다. 따라서 현존하는 《아메스 파피루스》를 통하여 최소한 아메스는 기원전 1650년경 또는 1607년에 당대 최고의 산술과 기하학을 이해하고 이를 기록한 수학자로 보는 것이 합리적이다.

우리가 기토(H. Kitto, 2004)의 주장처럼, 탈레스에 대하여 알고 있는 것은 근소하며 그것도 후기 철학자나 철학사가로부터 인용된 것들이다. 더 나아가 클라인(M. Kline, 1972)이 말한 "본질은 의심하지 않지만 고대 그리스 수학사는 파푸스(Pappus, 3세기 말)와 프로클루스(Proclus, 410-485)의 기록에 의존한다고 해도 과언은 아니다." 라는 지적을 기억할 만하다. 중등수학에서 탈레스와 관련된 6개의 정리를 언급할 때, 그의 증명에 대하여 알려진 것이 하나도 없기 때문에 "탈레스는 논리적 논의(logical arguments)를 진전시켰다."로 소개하는 것이 바람직하며(V. Katz, 2009) 탈레스를 '최초의 (진정한) 수학자', '닮음의 신' 또는 '최초로 비례문제를 푼사람' 등으로 소개하는 것은 고대 이집트와 고 바빌로니아의 학문적 성취를 무시한 기축시대의 반영으로 교과서에서 삭제되어야 한다.

3.2 피타고라스(Pythagoras, 573-497 BCE)와 피타고라스 정리

모든 중등 수학교과서는 피타고라스를 소개할 때 그가 이집트에서 수학했다는 내용은 담고 있지 않다. 버낼에 따르면 사료 비평(source criticism)의 기법은 1820년대부터 이집트에서 공부한 그리스인이 남긴 기록을 공격하는데 이용되기 시작했다(M. Bernal, 2011).

> 19세기 인종주의의 심화와 더불어 이집트에 대한 혐오가 점차 고조되면서 사람들은 이집트를 더 이상 그리스의 문화적 선조가 아닌 것으로 하였다. 제2차 세계 대전 무렵에는 그리스가 이집트와 페니키아에서 상당한 문화적・언어적 차용을 한 바 없으며, 그리스 현자들이 이집트에서 수학했다는 것은 흥미롭기는 하지만 터무니없는 소리에 불과하다는 생각이 확고히 자리 잡았다.

이암블리쿠스(Iamblichus, 250-330)에 따르면 18세에 고향을 떠난 피타고라스는 탈레스의 제자가 되었으며 본인이 고령인 이유에서 탈레스는 피타고라스가 이집트로 수학하기를 종용했다고 하며 특히, Memphis와 Diospolis의 사제들을 만나기를 권했다고 한다(Iamblichus, 1991, p.39). 피타고라스는 이집트의 신전에서 22년간 머무르면서 천문학, 기하학 등을 수학하고 바빌론에서 12년간 머무르면서 수론, 음악, 수리과학을 배워 지식이 최고점에 도달한 56세에 사모스로 돌아간다(Iamblichus, 1991, p.45). 이소크라테스(Isokrates, 436-338 BCE)는 "피타고라스는 이집트 방문 중에 그 민족의 종교를 배우는 학생이 되었으며 그리스인에게 처음으로 온전한 철학을 가져다주었다."고 분명히 명시한다(M. Bernal, 2011).

그러나 이암블리쿠스(Iambulicus, 1991)를 번역한 딜런(J. Dillon)과 허쉬벨(J. Hershbell)은 주석에서 피타고라스가 기원전 532년에 폴뤼크라테스의 학정(Polycrates' tyranny)으로 사모스를 떠났다는 아리스토크세누스의 진술만으로 이암블리쿠스의 기록을 아주 터무니없이 꾸며낸 이야기로 단정한다. 이 시기는 피타고라스가 이집트에 체류한 시기와 관계가 없는데도 말이다. 또한, 그들은 피타고라스가 이집트에서 오랫동안 연구한 바를 토대로

정식 $x^2 - x - 1 = 0$을 인지한 것으로 추정한다(C. Beard, 1968; 박제남, 2014a).

학파를 설립했다는 헤로도토스의 기록도 믿을 수 없는 것으로 적고 있다(Herodotos, 2012, 81; M. Bernal, 2011). 버낼의 《블랙 아테나 1, 2》가 출간된 이후 팔터(R. Palter, 1993)는 버낼의 주장을 반박하는 논문에서 "피타고라스가 수학적, 종교적 원리를 이집트로 부터 배워 그리스로 돌아가 학파를 설립했다는 것은 불가능하다."고 단정 짓고 버커트(W. Burkert)의 주장을 인용하여 수학자로서 피타고라스에 관한 그 시기의 전승은 이야기로 전달된 것이 아니라 명백히 조작된 것이라고 주장한다. 한편, 로베르는 학술적 계보학을 언급하면서 피타고라스가 20년간 이집트에 머물렀다는 것을 전설로 한다(J. Robert, 2000, p.296).

1710년대에 이집트와 동방의 고대성에 대한 공격을 한 뉴턴(I. Newton, 1642-1727)은 이집트의 건립연대를 트로이 직전으로 끌어내림으로써 이집트의 중요성을 감소시키고자 노력하였다(M. Bernal, 2011). 또한, 1730년대 워버턴(W. Warburton, 1698-1779)은 피타고라스가 21년 동안 이집트에서 수학하기는 했지만 그리스로 돌아온 후에야 자신의 일반원리를 설계했다고 주장하며 이를 근거로 이집트인들이 가설을 세울 줄 몰랐다고 주장한다. 이러한 주장은 오늘날까지도 하나의 규준(規準)으로 남아 있는데(M. Bernal, 2011), 이를 우리나라 중등 수학교과서에서도 쉽게 확인할 수 있다.

이준열 외(2112; 2014b)는 "직각삼각형에서 변의 길이의 사이의 관계를 논리적으로 밝혀낸 것은 피타고라스를 비롯한 고대 그리스 수학자들이다.", "피타고라스는 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계를 연구하여 피타고라스 정리를 발견하였다.", 그리고 우정호 외(2012b)는 "피타고라스 정리는 이를 처음으로 밝힌 것으로 알려진 고대 그리스의 수학자 피타고라스에서 유래되었다."로 기술한다. 고호경 외(2012)는, 역사를 기술하는 것임에도 불구하고, 피타고라스의 '피타고라스 정리의 발견'을 상상력을 동원하여 2쪽에 걸쳐 소개하고 있다. 이와 같이 대부분의 중등 수학교과서는 피타고라스가 '피타고라스 정리'를 처음 발견하거나 증명한 것으로 소개하고 있다.

이는 워버턴의 주장이 반영된 것으로 보인다. 특히, 고호경 외(2012)가 두 쪽으로 '이야기로 들려주는 피타고라스 정리'를 제공하는데 이는 최근 도입된 스토리텔링을 교과서에 도입한 것으로 추측된다. 스토리텔링은 역사적 사실에 입각해서 이야기를 구성하는 것을 전제로 하는 것이지 역사 왜곡까지 허용되는 것은 아니라고 본다.

피타고라스는 '피타고라스 정리'를 증명했을까? 이 질문에 대답하려면 먼저 용어의 번역부터 살펴보아야 한다. 교육과정의 용어 '피타고라스 정리'는 'Pythagorean theorem'을 번역한 것인데, 여기서 'Pythagoras'와 'Pythagorean'은 차이가 있다. 개인과 학파이다. 피타고라스 학파(Pythagorean)의 활동 기간은 대략 기원전 400년까지(M. Kline, 1972)[8]이며 따라서 우리는 위 질문을 "피타고라스 학파는 직각삼각형의 대각선 성질을 증명했는가?"로 수정해야 한다. 피타고라스 학파의 증명여부는 광범위하게 연구되어 왔는데, 클라인(M. Kline, 1972)이 제공하는 대답은 아닐 수 있다는 것이다.

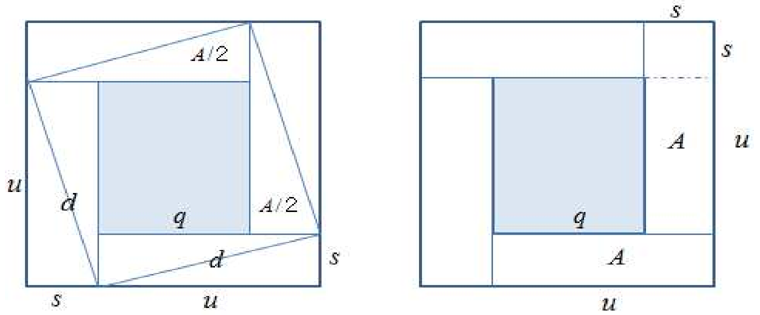
유클리드는 Book I(Proposition 47)과 Book VI(Proposition 31) 두 곳에서 대각선의 성질을 증명하는데 Book VI(Proposition 31)의 증명은 삼각비를 이용한 것으로 프로클루스(Proclus)는 본 증명을 유클리드의 업적으로 돌리며, Book I(Proposition 47)의 증명은 에우독소스(Eudoxus, 408-355 BCE)의 덕택으로 한다. 한편, 기원후 1~3세기 작가로서 Plutarch, Athenaeus, Laertius는 명제 47번을 피타고라스의 업적으로 하는데 이에 대하여 1907년 융느(G. Junge)는 "피타고라스 이후 5세기 동안 명제 47번을 포함한 기하학의 발견이 그의 업적이라고 기록된 문서는 없다."고 의미 있는 지적을 한다(Euclid, 1956, p.351).

Book VI(Proposition 31)처럼 삼각형의 닮음 성질을 사용하면 대각선 성질의 증명이 상대적으로 쉬운데, 피타고라스 학파는 완벽한 닮음비 이론을 가지고 있지 않았다. Book I(Proposition 47)의 방법이 어려운 이유는 닮음 도형의 성질을 사용하지 않기 때문이다. 클라인(M. Kline, 1972)이 제시한 최상의 가능성은 기원전 400년 경 후기 피타고라스 학파에서나 논리적인 증명이 이루어질 수 있다는 것이다. 메르츠바흐・보이어(Merzbach Boyer,

8) 클라인(M. Kline, 1972)은 피타고라스의 생몰연대를 대략 기원전 585년에서 500년으로 그리고 탈레스를 대략 기원전 640년에서 546년으로 보고 있다.

2011, p.45)도 피타고라스 학파가 처음으로 증명했다는 추측은 정당화될 수 없다고 말하며 초기 피타고라스 학파는 바빌로니아로부터 정보를 얻어 본 정리를 잘 알고 있던 것으로 설명한다. 카츠(V. Katz, 2009) 또한 직접적인 증거는 없다고 말한다.

한편, 히스(T. Heath)는 고대 이집트의 영향인 직각이등변삼각형을 이용한 피타고라스의 증명 가능성을 제시하며(Euclid, 1956, Book I, p.352), 이브스(H. Eves, 1990, p.81)는 함무라비(Hammurabi) 시대[9]에 바빌로니아인들은 이 정리를 알고 있었지만 피타고라스가 처음으로 분할법을 사용하여 증명을 한 것으로 신중하게 추측하는데 분할법의 핵심 연산은 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$와 $(a+b)^2 = c^2 + 4(ab/2)$이다. 우리나라 중등 수학교과서는 '피타고라스 정리'의 증명을 모두 이브스가 제시한 방법으로 설명하고 있다. 그러나 이브가 제시한 증명방법은 고 바빌로니아 점토판 IM 67118([그림 Ⅲ-6] 참고)에서 찾을 수 있다. 사각형에서 주어진 대각선의 길이 d와 넓이 A로부터 사각형의 두 변의 길이를 구하는 문제인데 이를 u, s $(u > s)$라 하고 $q = u - s$, $p = u + s$ 일 때 $q^2 = d^2 - 4(A/2)$, $p^2 = q^2 + 4A$를 사용한다(J. Friberg, 2007a, 2007b). 문제에서 60진법으로 $d = 1\ 15$와 A = 45 (00)로부터 $p/2 + q/2 = 52;30 + 7;30 = 1\,(00) = u$ 와 $p/2 - q/2 = 52;30 - 7;30 = 45 = s$를 구한다(J. Friberg, 2007b, p.119). 이때, 흥미롭게도 $q^2 + 2A = d^2$, $q^2 + 2A = u^2 + s^2$으로부터 $d^2 = u^2 + s^2$을 주목한다면 이는 소위 '피타고라스 정리'의 최초의 증명이다. 프라이베르크는 점토판에 있는 계산을 바탕으로 증명 가능성을 다음 그림으로 제시한다 (J. Friberg, 2007a, p.206).



[그림 Ⅲ-6] 고 바빌로니아인들의 대각선 규칙 증명

또한, 점토판 TMS 5와 BM 13901도 직각삼각형의 성질 $d^2 = u^2 + s^2$을 보인 것으로 추측할 수 있다(J. Friberg, 2007b, p.80-81). 따라서 프라이베르크(J. Friberg, 2007b)는 직각삼각형에서 대각선 규칙을 증명한 선구자로 피타고라스 학파가 아닌 고 바빌로니아인(Old Babylonian, 2000-1600 BCE), 유클리드(Euclid, 4세기 BCE), 그리고 파푸스(Pappus, 4세기)를 들고 있다.

고대 이집트인들이 대각선의 성질이나 소위 피타고리안 짝(Pythagorean triple)을 알고 이를 측량이나 피라미드 건설에 이용했다는 진위여부는 버낼과 팔터의 논쟁(M. Bernal, 1992, 1994; R. Palter, 1993)을 통하여 매우 분명하게 대두된다. 팔터(R. Palter, 1993)는 고대 이집트인들이 $3-4-5$ 삼각형을 사용했지만 대각선의 성질을 이해하지 못했다고 주장한다. 이에 대한 반론을 광범위하게 제시해보자. 먼저, 용어에서 럼킨(B. Lumpkin, 1980)은

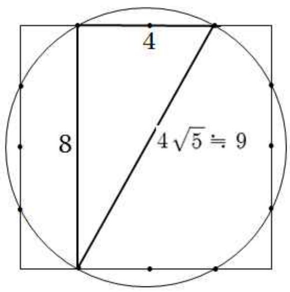
9) 바빌로니아 서판에서 발견된 금성의 천문학적 관찰 보고서에 따른 가능한 연대에 근거하여 함무라비 치세는 긴 연표(1848-1806 BCE), 중간 연표(캠브리지 고대사)(1792-1750 BCE), 그리고 낮은 연표(1728-1684 BCE)로 제시된다(M. Bernal, 2012, p.312-314; p.769-771). 랍슨(E. Robson, 2008)은 캠브리지 고대사인 중간 연표를 사용하지만 이브스(H. Eves, 1990)는 대략 기원전 2100으로 사용하고 있다. 우리는 긴 연표 또는 중간 연표로 보는 것이 보편적이라 본다(M. Bernal, 2012, p. 502-507).

피타고리안 짝을 'Egyptian triple'로 사용한다.

- 고대 이집트 제12왕조(기원전 1979년-기원전 1800년)때 만들어진 베를린 파피루스(Berlin Papyrus 6619)에서 오류가설(false position)을 풀잇법으로 한 두 연립이차방정식

  $$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ 4x-3y=0 \end{cases}, \begin{cases} x^2+y^2=400 \\ 4x-3y=0 \end{cases}$$

  은 Egyptian triple $(6,8,10)$, $(12,16,20)$을 구하는 문제이다(M. Clagett, 1999; R. Gillings, 1982). 이들의 기본 짝인 $(3,4,5)$로 고왕국 4~6왕조(기원전 3000년-기원전 2450년) 시기에 5개의 피라미드가 건설되었다(C. Rossi, 2003, p.203).《아메스 파피루스》가 다루는 문제 57-59번 역시 $(3,4,5)$의 문제이다(A. Chace, 1979). 특히, 버낼은 고대 이집트인들이 $(3,4,5)$가 특별한 의미가 있다는 것을 인지했기 때문에 이전 왕조에서 사용한 기울기 14/11를 4/3로 바꾸었다고 추정한다(M. Bernal, 1992; 1994, p.455). 이 외에도 이집트인들은 피라미드 건설에서 옆면과 밑면이 이루는 각이 각각 43.30°, 62°, 67°, 74°인 Egyptian triple $(21,20,29)$, $(15,8,17)$, $(5,12,13)$, $(7,24,25)$ 등을 사용했다(C. Rossi, 2003).
- 원을 정사각형으로 접근하여 넓이를 구하는 방법(squaring the circle)은 12왕조 때 사용된 수학인 《아메스 파피루스》 문제 41-43, 48, 50번에서 찾을 수 있다. 아메스는 주로 지름을 9로사용하고 따라서 정사각형의 변의 길이를 8로 하는데 이는 $4-8-9$ 삼각형이 직각삼각형에 매우 가깝기 때문으로 판단된다([그림 Ⅲ-7])(Robins · Shute, 1987)[10]. 따라서 고대 이집트인들은 대각선의 성질을 알고 있었다고 보인다. 이때 원주율은 3.16이다.



[그림 Ⅲ-7] 원의 정사각형화

- 고대 이집트인들이 사용한 특별한 직각이등변삼각형의 크기 $(1,1,\sqrt{2})$는 길이의 단위 'cubit', 'remen', 그리고 'double-remen'으로부터 알 수 있다. double-remen은 한 변의 길이가 1 cubit인 정사각형의 대각선 길이이다. 토지측량에서 이와 같은 단위 사용은 정사각형의 모양을 유지하면서 두 배 또는 반 배의 넓이를 갖도록 하는데 매우 유리하다(R. Gillings, 1982; B. Lumpkin, 1980). 또한, 이로부터 고대 이집트인들은 기원전 2000년 경부터 무리수를 사용하였으며 상황에 의한 증거로 보아 이집트 서기들은 무리수를 인지한 것으로 보인다(M. Bernal, 1992).

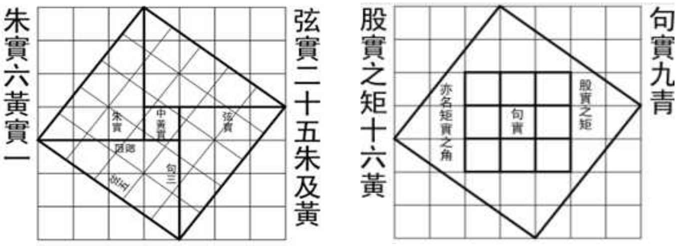
참고로 Egyptian triple (3, 4, 5)를 만드는 12매듭으로 이집트인들이 직각을 구현했다는 이야기(이준열 외, 2012; 우정호 외, 2012b; 류희찬 외, 2013c; 고호경 외, 2012; 허민 외; 2012b)는 칸토어(M. Cantor)의 설명: "상상해 보자! 길이가 3, 4, 5인 로프를 사용하면 직각 삼각형이 되지 않느냐."(R. Palter, 1993, p.257)에서 온 와전된 표현으로 보인다. 공사장 등에서 사용했다는 것은 그 가능성도 없어 보이며(L. Karpinski, 1915, p.2; 박제남, 2014b) 이에 대한 출처는 김용운 · 김용국(1991, p.15)으로 추정된다.

한편, 중국의 조군경(趙君卿, 3세기)이 《주비산경》의 해설서에서 설명한 그림의 원본은 유실되어 이를 [그림 Ⅲ-8]로 추정하는데(V. Katz, 2009) 우리는 출처를 'Chinese Text Project'로 하였다.《주비산경》에서 조군경이 증명한 시기를 반 데어 배르덴(van der Waerden)은 기원전 250년으로 보고 있다(Ostermann · Wanner, 2012).

---

10) 지름을 1/9 만큼 줄여 이를 한 변으로 한 정사각형으로 원을 접근한 방법(squaring the circle)은 엥겔스(H. Engels, 1977)에서 온 시각이다. 한편, 우리는 3.5절에서 원의 넓이를 기하적으로 정사각형과 팔각형(Vogel, K. (1958). Vogriechische Mathematik, Teil 1, p.66)의 넓이로 접근할 것이다(R. Gillings, 1982; M. Clagett, 1999). 우리는 본 논문에서 고대 이집트인들이 원의 넓이를 구하는데 '직각삼각형 방법'([그림 Ⅲ-7])과 '정사각형 · 팔각형 방법'([그림 Ⅲ-12])을 모두 사용한 것으로 보고 있다.

직각삼각형의 성질에 관한 후한시대의 빛나는 성과인 조군경의 방법은 높이(句)= 3, 밑변(股)= 4, 빗변(弦)= 5 이며, 이를 a, b, c 로 각각 표시하면 [그림 Ⅲ-8]의 왼쪽은 (朱實) = $(1/2)ab = 6$, (中黃實) = $(b-a)^2 = 1$, 그리고 (弦實) = $c^2 = 25$, 즉 현실25주급황을 나타내며 오른쪽은 (句實)= $a^2 = 9$, 그리고 (股實)= $b^2 = 16$을 나타낸다. 이를 문자로 해석하면 각각 $c^2 = 4[(1/2)ab] + (b-a)^2$, $b^2 = c^2 - a^2$ 으로 직각삼각형의 성질 $a^2 + b^2 = c^2$ 의 증명을 추정할 수 있다. 그림 [그림 Ⅲ-6]과 [Ⅲ-8]의 왼쪽 그림을 서로 비교해 보자.



[그림 Ⅲ-8] 유실된 조군경의 구고현 정리의 복원 그림

한편, '2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정'에서 '피타고라스 수'를 중학교에서 도입하였다. 류희찬 외(2014c)는 불국사 백운교 계단 측면을 $(3, 4, 5)$로 설명하고, 허민 외(2012b)는 유클리드의 방법을 현대적 기호로 소개하고 있다

객관적 자료 없이 불국사 백운교 계단 측면을 $(3, 4, 5)$의 직각삼각형으로 설명하는 것은 재고되어야 하며, 우리나라 중학교 교육과정에서 '피타고라스 수'를 용어로 사용할 필요가 있는지 생각해 보아야 한다. 먼저, 용어 '피타고라스 수'는 정수론에서 말하는 'Pythagorean triple'을 오역한 것으로 이를 '피타고리안 짝'으로 번역하는 것이 옳다. '피타고리안 수(Pythagorean number)'는 각 변의 길이가 자연수인 직각삼각형의 넓이를 나타내는 용어로(Mohanty·Mohanty, 1990) 자연수 짝 (x, y, z)가 '피타고리안 짝'일 때, 이로 이루어진 직각삼각형을 '피타고리안 삼각형'이라 하고 피타고리안 삼각형의 넓이를 '피타고리안 수'라 부른다. 물론 이들 주제는 현대 정수론에서 매우 깊이 있는 분야임에는 틀림없다. 예를 들어, 피타고리안 삼각형은 눈금 없는 자와 컴퍼스에 의한 각의 삼등분이나 타원곡선 이론과 관계가 있다. $(117, 44, 125)$와 같이 기본 피타고리안 짝 (x, y, z)인 직각삼각형에서 두 예각이 삼등분될 필요충분조건은 $z = c^3$(perfect cub)이다(Chang Gordon, 2014). 한편, 두 개의 피타고리안 삼각형으로 분할되는 정사각형이 존재하지 않는 이유는 $\sqrt{2}$가 무리수이기 때문이며, 4개의 피타고리안 삼각형으로 분할되는 정사각형이 존재하지 않는 것은 타원곡선(elliptic curve) $y^2 = x^3 - 3x^2 - 4x$의 유리해 문제와 관계가 있다(Jepson Yang, 1998; 박제남, 2013).

고대 이집트인들은 Egyptian triple에서 (밑변)/(높이)인 seked를 기울기로 사용하였다. $(빗변)^2/(밑변)^2$을 기울기로 사용한 '라르사 점토판(Plimpton 322)'은 15개의 피타고리안 짝으로 구성되어 있다(E. Robson, 2001, 2002). 고 바빌로니아인들이 매우 큰 수로 이루어진 15개의 피타고리안 짝을 어떻게 구했는가는 논란거리이지만 $(12709, 13500, 18541)$과 같이 매우 큰 수를 여러 시행착오를 거쳐 구했다고는 볼 수 없다. 더욱이 44.76°, 44.25°, 43.79°, $\ldots$, 33.26°, 32.89° 까지 1° 내외의 간격을 의도적으로 유지하고 있기 때문이다. 노이게바우어(O. Neugerbauer, 1957)와 에보(A. Aaboe, 1998)의 주장에 따르면 고 바빌로니아인들은 둘 다 홀수가 아니고, 서로소인 정수 u, v($u > v$)가 기본 피타고리안 짝 $(a, b, c) = (u^2 - v^2,\ 2uv,\ u^2 + v^2)$을 만든다는 것을 알고 이 등식을 사용했다. 또한, 연립방정식

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=mx+m \end{cases},\ m=v/u(\text{여기서 } u,v \text{는 자연수})$$

에서 피타고리안 짝 $(u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2)$을 얻을 수 있으므로 고 바빌로니아인들이 라르사 점토판(Plimpton 322)을 만들 때, 이와 같은 연립방정식을 사용한 것으로 추정할 수 있다(Bashmakova·Smirnova, 2000).

이준열 외(2012)의 "(...) 고 바빌로니아인의 기록은 경험으로 얻어진 지식을 나열한 것에 불과했다."는 주장은 기축시대에 따른 서술이며, 신준국 외(2012, p.164)가 언급한 $(3,4,5)$, $(5,12,13)$은 라르사 점토판(Plimpton 322)에 있지 않다.

라르사 점토판(Plimpton 322)의 첫째 열에는 15개의 고 바빌로니안 기울기 $(\text{빗변})^2/(\text{밑변})^2$이 크기순으로 기록되어 있고 이를 위한 계산 $\frac{u^2-v^2}{2uv}=\frac{1}{2}\left(u\cdot\frac{1}{v}+v\cdot\frac{1}{u}\right)$에서 역수 $1/u$, $1/v$을 사용한 것으로 추정되며, 고 바빌로니아인들이 60진법에서 1/7, 1/11, 1/13, 1/14 등과 같은 순환소수의 계산상의 어려움을 피하기 위하여 u,v를 12 또는 $1\ 04\ (=64)$ 등으로 유한소수를 만드는 22개의 소위 생성수(generating numbers)를 라르사 점토판(Plimpton 322)을 만드는데 사용했다는 것이 정설이다(E. Robson, 2002, 2008; O. Neugerbauer, 1957; O. Ore, 1976). 따라서 고 바빌로니아인들은 유한소수와 순환소수를 매우 잘 알고 있었으며 순환소수를 제외한 유한소수 $1/2=0;30$, $1/3=0;20$, $1/4=0;15, \dots$, $1/(1,21)=0;0,44,26,40$(여기서 $1,21=81$) 등 30개를 자주 사용하였다(O. Neugerbauer, 1957). 특히, 점토판 YBC 10529는 58부터 $1,20\,(=80)$까지, 순환소수인 경우 훌륭한 근삿값으로, 모든 역수를 다루고 있고(J. Høyrup, 2002; O. Ore, 1976), 셀레루코스(Seleucid) 왕조(330-125 BCE)[11]때, 천문학의 발달로 인하여 순환소수를 포함한 17×10^{12}까지의 역수가 사용되었다. 1/7의 경우 $8,34,16,59 < 1/7$, 그리고 $8,34,18 > 1/7$로 언급되는데 1/7은 $8,34,17$이 순환한다(O. Neugerbauer, 1957). 대부분의 중등 수학교과서는 김서령 외(2012b)와 류희찬 외(2013b)처럼 단순히 점을 찍는 '순환소수를 나타내는 기호'에 관심을 두고 18세기 이후의 유럽 수학자들을 언급하고 있는 것이 현실인데 순환소수와 유한소수에 대한 고 바빌로니아나 헬레니즘 시대의 바빌로니아 수학을 소개하는 것이 바람직하다고 본다.

피타고라스 학파는 조약돌로 또는 모래위에 점을 찍는 것으로 수를 형상화, 즉, 수와 기하적 점을 구별하지 못하였으며 m이 홀수일 때, $(m^2-1)/2$, $(m^2+1)/2$과 관련된 피타고리안 짝을 발견하였다(M. Kline, 1972). 피타고리안 짝을 피타고라스를 포함하여 플라톤, 유클리드, 그리고 디오판토스는 어떻게 사용했는지 알아보자. 먼저, 구체적 기록은 없지만 전해지는 바에 따르면 피타고라스 자신은 $(2n+1,\ 2n^2+2n,\ 2n^2+2n+1)$로, 플라톤은 $(2n, n^2-1, n^2+1)$로 높이와 빗변의 길이의 차가 1 또는 2인 특별한 짝을 사용했다고 하며, 기록에 의하여 유클리드는 기하적 언어를 사용하여 결과적으로 $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$ (여기서 $m>n$)을 사용하였다(Euclid, 1956, Book X, Lemma I of Proposition 28; D. Burton, 2007). 디오판토스는 《Arithmetica》(Book III, 19)에서 증명 없이 피타고리안 짝 $(p^2-q^2,\ 2pq,\ p^2+q^2)$을 사용하였다(T. Heath, 1910). 물론 이와 같은 전개는 피타고리안 짝을 찾는 충분조건은 아니며, 이는 10세기 경 아랍 수학자들에 의하여 완성되었다.

참고로 피타고라스(학파)와 관련해서 교과서는 '100마리 황소를 신에게 제물로 바치는 이야기'(우정호 외, 2012b), '히파수스가 무리수의 존재를 발설하여 추방되는 이야기'(이준열 외, 2012), 그리고 "피타고라스는 현의 길이를 이용하여 음의 높고 낮음을 설명하였고, 현의 길이를 연구하여 어울리는 음정들을 알아내었다."(김서령 외, 2012b) 등의 전설을 소개하고 있다. 참고로 《초등학교 수학 5-1》 '이야기 마당: 잘 어울리는 음'에서 피타고라스 음계를 소개하고 있다(교육부, 2015, p.50).

이 모두는 믿기 어려운 전설이거나 오해이다. 피타고라스가 '피타고라스 정리'를 발견했을 때, 한 황소를 제물로 받쳤다는 전설은 유클리드의 《원론》에 주석을 단 프로클루스(Proclus, 410-485)가 출처 없이 기록한 내용:

11) 랍슨(E. Robson, 2008)이 제시한 연대를 따랐다.

> 고대 역사를 조사하고 싶어 하는 사람들의 이야기를 들어보면 이 정리를 피타고라스의 업적으로 언급하며, 정리 발견의 영예로 한 황소를 제물로 받쳤다고 한다.

에서 온 것인데(Euclid, 1956, p.350; T. Heath, 1981a; I. Thomas, 2006), 이는 전후관계를 알 수 없는 아폴로도투스(Apollodotus)의 두 줄짜리 시구(詩句) “When the famed lines Pythagoras devised. For which a splendid ox he sacrificed.”를 출처로 한다(Proclus, 1909). 중등 수학교과서는 김용운(1975), 김용운・김용국(1985, 1991)을 참고한 것으로 추정된다. 그러나 스즈키(J. Suzuki, 2002)는 영혼의 윤회[12]를 믿는 채식주의 피타고리안들의 믿음에 반하므로 프로클루스가 전하는 전설을 회의적으로 보는데, 피타고리안들은 도살하려는 동물이 죽은 친구의 새로운 거처일 수 있다고 믿었다(C. Boyer, 1991).

히파수스(Hippasus)의 생몰연대는 알려진 것이 없지만 기원전 470년에서 460년에 태어난 테오도루스(Theodorus)와의 비교로 보면 그는 기원전 510년에서 490년 사이에 태어난 것으로 추정된다(K. Fritz, 1945; 박제남, 2014a). 무리수의 발견[13]과 더불어, 아리스토크세누스(Aristoxenus, 335년 경 BCE)에 따르면 히파수스는 4개의 청동원판(주어진 원판의 두께의 2배, 4/3배, 3/2배)과 4개의 현(주어진 현의 길이의 2배, 4/3배, 3/2배)의 소리실험을 통하여 두 청동원판의 두께의 비와 두 현의 길이의 비가 같을 때, 소리의 같은 조화가 만들어 진다는 것을 증명했으며(K. Fritz, 1945) 또한, 구에 내접하는 정12면체[14]를 처음 구현(construction)했다고 한다(Iamblichus, 1991). 여기서 피타고라스 학파가 발설을 금기시한 것은 정12면체의 구현과 무리수의 존재이다. 그런데 이암블리쿠스(Iamblichus, 1991, p.111, p.241)에 따르면 히파수스가 바다에서 사라졌다는 전설이 생겨난 것은 무리수의 발설과 관련이 있는 것이 아니라 불경한 행위인 정12면체의 구현을 그가 공표했기 때문이며, 이후 히파수스의 업적은 피타고라스의 업적으로 소개되었고 그의 이름은 더 이상 불리지 않았다. 이런 이유에서 중등 수학교과서가 소개하는 소위 ‘피타고라스 음계’는 기축시대적 표현으로 보인다. 테온(Theon, 4세기)은 손잡이가 없는 4개의 유리컵(물을 채우지 않은 것과 1/4, 1/3, 1/2만큼 채운 것)에 앞서 한 유사한 실험 결과도 히파수스의 업적으로 여겼다(Fritz, 1945). 피타고리안 음률(Pythagorean tuning)이라는 용어가 사용된 시기는 16세기 들어와서이다.

프라이베르크(J. Friberg, 2007a)와 호이럽(J. Høyrup, 2002)은 우리가 흔히 사용하는 ‘피타고라스 정리’ 대신 ‘직각삼각형의 성질’ 또는 ‘대각선 규칙’ 등으로 용어를 사용하고 있으며, 중국인은 용어 ‘피타고라스 정리’를 쓰지 않고 ‘진자(陣子)의 정리’로 부르고 있다(김용운 김용국, 1991). 후기 피타고라스 학파가 증명했다는 것도 가능성이 떨어지는 추측이므로 이와 같은 상황에서 피타고라스가 ‘피타고라스 정리’를 처음으로 증명했다는 직접적인 증거는 없다고 본다. 따라서 용어 ‘피타고라스 정리’를 ‘대각선 규칙(diagonal rule)’으로 사용하는 것이 바람직하다. 그리고 우리는 직각삼각형에서 대각선 규칙을 증명한 선구자로 3세기에 활동한 조군경을 추가하여 고 바빌로니아인, 유클리드, 조군경, 그리고 파푸스를 드는 것이 타당하다고 주장한다. 교과서는 피타고라스가 100마리 황소를 제물로 바친 진위를 알 수 없는 이야기를 소개하기보다는 고 바빌로니아와 조군경의 증명 방법을 어떻게 소개할지 고심하는 것이 올바르며 또한, 고 바빌로니아인들이 구한 15개 피타고리안 짝은 단순히 방정식 $x^2+y^2=z^2$의 정수해를 넘기 때문에 중등 수학교과서에서 사용하는 용어 ‘피타고라스 수’ 대신에 ‘바빌로니안 짝(Babylonian triple)’으로 부르고 이와 관련하여 고대 이집트와 고 바빌로니아인들의 수학문화를 교과서에 담는 것을 고려해 보아야 한다.

---

12) 고대 저자들은 영혼의 불멸성에 관심을 가졌던 피타고라스, 오르페우스, 소크라테스, 플라톤 등의 인물들이 그에 관해 이집트로부터 배웠다고 한결같이 이야기한다(M. Bernal, 2011)

13) 프리츠(K. Fritz, 1945)는 기초수준의 무리수 발견을 대략 기원전 5세기 중반 히파수스(Hippasus)의 업적으로 보고 있는데 반하여 버낼(M. Bernal, 1992)은 고대 이집트의 서기들이 측량과 관련하여 무리수 $\sqrt{2}$를 인지한 것으로 주장한다.

14) 이탈리아에서 발견되는 황철광(pyrite)의 결정체의 수학적 접근이다(K. Fritz, 1945).

3.3 파르테논 신전과 황금비

파르테논 신전의 전면은 황금비로 이루어져 있지 않다(G. Markowsky, 1992; Trachtenber·Hyman, 2002; J. Hambidge, 1924; M. Livio, 2002; 박제남, 2014a). 현 '2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 하'에서 출간된 모든 고등학교 수학교과서는 황금비의 예로 더 이상 파르테논 신전을 다루지 않고 있지만 황금사각형의 적합한 예를 제시하지 못하고 있다. 특히, 김창동 외(2014d)는 손가락뼈의 비율을 황금비로 사용하는데 이는 오해이다. 한편, 4종의 중학교 교과서(고호경 외, 2012; 신준국 외, 2012; 이준열, 2012; 허민, 2012b)와 융·복합교육(박종률 외, 2013) 등에서 파르테논 신전을 황금비의 예로 다루고 있는데 적합한 교수·학습자료의 개발이 필요하다고 본다(J. Hambidge, 1920b; E. Elam, 2011; K. Gast, 2000; I. Newton, 1999, p.730; 박제남, 2014a,b). 특히, 뉴턴의 원뿔대(I. Newton, 1999, p.730)와 현대디자인(E. Elam, 2011)에서의 지도안 개발은 의의가 크다고 본다.

프리츠(K. Fritz, 1945)와 비어드(C. Beard, 1968)는 황금비의 뿌리를 고대 그리스(히파수스)와 고대 이집트(쿠푸왕의 대 피라미드)에서 각각 찾고 있다. 유클리드(Euclid, 1956)는 우리가 지금 부르고 있는 소위 황금비를 《원론》에서 모두 3가지 방법(Book II, Proposition 11; Book VI, Proposition 30; Book XIII, Proposition 8)으로 소개하고 그 이름을 황금비(golden ratio, golden section)가 아닌 'extreme and mean ratio'로 사용한다. 우리는 유클리드가 사용한 용어 'extreme and mean ratio'를 '극대와 극대가 아닌 비'로 학교수학에서 사용하는 것도 옳다고 본다(박제남, 2014a). 햄비지(J. Hambidge, 1924)도 이 용어를 사용하고 있으며, 컬친·피슐러(Curchin·Fischler, 1981)는 헤론(Heron, 1세기)이 세 권으로 이루어진 《Metrica》에서 한 변의 길이가 10인 정오각형의 넓이를 구하는 과정을 소개하면서 'extreme and mean ratio'를 사용하고 있다. '황금비'라는 용어가 영어로 도입된 시기는 1898년으로 최근의 일이며 황금비의 개관은 박제남(2014a)을 참고해 보자.

허민 외(2012b)는 $1:\sqrt{2}$의 사각형을 '금강 비례'로 부르고 부석사 무량수전을 그 예로 들면서 '다이아몬드와 같이 아름다운 비'라고 소개하지만 동적 조화(dynamic symmetry) 입장에서 이를 '$\sqrt{2}$-사각형'으로 부르는 것이 온당하다(J. Hambidge, 1920a). 김용운 김용국(2012)에 따르면 낙랑시대 벽돌덧널무덤의 평면도는 정사각형과 그 대각선을 대응시키는 $\sqrt{2}$-사각형의 기하학적 조형 기법을 쓰고 있고, 평양 청암리의 건축군 유적지 중 기단의 평면도, 그리고 백제 건축의 영향을 받은 일본의 사천왕사와 황룡사의 배치 구성도 $\sqrt{2}$-사각형이다. 교과서에서처럼 '금강비' 등으로 사용하는 것은 불필요하다. 특히, 무량수전을 언급하려면 출처를 건축 관련 전문서적을 제시해야 하며 권위 있는 실측자료를 사용하는 것이 반드시 필요하다.

예술관련 융 복합 교육(박종률 외, 2013)에서 파르테논 신전을 소재로 사용하고 있다. "우리가 예술에 대해 뭔가를 말하려한다면 우리는 예술작품이 우리에게 훨씬 더 실감나도록 만드는 것을 목표로 해야 한다."는 손택의 주장(S. Sontag, 2013)을 우리 수학교육자들은 경청할 필요가 있다. 비평의 기능은 예술작품이 무엇을 의미하는지 보여주는 것이 아니라 예술작품이 어떻게 예술작품이 되었는지, 더 나아가서는 예술작품은 예술작품일 뿐이라는 사실을 보여주는 것이다(S. Sontag, 2013).

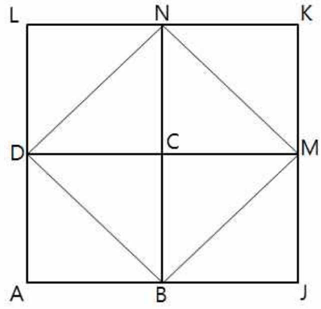
3.4 플라톤(Plato, 429-347 BCE)과 작도문제

고호경 외(2012, p.10-11)는 기원전 에게 해의 어느 섬에서 전염병이 발병하였고 이를 없애기 위하여 제사장이 요구한 제단 윗면의 넓이를 두 배로 만드는 문제로 '두 배의 제단'을 이야기로 꾸며 소개한다.

이는 중등 수학교과서 저자들이 출처를 고려하지 않고 내용을 마음대로 각색한 것이다. 고호경 외(2012)의 에세이 '두 배의 제단'은 플라톤(Platon, 2009)이 대화록《메논》에서 다루는 작도 문제로 배움이란 무엇인가에 대한 기하학의 예시이다. 대화가 이루어진 시점이 기원전 402년이라면 소크라테스의 나이는 67세가량으로 문답법

을 통하여 비판적이고 논리적인 지성인의 모습을 띠고 있다. 정사각형 ABCD를 4배로 한 후 이를 대각선을 이용하여 2배인 정사각형 AJKL을 작도한다(Platon, 2009, 82a-85b).

> 소크라테스: 그럼 어떻게 될까? 여기 이 전체(AJKL)는 여기 이것(ABCD)의 몇 배가 되지?
> 소년: 네 배입니다.
> 소크라테스: 그러나 우리에게 어쨌든 두 배가 되는 것이 생겨나야만 했지, 기억나지 않니?
> 소년: 기억납니다.
> (중략)
> 소크라테스: 그런데 이 선분을 대각선이라고 기하학자들은 부르지, 메논의 아이야, 네가 말하듯이 이 대각선으로부터 두 배의 도형이 생길 거야.
> 소년: 물론입니다. 소크라테스.

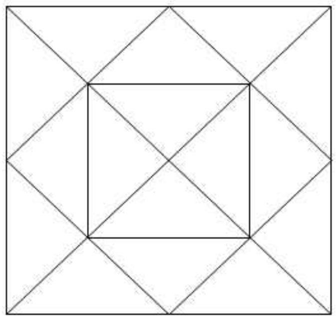


[그림 III-9] 두 배의 작도

[그림 III-10] 부평역 보도 타일
촬영일: 2014년 12월 9일

이준열 외(2014b)는 에세이 '소크라테스가 가르쳐 주는 $\sqrt{2}$'로 출처에 충실한 이야기를 제공하고 있다. 고호경 외(2012)의 에세이 내용은 삼차 방정식의 배적 문제에서 전해 내려오는 전염병 이야기를 평면으로 각색하여 만든 것이다. 출처를 고려하고 플라톤이 대화록 《메논》에서 말하려는 의도를 반영하는 것이 바람직하다.

두 배의 작도 문제의 기원은 고대 이집트와 고 바빌로니아로 올라간다. 먼저, 고대 이집트인들이 사용한 길이의 단위 'cubit', 'remen', 그리고 'double-remen'으로부터 알 수 있다. 'double-remen'은 한 변의 길이가 1 cubit인 정사각형의 대각선 길이이다(R. Gillings, 1982; B. Lumpkin, 1980). 또한, [그림 Ⅲ-11]은 고 바빌로니아 점토판 BM 15285 뒷면에 20개의 기학적 주제에서 3번째 열 4번째 도형으로 한 변의 길이가 $1\ 00(=60)$(ninda)인 정사각형 내에 16개의 삼각형의 넓이를 구하는 문제이다. 이를 종합하면 두 배의 작도 문제의 뿌리는 고대 이집트와 고 바빌로니아에서 찾을 수 있다(J. Friberg, 2007b). 특히, [그림 Ⅲ-9]의 모양을 한 고 바빌로니아 시대의 점토판 YBC 7289는 정사각형의 대각선 길이 $\sqrt{2}$에 대한 근삿값을 $\sqrt{2} \fallingdotseq 1;24,51,10 = 1+24/60+51/60^2+10/60^3 = 577/408$로 제공한다(J. Friberg, 2007b; E. Brown, 1999). 산술평균과 기하평균을 조합한 점화수열 $x_1 = 3/2,\ x_n = (x_{n-1} + 2/x_{n-1})/2$에서 $x_3 = 577/408$을 얻을 수 있다(E. Brown, 1999). 우리는 이와 같은 고대 이집트와 고 바빌로니아, 그리고 고대 그리스로 이어지는 수학문화의 전이에서 찾을 수 있는 $\sqrt{2}$의 근삿값을 교과서에 담아야 한다. 그러나 2009 개정 교육과정에서는 학습량 감축으로 근삿값을 다루지 않는다(교육과학기술부, 2011).



[그림 III-11] 점토판 BM 15285

근삿값은 일상생활에서 쓰이는 내용임에도 불구하고 학생들은 근삿값을 계산하는 것에 치중하며 그 계산

> 을 어려워하고 있는 실정이다. 중학교 과정에서 근삿값 내용은 다른 단원과 연계성이 부족하다. 또한, 현재 중학교 2학년에서 다루는 근삿값은 일상생활에서의 활용도와 거리가 멀고, 가르치기에 많은 어려움을 주는 단원이다.

우리는 그동안 $\sqrt{2}$의 근삿값을 학교수학에서 어떻게 가르쳤는지 되돌아보아야 하며 근삿값은 다른 단원과의 연계에 있는 것이 아니라 최종 주제라는 것이다. 이를 대학 '미분적분학'의 지도에서도 확인할 수 있다.

한편, 김원경 외(2014)가 말하는 "삼차방정식 $x^3 = 2a^2$을 구해야 하는데 그 당시에는 못 구했다."는 방정식의 문제가 아니라 $\sqrt{2}$에서 본 것처럼 '작도가능 수'의 문제인데 당시 본 방정식의 풀이(commensurable power)를 이미 오래전에 알고 있었다.

기원전 431년 아테네와 스파르타 사이의 펠로폰네소스 전쟁은 27년 동안 계속되었고, 이후 기원전 430년 전염병이 발생하여 여러 해 동안 계속되면서 아테네에 전염병이 돌아 인구의 1/4이상이 죽고 결국 기원전 404년에 아테네는 스파르타에 항복을 한다(T. Martin, 2011). 이브스(H. Eves, 1990)는 아폴로의 정육면체 제단의 크기를 두 배로 하라는 신탁을 받았다는 이야기인 '데리안 문제(Delians problem)'를 단순히 전설로 언급하고 있으며 웰스(D. Wells, 1997)는 전설로 다음과 같이 소개한다.

> 전설에 의하면 아테네 사람들은 도시를 파괴하고 있는 전염병으로부터 그들을 구할 방안을 얻기 위하여 델로스에 있는 예언자에게 대표단을 파견하였다. 아폴로의 제단의 크기를 두 배로 하라는 신탁을 얻는다. 그들은 이 제단은 정육면체로 되어 있으므로 각 변을 두 배로 하여 건축하였더니 결과는 8배가 되어 신의 노여움을 진정시키는데 실패하였고 전염병은 약해지지 않았다.

이와 같이 전설은 최소한 두 가지가 존재하지만, "플라톤이 이 문제를 연구하여 꼭 두 배의 제단이 세워지게 되었고 아폴로 신의 노여움이 풀리어 전염병이 곧 사라졌다."(김용운·김용국, 1985, p.55)는 기술은 논리적으로도 어긋나는 출처가 없는 내용이다. 전설의 진위와 관계없이 배적문제(duplication of the cube)는 플라톤 학파의 학술원(Plato's academy)에서 연구되었다(D. Fowler, 2003; M. Kline, 1972). 히포크라테스(Hippocrates, 470-410 BCE)는 (눈금 없는)자와 컴퍼스만으로 작도를 시도했지만 $x^3-2(\in \mathbb{Q}[x])$는 기약다항식이고 3은 2의 거듭제곱수가 아니므로 $\sqrt[3]{2}$는 작도불가능수이다. 본 배적문제는 세 단계로 발전한다. 첫 진전은 히포크라테스에 의하여 이루어지는데, 그는 두 선분의 길이 a와 $2a$에 대하여 등비수열(geometric progression) $a, x, y, 2a$를 이루는 x와 y를 구하는 것으로 배적문제를 변형한다. 환언하면 $a/x = x/y = y/2a$ 이다(M. Kline, 1972). 두 번째 진전은 기원전 350년에 플라톤 학파의 학원의 메나에크무스(Menaechmus, 4세기 BCE)에 의하여 이루어진다. 그는 두 포물선($x^2 = ay,\ y^2 = 2ax$)의 교점 또는 포물선($y^2 = (a/2)x$)과 쌍곡선($xy = a^2$)의 교점으로 배적문제를 전환시켜 이 과정에서 포물선, 쌍곡선, 그리고 의도치 않게 타원을 발견했다(Merzbach Boyer, 2011, p.84-86; B. Bold, 1969). 그리고 세 번째 진전은 기원전 250년에 니코메데스(Nicomedes, 3세기 BCE)에 의하여 이루어진다. 그는 각의 삼등분과 정육면체의 두 배 문제를 두 개의 점을 표시한 자를 이용한 작도로 발전시키고(A. Baragar, 2002) 이 과정에서 나타나는 곡선이 나선(conoid)이다.

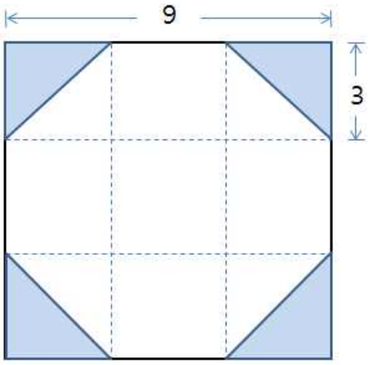
중등 수학교과서 집필진은 전설인 데리안 문제(D. Wells, 1997)를 이야기로 꾸미는 것보다 작도불가능 문제가 원뿔곡선 발전에 어떻게 영향을 끼쳤는지를 교과서에 담아야 한다(H. Eves, 1990, p.124-126). 많은 교과서가 이차곡선에서 아폴로니우스(Apollonius, 250-175 BCE)를 다루고 우정호 외(2014)는 메나에크무스를 에세이 '이차곡선의 다른 이름, 원뿔곡선'에서 소개하는데 메나에크무스가 원뿔곡선을 어떻게 얻고 왜 이를 연구했는지는 언급하지 않고 있다((Merzbach·Boyer, 2011, p.85).

3.5 아르키메데스(Archimedes, 287-212 BCE)와 그의 묘비

학교수학은 초등학교 5~6학년군에서 원주율을 다루고 이어서 중학교 1학년 평면도형이나 입체도형에서 다시 원주율을 다룬다. 중등 수학교과서는 평면도형에서 원에 내접, 외접하는 정육각형부터 정96각형까지 만들어 원주율의 근삿값을 언급하고(김서령 외, 2012a) 입체도형에서 아르키메데스의 묘비와 관련하여 구와 원기둥을 언급한다(허민 외, 2012a).

기원전 225년경 아르키메데스는《원의 측정(Measurement of a circle)》에서 원의 넓이를 명제 1에서 직각삼각형의 넓이로 접근하고 명제 3에서 $3\frac{10}{11} < \pi < 3\frac{1}{7}$을 구하였다(T. Heath, 2002). 아르키메데스는 정다각형을 작도하지 않았다. 단위원에 외접하는 정N각형의 둘레의 절반을 P_N, 내접의 경우를 p_N이라 하면 $p_3 = 3\sqrt{3}/2$, $P_3 = 3\sqrt{3}$이고, 아르키메데스는 점화수열 $1/P_N = (1/2)(1/P_N + 1/p_N)$, $P_{2N} = \sqrt{P_{2N}\,p_N}$ 을 기반으로 무리수의 근삿값, 예를 들면 구체적 계산은 존재하지 않지만 $N=6$에서 $265/153 < \sqrt{3} < 1351/780$ 등을 구하여 $N=96$에서 놀랍게도 너무 간단한 부등식 $3\frac{10}{71} < p_{96} < \pi < P_{96} < 3\frac{1}{7}$을 얻어 점화수열의 과정을 끝낸 것이다(G. Phillips, 1981; T. Heath, 2002, V. Varadarajan, 1998). 아르키메데스가 고 바빌로니안들이 사용한 근사식 $\sqrt{a^2+b} \fallingdotseq a + b/2a$의 일반화된 부등식 $a \pm b/2a > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm b/(2a \pm 1)$를 사용하여 $265/153 < \sqrt{3} < 1351/780$ 을 구한 것으로 추정하기도 하며(D. Burton, 2007; T. Heath, 2002) 이와 같은 부등식은 바스카라(Bhāskara, 1114-1185) 이전에 인도수학자들이 발견한 방정식 $x^2 - Ny^2 = m$ $(N=3;\ m=1, -2)$의 풀이(cyclic method) $265^2 - 3\times153^2 = -2$, $1351^2 - 3\times780^2 = 1$로 다시 해결된다(V. Varadarajan, 1998).

1958년 보겔(K. Vogel)은 고대 이집트인들이 정사각형에서 팔각형으로 이어지는 기하적인 접근으로 원의 넓이를 구한 것으로《아메스 파피루스》문제 48번[15]을 해석한다([그림 III-12])(R. Gillings, 1982; A. Chace, 1979). 지름이 9인 원에 외접하는 정사각형을 설정하고 네 변을 각각 3등분하면 정사각형은 9등분되고 각 모서리의 삼각형을 제외시키면 팔각형을 얻는다. 이때, 팔각형의 넓이는 $81 - 4(9/2) = 63$이고 한 변의 길이를 $\sqrt{63}$으로 하기 위하여 $\sqrt{63}$에 가까운 값 $\sqrt{64} = 8$을 택하면 된다. 문제 48번의 접근 방법을 알렉산드리아에서 교육받은 아르키메데스가 알고 있었을까? 이집트로부터의 차용을 숨기는 그의 정직하지 못한 태도로 디오프(C. A. Diop)로부터 비난받기까지 했지만 아르키메데스의 인지문제는 고대 이집트로부터의 수학문화의 차용이라는 시각에서 논란거리이다(R. Plater, 1993, p.258-259). 아메스가 제시한 팔각형은 원에 내접하거나 외접하지는 않지만 아르키메데스가 알렉산드리아에서 교육받았기 때문에 이집트의 영향을 완전히 배제하기에는 어려움이 따른다. 실제 팔터(R. Plater, 1993)는 디오프가 아르키메데스의 증명과정을 이해 못한 것으로 그의 주장을 일축하지만 정다각형으로 접근한 아르키메데스의 아이디어를 독립적인 것으로 보기에는 어렵다.



[그림 III-12] 보겔의 해석, 1958

중등 수학교과서는 아르키메데스의 일화를 모두 4가지로 소개한다. (1) 로마병사에게 살해되는 것, (2) 묘비에 원기둥과 구의 그림을 새기는 것(김서령 외, 2012a; 허민 외, 2012a), (3) 지구를 움직이는 것(류희찬 외, 2014a), 그리고 (4) 무기를 만들고 사용하는 것이다(김창동 외, 2014c).

15) 체이스(A. Chace, 1979)의 문제 48번 번역은 명백한 오역이다. 정사각형에 내접하는 원이 아니라 팔각형이다(R. Gillings, 1982, p.141-142).

교과서에서 담고 있는 일화는《플루타르크 영웅전》을 출처로 하는데 플루타르코스(Plutarchos, 46-120)의 해당 기록을 간략히 알아보자(Plutarch. 2014, p.523-528).

> 아르키메데스는 친척인 국왕 히에로에게 "만일 지구가 아닌 다른 천체에 갈 수만 있다면 이 지구라도 움직여 놓을 수 있을 것"이라고 말했다고 한다. (...) 그는 친척과 친구에게 자신이 죽거든 무덤 위에 구를 감싸고 있는 원통을 놓고 원통과 구의 비를 적어달라고 요구하곤 하였다. (...) 무기에 대하여 아르키메데스는 해설서나 책을 전혀 남기지 않았으며 (...) 마르겔루스는 아르키메데스의 죽음을 슬퍼하여 그의 가족을 찾아 잘 돌보아주었다. (...) 그리스인들은 새삼스럽게 놀랐다. 로마인들은 유순하고 인정이 많으며 예의까지 있는 줄은 몰랐던 것이다. 로마인들이 정의감을 지니고 있음을 그리스 인에게 보여준 사람은 마르켈루스가 처음이었다.

김서령 외(2012a)와 허민 외(2012a)는 "로마의 사령관 마르겔루스가 그의 소원대로 원기둥에 구가 꼭 맞는 그림을 새긴 묘비를 세웠다고 한다."로 로마와 시라쿠사와의 3년 전쟁을 미담으로 각색하고 있는데 이 이야기의 처음 출처는 이종우(1998), 김용운(1975), 그리고 김용운 · 김용국(1985)으로 추정된다. 김창동 외(2014c)는 송정화의 《아폴로니우스가 들려주는 이차곡선 1 이야기》를 참고하여 인류최초의 태양 광선총인 포물면 거울을 2쪽에 걸쳐 이야기하고 있다.

원출처의 내용을 충실히 교과서에 반영해야 한다. 플루타르코스(Plutarch, 2014)는 마르겔루스가 아르키메데스의 죽음을 슬퍼하여 그의 가족을 찾아 잘 돌보아주었다고 쓰고 있으며, 아르키메데스가 개발한 무기에 대하여 523-525쪽에서 언급하는데 포물면 이야기는 없다. 물론 아르키메데스는 무기에 대한 해설서를 남기지 않았다고 한다. 아르키메데스의 일화와 그의 죽음(기원전 212년)은 카르타고와의 전쟁인 2차포에니 전쟁(기원전 218년-기원전 201년)중에 일어난 이야기로 로마는 17년 동안 계속된 전쟁에서 그들 모두가 노예가 되거나 로마 문명이 종말을 맞을지도 모른다는 절박한 위기감 속에 있었다. 특히, 아르키메데스가 사망하기 4년 전인 기원전 216년에는 칸나이전투를 비롯한 남부 이탈리아에서 로마군은 하니발 장군에게 궤멸되기도 했다. 메르츠바흐 · 보이어(Merzbach·Boyer, 2011)는 플루타르크 영웅전에서 언급하는 내용을 다루지 않고 2차포에니 전쟁만 간단히 한 단락으로 언급하면서 마루겔루스가 천체의 운동을 묘사하기 위해 제작한 아르키메데스의 독창적인 그림을 약탈품으로 챙겼다고 전하고 있다. 우리나라 교과서는 이브스(H. Eves, 1990)가 말하듯 로마 역사가의 '아름다운 이야기(picturesque)'를 더 아름답게 왜곡하여 소개하고 있다.

교과서는 고대 이집트, 고 바빌로니아, 그리고 중국의 원주율을 수학사로 소개하는 것이 교수 · 학습 측면에서도 바람직하다. 지름의 1/9만큼을 제외한 길이를 정사각형으로 접근(squaring the circle)한 아메스의 방법(A. Chace, 1979, 문제 41-43, 48, 50번; J. Friberg, 2005; R. Gillings, 1982; 박제남, 2014b)에서 고대 이집트의 원주율은 $\pi_{Egypt} = 3.16$이고 1936년 수사(Susa)에서 발견된 점토판 MS 1938/2에 기록된 정육각형의 둘레를 이용한 방법(O. Neugebauer, 1957, p.46-47; Merzbach · Boyer, 2011, p.35; J. Friberg, 2007a, p.216-218)에서 고 바빌로니아의 원주율은 $\pi_{Babylon} = 3\frac{1}{8}$이다. 한편 중국 수학사상 처음으로 원에 다각형을 내접시켜 원주율을 구한 유휘(劉徽, 3세기)의 방법을 교과서에서 소개하는 것이 옳다. 유휘가 구한 원주율은 $\pi_{\text{유휘}} = 3.1416$(Lay-Yong · Tian-Se, 1986)으로 아르키메데스의 원주율 보다 다소 정확하며, 그리고 조충지(趙沖之, 5세기)가 구한 원주율은 $\pi_{\text{조충지}} = 355/113$로 소수 여섯째 자리까지 정확한데 이는 그 분모가 113인 어떠한 유리수보다도 훌륭한 π의 근삿값이다. π의 계산에 관한 조충지의 결과를 수서(隋書)에서 찾을 수 있다(김용운 · 김용국, 1996).

> 애초에 원주율을 대략 3으로 잡았는데 이것은 아주 엉성한 수치이다. 유흠, 장형, 유휘, 왕번, 피연종 등이

각각 새로운 원주율을 정했으나 아직 정확하지 못했다. 남조의 송나라 말기 南徐州의 종사사(從事史) 조충지가 이것을 더욱 정밀하게 셈하여 원의 지름이 1척일 때, 원주는 3장 1척 4치 1푼 5926임을 구했다. 그 정확한 비율을 113분의 355, 대략 7분의 22로 한 것은 가장 정밀한 값이다. 그의 저술로는 『철술(綴術)』 이 있었으나 난해하여 널리 읽히지 못하여 소실되고 말았다.

불행히도 조충지의 계산방법에 대한 기록은 유실되어 없으며 유휘의 방법을 따라서 정24576($=3\cdot 2^{13}$)각형의 넓이를 이용한 것으로 추정하고 있다(Lay-Yong · Tian-Se, 1986; V. Katz, 2009; 박제남 · 남호영, 2004).

3.6 디오판토스(Diophantus, 3세기)와 그의 묘비

김서령 외(2012a)는 디오판토스를 "대수학의 아버지로 불린다."로 소개하며 "디오판토스가 자신의 묘비에 나이를 알 수 있도록 묘비에 기록해 두었다."고 설명하고 있다.

대수학의 기원은 디오판토스나 알콰리즈미 보다 훨씬 이전인 기원전 2000년경 고대 이집트인과 바빌로니아인으로 올라가며 그들은 산술, 대수, 그리고 기하의 문제를 다루는 교과서(schooltexts)를 가지고 있었다(S. Gandz, 1936). 기하학과 마찬가지로 고대 그리스의 대수학의 기초는 이집트로부터 왔다. 이에 대한 근거로 히스(T. Heath, 1981b, p.440)는 플라톤(Plato, 429-347 BCE), 헤론(Heron, 1세기), 푸셀루스(Psellus, 11세기) 등의 주장을 제시하는데 특히 푸셀루스는 "디오판토스의 계산 방법은 이집트로부터 온 것이며 디오판토스가 사용하는 오류가설 방법(false position)은 이집트에서 배운 것"이라고 주장한다. 디오판토스는 그 출생시기와 장소가 분명하지 않고 그의 사생활이 알려진 것이 거의 없기 때문에 스틸웰(J. Stillwell, 2010)은 150년에서 350년 사이로 그리고 히스(T. Heath, 1910)는 기원전 150년-기원후 350년으로 생몰연대를 잡고 있고 아나톨리우스(Anatolius)와 동시대로 보아 250년 경(or not much later)에 학문의 꽃을 피운 것으로 보고 있다. 디오판토스는 ζ, Δ^{Υ}, K^{Υ}, $\Delta^{\Upsilon}\Delta$ 등으로 단어의 일부를 생략하는 방법으로 기호를 사용하였고 0에 대한 기호는 없으며, 그의 기호 시스템의 약점은 둘 이상의 미지수를 쓸 수 없다는 것이다. 지금으로 말하면 x만 썼을 뿐 y나 z를 쓰지 않았다. 카르핀스키(Karpinski, 1915, p.7)는 《산술서》에서 디오판토스가 양의 계수인 것만을 대상으로 $ax^2+bx=c$, $ax^2+c=bx$, 그리고 $ax^2=bx+c$의 형태를 체계적으로 다루지 못한다고 주장한다. 라쉬드(R. Rashed, 1989)는 《산술서》를 '대수학의 업적이 아닌 산학에 관한 보고서'로 설명하고 있고 히스(T. Heath, 1981b, p.440)는 디오판토스가 대수학을 창안(invent)한 것은 아니라고 지적한다. 갠즈(S. Gandz, 1937)는 Book I(Problem 29)의 풀잇법에 대하여 "이 방법은 고 바빌로니아의 유산으로 기원전 2250년경으로 올라간다."고 설명하며 "디오판토스의 대수란 수론을 위한 수단이다."로 정의한다(S. Gandz, 1936).

중등 수학교과서에서 소개하는 디오판토스의 나이 문제는 600년경에 기록된 그리스 명시선집 《The Greek anthology》(Book XIV, 126번)의 수수께끼 문제이다(W. Paton, 1979; I. Thomas, 1993; T. Heath, 1981b). 대부분의 문제는 491-527년경에 살았던 메트로도루스(Metrodorus)의 이름으로 나오고(T. Heath, 1910) "6명에게 사과를 나눌 때, 4명에게 차례로 1/3, 1/8, 1/4, 1/5만큼 주고 5번째 사람에게 10개 그리고 마지막 사람에게는 1개의 사과를 준다."처럼 사과나 견과를 사람에게 나누어 주는 문제가 대부분이며 이것은 방정식 $(1/3)x+(1/8)x+(1/4)x+(1/5)x+10+4=x$로(T. Heath, 1910) 《아메스 파피루스》의 33번 문제와 같은 형태이다(A. Chace, 1979). 《그리스 명시선집》은 디오판토스의 나이문제를 포함하여 23개의 일차방정식, 12개의 미지수 문제, 그리고 2개의 연립방정식 등을 다루고 있다(T. Heath, 1910).

본 수수께끼가 사실인지도 확인할 수 없다. 즉, 《그리스 명시선집》에 나오는 퍼즐이고 디오판토스의 생애에 관해 아는 것이 거의 없기에 주목을 받는 문제이다. 교과서는 퍼즐을 출처와 함께 소개하고 "이 퍼즐이 역사

적으로 정확한 것이라면 그는 84세까지 살았다.” 정도로 언급하는 것이 올바르다. 교과서에서 이를 “디오판토스가 자신의 묘비에 나이를 알 수 있도록 기록해 두었다.”로 자의적으로 언급하는 것은 재고되어야 한다.

3.7 알콰리즈미(al-Khwārizmi, 780-850)와 이차방정식

중학교 3학년 수학 교과서는 알콰리즈미가 도형을 이용하여 양의 해를 구한 것으로 단순히 소개하며 또한 양의 근만을 사용한 이유는 그가 도형을 이용하여 이차방정식을 풀었기 때문이라고 설명한다(고호경 외, 2012; 이준열 외, 2012; 허민 외, 2012b; 류희찬 외, 2013c).

알콰리즈미는 대수적 그리고 기하적 방법으로 이차방정식의 해를 구했고(F. Rosen, 1923) 그 당시 아랍세계에서는 음의 근을 해로 받아들이지 않았으며 음의 근까지 모두 받아들인 것은 데카르트 시대에 이르러서다(L. Karpinski. 1915, p.75). 도형을 이용하지 않은 대수적 풀이의 예를 번역으로 인한 오해를 줄이기 위해 로젠의 번역본(F. Rosen, 1923)으로 살펴보자.

> Al-Khwarizmi's discussion of $x^2+21=10x$(a square and twenty-one dirhems are equal to ten roots): Halve the number of the roots, it is five; multiply this by itself, it is twenty-five ; take from this the twenty-one which are connected with the square, the remainder is four. Extract the root, it is two. Subtract this from the moiety of the roots, namely, from five, there remains three. This is one of the portions; the other is seven.

두 단계의 걸친 알콰리즈미의 식은 $10/2-\sqrt{(10/2)^2-21}$ 과 $10/2+\sqrt{(10/2)^2-21}$ 로 이를 일반적인 식으로 나타내면 $n/2\pm\sqrt{(n/2)^2-m}$ 이다. 알콰리즈미의 생애에 대하여 알려진 것은 거의 없으며 알콰리즈미 자신이《이항과 연산의 수학》의 서문에서 저술활동의 후원자와 응용방식을 언급하고 있다. 체스터의 로버트(Robert of Chester, 12세기)나 리브리(Libri)의 번역서에는 없지만 로젠의 번역서에는 있는데, 이로부터 알콰리즈미의 저술활동 장소는 학술원과 도서관인 ‘지혜의 전당(The House of Wisdom[16])’임을 강하게 추정할 수 있다(F. Rosen, 1923; S. Gandz, 1936).

> 저자서문
>
> “인자하고 자비로운 신의 이름으로!”
>
> “이 저술은 콰리즈미 출신 Musa의 아들 Mohammed에 의하여 쓰였다” (....)
>
> 알 마문의 격려로 나는 이항과 연산에 의한 계산에 관한 간명한 책을 쓰게 되었는데 이것은 계산 가운데 사람들이 상속, 유산, 배분, 소송, 교역의 경우에 그리고 토지의 측량, 수로 파기, 기하학적 계산을 비롯하여 다양한 종류의 목적이 관련된 일에서 서로 상대하는 경우에 빈번히 요구되는 쉽고 가장 중요한 산술에 한정된 것이다 (...)

코르방(H. Corbin, 1997)에 따르면 알 마문(재위기간: 813-833)은 832년에 지혜의 전당을 창설한다. 이 안에 번안자와 번역자 집단을 거느린 참된 번역 연구소가 있었으며, 그리스어로부터 직접 아랍어로 번역하는 예는 매우 적었고 대부분 시리아어 번역을 통해 아랍어로 번역하는 과정을 밟았다.

---

16) 구타스(D. Gutas, 2013)는 ‘지혜의 전당’을 하나의 용어로 사산 왕조에서 도서관을 가리키던 말의 번역으로 본다(82-89쪽을 참고해 보자).

알콰리즈미의 대수와 산술에 대한 저서는 《al-Kitab al-mukhatasar fi hisab ai-jabr wa'l-muqabala》 이다. 여기서 사용된 주요 단어는 al-gebr와 wa'l-muqabalah인데 로젠(F. Rosen, 1923)은 이를 completion과 reduction으로 번역하며 al-gebr는 'removal of the negative quantity'이고 a'l-muqabalah는 'to reduce the equation by removal of two positive quantities which are equal on both side'로 제시한다. 매우 유익한 정의는 Smith에 의하여 "al jabr 는 음의 항의 이동에 대한 근본적인 생각을 지니며, muqâbalah는 양의 항의 이동과 각 항들의 정돈이다."로 제시된다(S. Gandz, 1926). 알콰리즈미는 이들 두 단어에 대한 설명을 하지 않았는데 칸토어(M. Cantor)는 알콰리즈미 시대 이전에 이미 통용된 전통적인 용어로 간주한다(S. Gandz, 1926). 우리는 Smith의 정의를 따라서 《이항과 연산의 수학》으로 번역하는 것이 온당하다고 본다. 참고로 류희찬 외(2013c)는 '복원과 대비의 연산', 스즈키(J. Suzuki, 2009)는 'The condensed book of completion and restoration', 더비셔(J. Derbyshire, 2006)는 'A hand book of calculation by completion and reduction', 그리고 메르츠바흐・보이어(Merzbach Boyer, 2011)는 'A short book on the calculus al-jabr and al-muqabalah'로 사용한다.

디오판토스가 《산술서》를 펴낸 이후 이 분야에서 상당히 의미 있는 책으로 이차방정식 풀이, 넓이와 부피 측정, 그리고 아주 복잡한 계산처리를 다루고 있으며 알콰리즈미는 "어떤 것을 제곱한 것과 그것의 10배가 39디르헴이다. 다시 말해서 제곱을 하고 그것의 10배를 더하면 39가 되는 것은 무엇인가?"처럼 아무런 문자기호를 쓰지 않았다(L. Karpinski, 1915; F. Rosen, 1923). 이에 대하여 투머(Toomer)는 "알콰리즈미의 해설은 산스크리트 대수학적 작업과 같이 완전히 문자에만 의존하며 이미 기호적 표현을 진척시킨 디오판토스의 대수적 처리와 동떨어진다."고 비판하기도 한다(B. L. van der Waerden, 1980; J. Derbyshire, 2006, p.51). 알콰리즈미의 대수적 업적은 등식의 개념을 관심의 대상으로 내세우고, 이것들을 한 미지수에 대한 일차와 이차형태로 분류한 다음, 각각의 해법을 제시했다는데 있다. 그가 사용한 수는 roots(bx), squares(ax^2), numbers(디르헴)이고 방정식을 모두 여섯 가지로 분류했으며 이를 현대 기호로 쓰면 ① $ax^2 = bx$, ② $ax^2 = b$, ③ $ax = b$ ④ $ax^2 + bx = c$ ⑤ $ax^2 + c = bx$ ⑥ $ax^2 = bx + c$ $(a, b, c > 0)$이다(F. Rosen, 1923, p.6-13). 그는 ④, ⑤, ⑥을 혼합형(composite)으로 불렀다. 그가 사용한 이차방정식 $x^2 + 21 = 10x$, $3x + 4 = x^2$, 그리고 $x^2 + 10x = 39$ 를 Abu Kamil Shoja ibn Aslam(925년 경)등의 저술가들은 출처를 달았으나 오마르 카이얌(Omar Khayyam, 1050-1123)은 위 세 방정식을 예로는 들지만 이미 고전적인 것이 되어 그 출처를 언급하지 않는다(L. Karpinski, 1915). 알콰리즈미는 처음으로 0(zero)을 사용하였으며 휴즈(H. Hughes, 1986)는 한쪽을 모두 0으로 한 전략은 17세기 전에는 나타나지 않는데, 아마도 이와 같은 전략은 헤리엇(T. Harriot, 1560-1621)이 처음 사용한 것이라고 주장한다.

수학의 발전에서 산술만큼이나 중요한 것은 대수학을 체계적으로 다루었다는 것이다. 유클리드는 기하적으로만 다루었지만 알콰리즈미는 이차방정식을 대수적으로 그리고 기하적으로 다루었으며 클라인(M. Kline, 1972)은 알콰리즈미의 대수학은 브라마굽타(Brahmagupta, 7세기)의 업적뿐 만이 아니라 바빌로니아와 그리스의 영향으로 창시된 것으로 설명한다. 디오판토스와 알콰리즈미를 비교하면 단순한 우연이지만 3세기 말에 디오판토스는 그리스 대수의 높은 단계를 우리들에게 이어준 것이라면 9세기 초에 알콰리즈미는 보다 근원적인 단계를 상세히 기술한 것이다. 또한 유럽은 대수학을 디오판토스의 저서를 통하여 접한 것이 아니라 12세기에 알콰리즈미의 저서를 크레모나의 게르하르트(Gerhard of Cremona, 1114-1187)와 체스터의 로버트(Robert of Chester, 12세기)의 두 라틴어 번역판으로 접하게 된다(S. Gandz, 1936). 실제, 중세에 가장 유명한 수학자 피보나치(L. Fibonacci, 1170-1240)와 12세기 수학저술가들이 사용하는 용어(radix. census, numerus)는 각각 알콰리즈미의 용어 root, square, number로 그들은 아랍수학의 영향을 받은 것이 틀림없다(S. Gandz, 1936).

그의 천재적 업적에 대한 올바른 소개를 통하여 학생들은 200년 동안 번역운동(D. Gutas, 2013)을 한 압바스 왕조나 이슬람 수학과 천문학의 위대함을 접할 수 있다고 본다. 칼리프 알 만수르(재위 기간: 754-775)는 외국어 책을 아라비아어로 번역시킨 첫 칼리프이며 유클리드의 원의 정의(Euclid, 1956, Book I, Definition 15)를 바그다

드 도시계획에 적용한 것으로 보인다(D. Gutas, 2013; J. Lyons, 2009). 알-핫자주(al-Hajjāj ibn Yūsuf)가 알 라시드(재위기간: 786-809)의 요청으로 가장 중요한 번역 중에 하나인《원론》을 최초로 완역하고 칼리프 알 마문의 요청으로 다시 새로운 번역판을 내 놓는다. 후나인 이븐 이스하크(Hunayn ibn Ishāq)도《원론》의 번역에 참여하는데 그의 번역본은 지혜의 전당에서 연구 중인 타비트 이븐 쿳라(Thabit ibn Qurra, 836-901)에 의하여 매우 훌륭하게 보완 번역된다(J. Al-Khalili, 2010). 한편, 알-핫자주의 아랍어 판은 아델라르드(Adelard)에 의하여 라틴어로 번역되고, 후나인 이븐 이스하크와 타비트 이븐 쿳라의 아랍어 판은 헤르만(Hermann)과 크레모나의 게르하르트(Gerhard of Cremona)에 의하여 라틴어로 번역되어 유럽에 소개된다(R. Lorch, 2001). 압바스 왕조 두 학자의 번역 덕택에 유클리드의《원론》은 오늘날 존재할 수 있었다. "알 만수르는 왜 유클리드의 원론에 있는 원의 정의를 바탕으로 바그다드를 건설했을까?"를 과제로 지도했는데, 중학교 1학년 학생 이○○은 이를 8쪽 보고서로 작성하고 느낀 점을 다음과 같이 기술하고 있다. 편향되지 않은 수학사 활용의 교육적 의미를 찾을 수 있다고 본다.

> (...) 이슬람 제국의 발전 역사 안에 수학의 역사가 함께 들어 있다는 사실을 알게 된 것은 이번 연구를 통해서 이다. 이슬람은 테러를 자행하는 지역으로만 알고 별로 관심을 두지 않았는데 이슬람 제국의 발달이 수학의 발달을 가져왔다는 사실을 알면서 이슬람 제국에 대한 인식이 달라졌다고 할 수 있다. (...)

3.8 데카르트(R. Descartes, 1596-1650)와 직교좌표

많은 교과서가 '파리로부터 생각해 낸 좌표평면'(김서령 외, 2012a) 또는 "파리는 좌표평면 위에 존재한다."(정상권 외, 2012) 등으로 학생들에게 매우 흥미로운 제목과 내용을 제공하고 있다. 고등학교의 경우 황선욱 외(2014c)는 에세이 '변화를 추구한 데카르트', '좌표평면'을 모두 3쪽으로 하여 "데카르트가 우리가 사용하는 좌표의 개념을 처음 고안했다."고 하며 그 아이디어를 천장의 파리에서 찾고 있다.

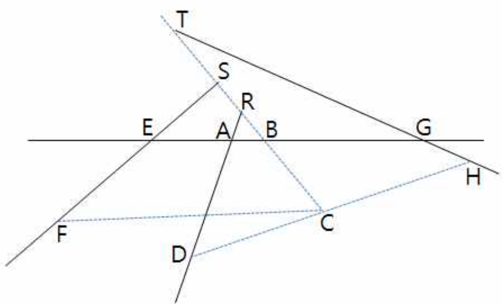
데카르트는 우리나라 수학 교과서들이 천장에 파리와 함께 제공하는 직교하는 두 축이나 좌표를 사용하지 않았다(R. Descartes, 1954, p.51; van der Waerden, 1985, p.74-75; J. Grabiner, 1995). y축을 사용하지 않았으며 특히, x와 y의 양의 값만 다루었고 그의 저서에서 좌표(coordinate)라는 용어를 사용하지 않았는데, 현재 사용하고 있는 좌표는 라이프니츠(1692년)의 덕택이다(D. Struik, 1986, p.154; D. Burton, 2007).

아폴로니우스는 그의 세 번째 책에서 '3개 또는 4개 선의 자취 문제'를 언급하며 유클리드와 본인 자신 또한 이 문제를 풀지 못했다고 기술하고 있다(Merzbach·Boyer, 2011). [그림 Ⅲ-13]은 4개의 실선 AB, AD, EF, GH가 주어져 있고, 그리고 주어진 상수 α에 대하여 $\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}=\alpha\,\mathrm{CF}\cdot\mathrm{CH}$를 만족하는 점 C의 자취를 구하는 문제이다. 데카르트는 A를 원점으로, 그리고 직선 AB를 가로축으로 하고 세로축은 설정하지 않았다. 데카르트는 선분 AB와 BC의 길이를 각각 x, y로 불렀으며 따라서 점 C는 x와 y에 의하여 결정된다(R. Descartes, 1954, Book II, p.76). 이로 인하여 반 데어 배르덴(van der Waerden, 1985)은 "직교좌표(orthogonal coordinate)를 데카르트의 라틴명을 따라 Cartesian coordinate로 불리는 것은 매우 이상하다."고 주장한다.

국내에서 천장의 파리를 언급한 대중서(김용운·김용국, 1991)가 나오고 이를 여러 교과서가 참고하여 데카르트가 파리를 보고 좌표를 고안한 것이 정설로 자리 잡았다고 판단된다. 김용운 김용국(1991)은 천장에 직교좌표와 파리를 그리고 "(....) 팔베개를 하고 아침햇살이 가득한 막사의 천정을 한가롭게 쳐다보고 있던 그의 눈에 파리 한 마리가 이리저리 움직이고 있는 것이 보였다. (...) 그리하여 움직이는 점과 (x, y)로 되는 식을 결부 시킨 것이다."로 소개한다. 한편, 프랑스어에서는 x의 빈도수가 더 높은데 데카르트가 미지수를 주로 x로 사용한 이유를 류희찬 외(2013a; 2014c)는 "(...) 데카르트는 미지수를 나타내는 데에 그중 어느 것을 써도 무방하다고 대답했다. 그러자 인쇄업자는 대부분의 미지수를 x로 나타냈는데, 일반적인 프랑스어에는 y와 z가 x보다 더 자주

쓰였기 때문이었다.”로 거꾸로 잘못 설명하고 있다.

데카르트는 그의 저서《La Geometrie, 1637》에서 지수(known quantity) a, b, c 와 미지수(unknown quantity) x, y, z 를 아무런 설명 없이 사용하였다(R. Descartes, 1954). 독자들이 Book III를 살펴보면, 카조리(F. Cajori, 1928, p.381)가 지적한 데로, x가 상대적으로 많이 쓰이고 있는 것을 확인 할 수 있다. 1629년 전에 준비하던 타원학(Cartesian ovals)에 관한 논문에서 그는 x만 미지수로 사용하고 y는 매개변수(parameter)로 사용하여 곧 이어 x, y, z 를 미지수가 아닌 지수로 사용한다. 시기적으로 1629-1640년에는 주로 x, y를 미지수로 사용하고 특히 Book III에서는 x를 주로 사용한다. 데카르트는 x를 초기에는 미지수로 그리고 잠깐 지수로 그리고 다시 미지수로 사용한다. 카조리(F. Cajori, 1928)에 따르면, 일부 수학사가들은 데카르트가 주로 x를 사용한 이유에 관심을 기울이는데 x와 그가 사용했던 독일어와의 유사성 때문에《La Geometrie, 1637》의 후반부에서 데카르트가 x를 주로 사용했다고 주장하기도 하며, 프랑스어나 라틴어에는 y, z 보다는 x의 빈도수가 높아 x를 위한 활자가 더 많기 때문이라고 주장하기도 한다. 카조리(F. Cajori, 1928)는 “결론적으로 데카르트가 y나 z 보다 x를 주로 사용한 이유에 대한 명백한 증거는 없다.”고 말한다.



[그림 III-13] 아폴로니우스・데카르트의 자취문제

3.9 네이피어(John Napier, 1550-1617)와 그의 로그

이강섭 외(2014b)는 ‘천문학자의 수명을 두 배로 연장시킨 네이피어’로 그리고 류희찬 외(2014b)는 ‘천문학자의 수명을 두 배로 늘려준 로그!’ 등으로 짧은 언어를 사용하여 로그를 소개하고 그 본질에 대하여는 언급을 하지 않고 있다. 이준열 외(2014a)는 ‘네이피어 로그’의 에세이를 통하여 그의 기하적 방법을 설명하고 있는데 많은 교과서들이 언급하는 천문학자의 수명이야기는 라플라스(Pierre-Simon de Laplace, 1749-1833)가 말한 “계산 작업을 줄여주어, 천문학자의 삶을 두 배로 했다(by shortening the labors, doubled the life of the astronomer).”를 인용한 것이다(V. Kaze, 2009, p.457). 이와 같은 주장이 나온 이유는 17세기 초반 천문학에 3가지 중요한 변화가 일어나는데, 그 중 첫 번째가 천문학자들의 광범위한 로그의 사용이다. 로그의 사용은 계산 시간을 줄여주는 것 뿐 만이 아니라, 예를 들어 혜성의 위치를 찾는데, 계산의 정확성을 획기적으로 높여주기 때문이다. 매우 큰 수의 곱셈과 나눗셈은 항상 오차를 동반하지만 로그를 사용하면 주어진 계산이 덧셈과 뺄셈으로 바꾸게 되어 상대적으로 오차를 줄일 수 있다(T. Heidarzadeh, 2008, p.84)

고 바빌로니아인들은 60진법으로 $1\ 40\,(=100)$ 또는 $3\ 45\,(=225)$ 등의 수에 대하여 10승까지 구한 거듭제곱표(table of powers) Ist. O 3816, 3826, 3862, 4583, IM 73355, BM 22706 등을 만들어 로그값을 계산한 것으로 추정된다(O. Neugebauer, 1957; J. Friberg, 2005, 2007a; Merzbach・Boyer, 2011). 기원전 1700년경으로 추정되는 점토판에 복리 20%로 원금의 2배가 되는 기간을 구하라는 문제 $1.2^x = 2$(H. Eves, 1990)에서 고 바빌로니아인들은 실제 값 3.8018에 매우 가까운 $3;47,13,20 = 3 + 47/60 + 13/60^2 + 20/60^3 \fallingdotseq 3.7870$을 해로 사용한다. 이는 거듭제곱 $(1;12)^3$ 과 $(1;12)^4$ 을 선형적으로 이용하여 얻은 것임에 틀림없다(Merzbach・Boyer, 2011).

네이피어(1614년)는 (1) 움직이는 점의 기하・역학적(geometrico-mechanical) 개념과 (2) 등차수열과 등비수열의 관계에 기반을 두어 로그를 도입하였다(F. Cajori, 1913). 오일러는 간결하게 ‘$\log y = z$, $\log v = x$이면

$\log\sqrt{vy} = (x+z)/2$'로 설명한다. 한편, 브래들리(R. Bradley, 2007, p.395-408)에 따르면 쌍곡선함수의 넓이를 이용한 로그함수의 정의는 그레고리(Gregory of St. Vincent, 1584-1667)가 《Opus Geometricum, 1647》에서 도입하였고 지수함수의 역함수로서 로그함수는 월리스(J. Wallis, 1616-1703)가 《Algebra, 1685》에서 도입했는데 후자는 1748년에 출간된 오일러의 저서《Introductio in analysin infinitorum》에 의하여 널리 알려졌다. 오일러는 로그함수의 정의역을 음수와 복소수까지 확장시켰다.

이제 네이피어의 방법을 간략히 살펴보자(F. Cajori, 1913; R. Bradly, 2007; J. Suzuki, 2002). 먼저, $v = 10^7$에 대하여 등비수열과 등차수열을 다음과 같이 각각 대응시키자.

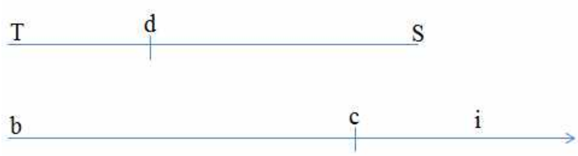
$$N: = v,\ v(1-1/v),\ v(1-1/v)^2, \ldots, v(1-1/v)^v, \ldots$$

$$L: = 0,\quad 1,\quad 2\quad, \ldots,\quad v\quad, \ldots$$

이때 L을 N의 네이피어 로그(Napier logarithm)라 하며 $L = Log\ N$으로 나타낸다. 네이피어는 밑(base)을 사용하지 않았다. 현대적 입장에서 밑을 구하려면 언급한 두 수열의 각 항을 10^7으로 나누어야 한다.

$$Log\ (1-10^{-7})^{10^7} = 1 \text{ 또는 } (1-10^{-7})^{10^7} \fallingdotseq \lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n = 1/e$$

이므로 네이피어 로그의 밑은 $1/e$이다. 네이피어가 선택한 기하적 접근을 살펴보자. 선분 TS와 반직선 bi에 대하여([그림 Ⅲ-14]) 점 d는 T를 출발하여 TS를 따라 S까지 거리에 비례하는 감속 운동을 하고, 같은 시간에, 초속이 d의 초속과 같은, 점 c는 b를 출발하여 등속도로 운동을 한다고 하자. 네이피어는 bc의 거리를 dS의 로그(logarithm)라 부른다. 당시에는 미분방정식이 알려지지 않아 네이피어는 미분방정식을 사용하지 못했다(E. Gonzalez-Velasco, 2011). 이제, $dS = x$, $bc = y$, $\mathrm{TS} = 10^7$, 그리고 점 d의 초속을 10^7이라 하자. 따라서 $dx/dt = -x$, $dy/dt = 10^7$이고 $dy/dx = -10^7/x$ 또는 $y = -10^7\ln(cx)$ (여기서 c는 상수). 한편, $x = 10^7$일 때, $y = 0$이므로 $c = 10^{-7}$ 이고 $y/10^7 = \log_{1/e}(x/10^7)$. 이로부터 TS와 bi를 10^7으로 나누면 네이피어 로그는 밑이 $1/e$ 임을 다시 한 번 확인할 수 있다(Merzbach·Boyer, 2011). 한편, 네이피어 로그는 현재 우리가 사용하는 로그와 그 성질에서 같지 않다. 예를 들면 $Log N_1 + Log N_2 = Log(N_1 N_2 / 10^7)$이다.



[그림 Ⅲ-14] 네이피어 로그의 기하적 도입

중등 수학교과서 집필진은 '천문학자의 수명을 두 배로 연장시킨 네이피어' 등으로 흥미 위주의 짧은 언어로 소개하기 보다는 네이피어가 어떤 의도와 방법으로 로그를 도입했는지, 당시 천문학 분야에 어떤 영향을 끼쳤는지(T. Heidarzadeh, 2008), 그리고 중등 수학교과서에서 다루고 있는 로그와 네이피어 로그가 무엇이 다른지를 기술하는 것이 바람직하다고 본다.

3.10. 뉴턴(I. Newton, 1642-1727)·라이프니츠(G. W. Leibniz, 1646-1716)와 미적분 창안

황선욱 외(2014a, p.132-133)는 '적분법의 기초를 제시한 카발리에리'라는 제목 하에서 1635년에 도형의 넓이와 부피를 구하는 방법을 소개하고 카발리의 원리는 본질적으로 정적분의 개념과 같은 것으로 기술한다. 김창동 외(2014a; 2014b)는 '적분이란 무엇인가?'란 에세이에서 미적분의 선구자로 라이프니츠와 뉴턴을 소개하면서 '미분법의 시작'이란 에세이에서 뉴턴과 라이프니츠를 미분법 발전에 획기적인 공헌을 한 사람으로 설명하고 이들 간에 누가 먼저 미적분을 고안했는지를 다루고 그 해답을 이들의 독립적인 발견으로 설명한다. 한편, 신항균 외

(2014)는 “적분은 넓이를 구하는 것에서 출발하여 부피를 구하는 것으로 발전하였으며 포도주 통의 부피를 구하기 위하여 무수히 많은 원반으로 자르고 그 부피를 더하는 방법을 연구하였다.”를 제시하면서 케플러를 소개하고 있다.

교과서는 미적분의 발견을 유럽에 두고 있다. 뉴턴은 미적분의 관한 그의 견해를 1665년부터 1670년에 이르러 완성하였다. 뉴턴의 중심 개념은 멱급수(power series)에 두고 있으며 이는 무한소수의 표현으로부터 유추한 것이다. 카즈는 미적분의 발견(invent)을 뉴턴과 라이프니츠로 하는 것은 잘못된 역사로 수정되어야 한다고 말한다(V. Katz, 1995).

> (...) 따라서 위험성은 없는데, 우리는 미적분학을 뉴턴과 라이프니츠가 창안했다는 서술을 역사책에서 제거하고 다시 써야 한다.

물론 뉴턴과 라이프니츠는 미분과 적분의 주제를 매우 다른 아이디어로 통합(unifying)하고 둘 사이의 관계를 보였으며 그리고, 클라인(F. Klein, 2012)에 따르면, 1700년대에 이루어진 미적분의 발전은 역학과 천문학 전체를 심층 연구할 수 있는 가능성이 새로 열렸다. 이 가능성은 라그랑주의 《해석적 역학론》과 라플라스의 《천체역학론》에서 정점을 이루었다. 세계에서 제일 오래된 대학인 알-아즈하르의 역사가 982년부터 시작되어 수학과 천문학 등의 발전을 가져왔고(H. Corbin, 1997), 1000년에 이집트에서는 주로 삼차이하의 다항식의 정적분이 발전되었으며 14세기 인도에서는 sine, cosine, arctangent의 멱급수 표현이 발전되었다(D. Bressoud, 2002). 장기중세를 통해 가장 주목해야할 수학자인 동시에 자연학자인 이븐 알 하이탐((ibn al-Haytham, 965-1039)은 파티마조 6대 칼리프 알 하킴(al-Hākim, 재위기간: 996-1022)의 요청으로 나일강의 범람을 해결하기 위해 카이로에 머물게 되었으며 그는 이집트에서 1000년에 회전체의 부피를 정칙분할(regular partition)로 구하는 구분구적법을 창안하였다(V. Katz, 1995). 거듭제곱수의 합을 구하는 공식을 유도하는데 이븐 알 하이탐이 사용한 주된 아이디어는

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^{k} = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^{k}\right) \qquad (*)$$

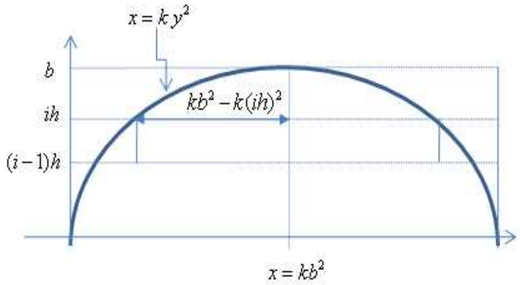
이고 이 식을 직접 사용하지는 않고 $n=4$와 $k=1,2,3$을 사용하였다. 그러나 각 k에 대하여 n에 관한 수학적 귀납법을 적용하면 일반화할 수 있으며 $k=3$과 $n=4$에 관하여 제곱과 세제곱을 다음과 같이 보였다.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{n}{3}+\frac{1}{3}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n}{4}+\frac{1}{4}\right)n(n+1)n = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

또한, 이븐 알 하이탐은 $n=4$를 보이면서 임의의 n에 대하여 보일 수 있다고 했는데, 위 두 식과 (*)에서 다음을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[(n+1)n-\frac{1}{3}\right]$$

이제 이븐 알 하이탐이 이들 식을 이용하여 정적분을 어떻게 구하였는지 알아보자(V. Katz, 1995). 직선 $x=kb^2$을 축으로 포물선 $x=ky^2$을 회전하여 얻는 회전체의 체적은 두께가 $h=b/n$인 n개의 원판으로 구할 수 있다([그림 Ⅲ-15]). i번째 원판의 반경은 $kb^2-k(ih)^2$이므로 원판의 체적은 $\pi h\,(kh^2n^2-ki^2h^2)^2 = \pi k^2h^5(n^2-i^2)^2$이고 따라서 회전체의 체적은 n개의 원



[그림 Ⅲ-15] 이븐 알 하이탐의 구분구적법

판의 체적을 더한 것 $\pi k^2 h^5 \sum_{i=1}^{n-1}(n^2-i^2)^2 = \pi k^2 h^5 \sum_{i=1}^{n-1}(n^4-2n^2 i^2+i^4)$ 으로 근사적으로 표현된다. 이븐 알 하이탐은 제곱과 네제곱에 관한 수열의 합 공식을 사용하여 $\sum_{i=1}^{n-1}(n^4-2n^2 i^2+i^4) = \frac{8}{15}(n-1)n^4+\frac{1}{30}n = \frac{8}{15}n\cdot n^4 - \frac{1}{2}n^4-\frac{1}{30}n$을 얻고 따라서 $\frac{8}{15}(n-1)n^4 < \sum_{i=1}^{n-1}(n^2-i^2)^2 < \frac{8}{15}n\cdot n^4$.

이제, $\pi k^2 h^5 n\cdot n^4$ 과 $\pi k^2 h^5(n-1)n^4$ 을 해석하면 맨 아래 반경이 kb^2이고 두께가 h인 원판을 n개 쌓은 원통의 체적은 $\pi h(kb^2)^2\cdot n = \pi k^2 h^5 n\cdot n^4$이고 여기서 맨 아래 원통의 체적을 제외하면 $\pi k^2 h^5(n-1)n^4$ 이다. 따라서 회전체의 체적은 전체 원통 체적의 8/15보다 적고 아래 원통을 제외한 원통 체적의 8/15 보다 크다. 이때 n을 충분히 크게 하면 맨 아래 원통 체적을 원하는 만큼 적게 할 수 있다. 따라서 회전체의 체적은 원통의 8/15이다. 학교수학(y축과 평행한 직선을 회전축으로)에서 사용하는 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\int_0^b A(y)\,dy = \int_0^b \pi(kb^2-ky^2)^2\,dy = \frac{8}{15}\pi k^2 b^5$$

이븐 알 하이탐의 정적분법은 뉴턴보다 600년 이상 앞선 것으로 우리가 학교수학에서 회전체를 포함하여 구분구적법을 지도할 때, $\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$ 등을 사용하고 그 극한을 구하는 것은 이븐 알 하이탐의 방법 그대로이다. 그러나 교과서는 그 공을 뉴턴이나 라이프니츠에서 찾고 있다.

우리는 학교수학에서 미적분을 '뉴턴과 라이프니츠의 발견' 등으로 소개해온 것을 되돌아보아야 한다. 이슬람 수학을 배제하고 고대 그리스에서 유럽으로 수학문화의 전이를 소개하는 전형적인 예이다. 미적분과 관련된 인도와 이슬람 수학을 교과서에 소개하는 노력이 필요하다.

3.11. 뉴턴과 사이클로이드

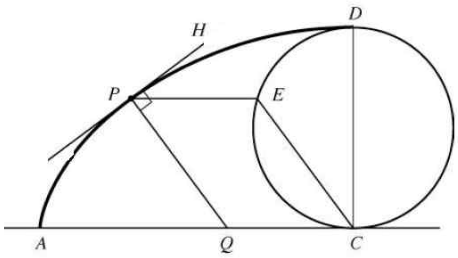
우정호 외(2014)는 사이클로이드 곡선의 예를 우리나라 전통 가옥의 기와에서 찾으며 김창동 외(2014c)는 독수리 그림을 이용하여 사이클로이드 곡선을 요한 베루누이(Johann Bernoulli, 1667-1748)의 이야기로 설명하고 있다. 정상권 외(2014)는 '녹슬지 않은 천재성'이란 제목으로 뉴턴이 '최속강하선'을 풀어 익명으로 제출했다고 던햄(W. Dunham, 1991)을 출처로 하여 소개한다. 그러나 뉴턴은 최단 경로 문제를 푼 것이 아니라 주어진 사이클로이드 곡선을 이용하여 또 다른 사이클로드 곡선을 어떻게 만드느냐를 보인 것이다(J. Martin, 2010). 또한, 전통기와의 곡선을 사이클로이드로 접근하려면 반타원(semiellipse)이 사이클로이드와 매우 유사하기 때문에 이에 합당한 참고문헌을 제시해야 한다(J. Martin, 2010).

수직선상에 있지 않은 지면 위 두 점 A, B에 대하여 A에서 B에 이르는 많은 직선, 곡선 등이 존재한다. 이제 공을 A에서 곡선을 따라 B까지 굴린다고 상상해 보자. 가장 짧은 시간이 소요되는 곡선을 찾는 문제가 1696년 《Acta Eruditorum》에 요한 베루누이에 의하여 제안되는데, 이것이 우리가 잘 알고 있는 사이클로이드 곡선 문제이다. 중등 수학교과서는 보벨리(C. de Bouvelles)가 1501년 처음 도입한 원을 이용한 방법으로 사이클로이드 곡선을 작도한다(J. Martin, 2010). 1638년 초에 데카르트는 사이클로이드를 접선을 이용하여 작도하며(E. Whitman, 1943), 곡선상의 임의의 점 P에서 수평선이 원과 만난점을 E, 그리고 EC와 평행한 선분을 PQ라 하자. 이제 PH를 PQ의 수선으로 잡으면 접선이 된다([그림 Ⅲ-16]).

1686년에 라이프니츠가 이 곡선을 식 $y=\sqrt{2x-xx}+\int dx/\sqrt{2x-xx}$ 으로 나타내어 해석기하학에서 사이클로이드 관련 이론은 급속한 발전이 이루어진다(E. Whitman, 1943; M. Kline, 1972).

던햄(W. Dunham, 1991)이 다룬 일화는 작가의 상상력이 가미된 것으로 교과서 집필진은 대중서에서 말하는

에피소드를 진위를 확인하지 않고 소개할 것이 아니라 사실에 기반을 둔 내용을 제공해야 하며 오히려 사이클로이드에 관한 데카르트나 뉴턴의 방법을 교과서에 어떻게 소개할지 고민하는 것이 바람직하다고 본다.



[그림 III-16] 데카르트의 사이클로이드

참고로 현수선은《기하와 벡터》에서 언급되기도 한다. 양 끝을 매단 줄이 만드는 곡선에 대하여 가장 많이 언급되는 수학자는 갈릴레오이며, 그는 이를 포물선으로 주장하였다(R. Osserman, 2010; M. Livio, 2009). 야코프 베루누이는 1690년 저널《Acta Eruditorum》에 균질한 체인이 걸려서 만든 곡선을 구하는 문제를 공개했으며 호이겐스, 라이프니츠, 요한 베루누이, 그리고 야코프 베루누이가 풀이를 제시한다(F. Cajori, 1991, M. Livio, 2009). 한편, 현수교에서 현수선이 포물선으로 어떻게 변형되는지 간단히 알아보자. 황선욱 외(2014b)는 에세이 '현수교 설계와 포물선'을 다루고 있다. 초기조건 $y(0)=a$를 사용하면 $y=(|T|/\rho)\cosh((\rho/|T|)x)+a-|T|/\rho$ (여기서 T는 $(0,a)$에서의 수평장력벡터, ρ는 케이블의 밀도). 한편, W를 단위 길이에 해당하는 상판의 하중이라 하자. 이때, 케이블의 무게는 무시되어 간단한 미분방정식 $dy/dx = Wx/|T|$를 얻고, 새로운 초기조건 $y(0)=0$을 쓰면 이차곡선(main cable) $y=(W/|T|)x^2$을 얻는다(A. Hahn, 1998). 한편, 일부 교과서는 현수선과 관련하여 게이트웨이 아치(Gateway Arch)를 서로 다른 식으로 사용하고 있다. 정확한 수치를 사용하기 위하여 오서만(R. Osserman, 2010)의 논문을 참고하여 보자.

3.12 카르다노(G. Cardano, 1501-1576)와 삼차방정식

이강섭 외(2014a)는 에세이 "삼차방정식의 해법에 얽힌 숨은 이야기"에서 카르다노가 삼차방정식의 해법을 처음 발표했으며 근의 공식을 카르다노의 공식이라 부른다고 소개하고 타르탈리아와의 얽힌 이야기를 제공하고 있다. 황선욱 외(2014c)는 3쪽을 사용하여 아벨, 갈루아를 다루고 카르다노의 업적을 참고문헌의 제시 없이 제공하고 있다. 방정식의 역사를 유럽 중심으로 보고 있는 것이다.

삼차방정식의 역사는 천문학과 관련이 깊다(I. Thomas, 1993; A. Aaboe, 1998). $\sin 3^\circ$를 구하는 것은 상대적으로 쉬우며 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$이므로 $\sin 3^\circ \fallingdotseq a$를 알 때, $4x^3-3x+a=0$의 근은 $\sin 1^\circ$이다. 예를 들어, 수학자 아리스타르쿠스 (Aristarchus, 310-230 BCE)는 반달일 때, 달-태양-지구의 각을 3°로 추정(Aristarchus의 가설 4)하고 당시에 잘 알려진 삼각비례부등식 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ $(0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ)$(즉, $x\to 0$일 때, $\sin(x)/x$는 증가)을 이용하여 근삿값 $1/20 < \sin 3^\circ < 1/18$을 구한다(T. Heath, 2004). 이를 바탕으로 그는 지구에서 태양까지의 거리가 지구에서 달까지 거리의 18배에서 20배가 된다고 주장하였다. 실제는 약 400배이다. 한편, 알렉산드리아에서 활동한 이집트인 수학자 프톨레미(Ptolemy, 100-178)는《알마게스트(Almagest)》Book I에서 다룬 현표에서 반지름이 60인 원의 중심각이 12°일 때, 현의 길이 crd는 등식 $crd\,12^\circ = crd(72^\circ - 60^\circ)$에서 합차공식을 사용하여 구한 후 반각공식을 이용하여 차례로 중심각이 $6^\circ, 3^\circ$, 1.5°, 0.75°인 현의 길이를 구한다. 여기서 $crd\,3^\circ$를 알 때, $crd\,1^\circ$를 구하는 문제는 삼차방정식(또는 각의 삼등분)의 문제이므로 이를 피해 앞서 구한 $crd\,1.5^\circ = 1;34,15\,(=377/240)$, $crd\,0.75^\circ = 0;47,8\,(=707/900)$와 아리스타르쿠스가 사용한 삼각비례부등식을 사용하여 $crd\,1^\circ = (2/3)crd\,1.5^\circ = 1;2,50\,(=377/360)$으로 계산한다(Ptolemy, 1998, p.96; A. Aaboe, 1998, p.120-121; V. Katz, 2009). 삼차방정식 $4x^3-3x+a=0$의 수치해석적 해법은 위대한 이슬람(이란) 수학자이자 천문학자인 알 카시(al-Kāshī, 15세기)에 의하여 1429년에 성공적으로 이

루어진다.

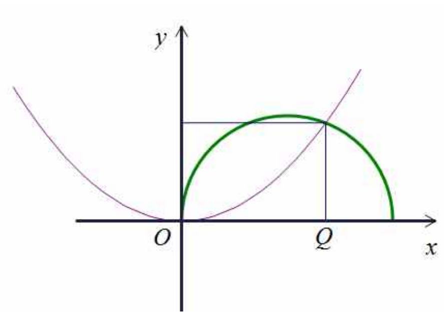
먼저, 삼차방정식의 기하적 해법에 대하여 알아보자. 이란 시인이자 수학자 오마르 카이얌(O. Khayyam, 1048-1131)은 일·이·삼차방정식을 이미 해결된 것을 포함하여 25가지로 분류하였다(K. Mardia, 2009; Dahan-Dalmedico·Peiffer, 2010)(〈표 III-1〉 참고). 이 가운데 삼차방정식을 19가지로 분류하고, 근을 구하는 데 거듭제곱근의 필요성은 인식했지만 성공하지 못하고 대신 기하학적 방법으로 양의 근을 표현했다. 이는 알투시(Sharaf al-Din al-Tūsī, 12세기)를 거쳐 17세기 데카르트와 페르마의 대수학과 기하학의 관계로 발전한다(R. Rashed, 2015).

오마르 카이얌은 미지수 x(side, 또는 root), x^2(square), x^3(cube) 등으로 사용하였다. 예를 들어 'A cube and squares are equal to roots and numbers'를 현대 기호로 쓰면 $x^3 + ax^2 = bx + c$이다(J. Berggren, 1986).

<표 III-1> 현대 기호를 사용한 오마르 카이얌의 분류

대분류	중분류	소분류		
단순식	이항식	1. $a=x$	2. $a=x^2$	3. $a=x^3$
		4. $bx=x^2$	5. $cx^2=x^3$	6. $bx=x^3$
복합식	삼항식	7. $x^2+bx=a$	8. $x^2+a=bx$	9. $bx+a=x^2$
		10. $x^3+cx^2=bx$	11. $x^3+bx=cx^2$	12. $cx^2+bx=x^3$
		13. $x^3+bx=a$	14. $x^3+a=bx$	15. $bx+a=x^3$
		16. $x^3+cx^2=a$	17. $x^3+a=cx^2$	18. $cx^2+a=x^3$
	사항식	19. $x^3+cx^2+bx=a$	20. $x^3+cx^2+a=bx$	21. $x^3+bx+a=cx^2$
		22. $cx^2+bx+a=x^3$		
		23. $x^3+cx^2=bx+a$	24. $x^3+bx=cx^2+a$	25. $x^3+a=cx^2+bx$

현대적 기호와 좌표를 사용하여 $x^3+px=q\ (p,q>0)$의 풀이를 알아보자. $y=(p)^{-1/2}x^2$ (포물선)으로 치환하면(참고로 카르다노는 $y^3+py+q=0$에서 $y=u-(p/3u)$로 치환한다), 양변에 x를 곱한 $x^4+px^2=qx$는 $py^2+px^2=qx$ 또는 $(x-q/2p)^2+y^2=(q/2p)^2$인 원의 방정식으로 바뀐다. 따라서 삼차방정식 $x^3+px=q\ (p,q>0)$의 양의 근은 포물선 $y=(p)^{-1/2}x^2$과 원 $(x-q/2p)^2+y^2=(q/2p)^2$의 교점의 x축 좌표이다. 예를 들어, $p=4,\ q=8$이면 $y=(1/2)x^2$, $(x-1)^2+y^2=1$이다. 삼차방정식 $x^3+4x=8$의 근을 현대적 좌표계로 보면 [그림 III-17]에서 $\overline{\mathrm{OQ}}$이다. $x^3+b^2x=b^2c$를 비례식을 사용하여 기하적으로 얻는 방법은 클라인(M. Kline, 1972, p.194)을 참고해 보자. 카르다노는 방정식 $x^3+px=q$의 근은 다음과 같다(J. Berggren, 1986).



[그림 III-17] 오마르 카이얌의 기하적 해법

$$x=\sqrt[3]{q/2+\sqrt{(q/2)^2+(p/3)^3}}-\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{(q/2)^2+(p/3)^3}}\ .$$

한편, 이란 수학자이자 천문학자인 알 카시(al Kāshī, 15세기)는 《Treatise on the Chord and the Sine, 1429》에서 $\sin 3^\circ$를 충분히 원하는 만큼 알고 있는 상태에서 $\sin 1^\circ \fallingdotseq 0.17452406121$을 소수점 이하 8째 자리까지 정확한 근삿값을 구하였다(A. Aaboe, 1954). 당시 이슬람 천문학자들이 사용한 삼각함수 $\mathrm{Sin}\,\alpha$는 $1{,}0\,\sin\alpha$

로 반지름이 60인 원에서 중심각이 2α인 현의 절반이다. 식 $4x^3 - 3x + \sin 3^\circ = 0$에서 $p := (1/3)\sin 3^\circ$, $f(x) := (4/3)x^3 + p$, $x_n := 0.01a_1a_2\cdots a_n$ 이라면 알 카시가 사용한 방법은 반복법(iteration method)으로 x_0에서 출발하여 $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$, ... , $x_n = f(f(f(\cdots f(x_0)\cdots)))$을 얻는다. 계산기를 사용하여 $x_0 = 0.01$에서 시작하면 $x_4 = 0.017452406437273\cdots$로 소수점 이하 13째 자리까지 $\sin 1^\circ$의 정확한 근삿값을 구할 수 있다.

16세기에 많은 수학자들이 방정식의 해를 구하는데 매진하였다. 대표적인 예가 치환 $x = y-(a/3)$, $y = u-(p/3u)$에 의한 카르다노의 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 풀이이다. 봄벨리(R. Bombelli, 1526 -1572)는 카르다노의 식을 사용하여 $y^3 - 15y - 4 = 0$에서 $y = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$을 구하고 $y=4$가 방정식 $y^3 - 15y - 4 = 0$을 만족한다는 것을 몇 개의 수를 대입하다 보면 얻을 수 있다. 봄벨리는 $\sqrt{-1}$ 등의 대수적 전개가 필요했으며 이는 복소수를 자연스럽게 받아들이는 동기가 되었다(Ngo·Watson, 1998; J. Derbyshire, 2006; P. Nahin, 1998).

행렬환은 대표적인 비가환이며 행렬환의 태동은 1843년 10월 16일 해밀턴(R. Hamilton, 1805-1865)이 비가환체(division algebra)의 예로 처음 고안한 사차원수(the quaternions) $\mathbb{H} = \{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$(여기서 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$)에서 찾을 수 있다(van der Waerden, 1985). 해밀턴은 복소수의 연산인 회전의 합성을 공간에서 시도하다가 사차원수를 정의하게 되었고(1843년)(J. Suzuki, 2002) 이를 계기로 1890년대에 Cartan, Molien, Frobenius, 그리고 1907년 Wedderburn에 의하여 행렬이 최종 정립되었다. 즉, 실수, 복소수, 사차원수는 행렬이라는 것이다. 예를 들면, 복소수체 $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$는 실수에서 정의된 행렬환 $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$의 부분체(subfield)이다.

삼차방정식의 기하적 해법은 이란 수학자 오마르 카이얌에 의하여 완성되었고 천문학에서 난제인 삼차방정식 $4x^3 - 3x + \sin 3^\circ = 0$은 1429년 이란 수학자이자 천문학자인 알 카시에 의하여 수치해석적 방법으로 해결되었다. 이와 같은 수학문화의 전이에 의하여 카르다노 시대에 와서 삼차방정식의 대수적 해법이 완성된 것이다. 따라서 교과서는 이슬람 수학의 기하적 해법을 소개하는 것이 바람직하다.

Ⅳ. 결론

우리는 본 논문에서 중등 수학교과서가 다루는 수학사를 사실적 기술 측면과 포괄적 기술 측면에서 문제점을 살펴보고 광범위한 자료를 바탕으로 대안을 제시하였다.

수학사 연구를 통한 우리나라 수학교육의 발전을 위하여 다음 3가지를 제시해 본다.

첫째, 기축시대의 극복과 더불어 고대 이집트, 고 바빌로니아 및 이슬람 수학의 가치가 교과서에 구현될 수 있도록 노력해야 한다. 고대 그리스나 유럽 중심 수학사의 기술은 타문화의 이해를 필요로 하는 현대사회의 흐름에도 맞지 않으며, 학생들이 수학 교과서를 통하여 아시아·아프리카적 수학문화의 가치를 접할 수 있도록 하는 것이 바람직하다고 본다. 특히, 이집트 수학의 무시나 폄하는 19세기와 20세기 초에 발현한 아프리카인들에 대한 인종주의 심화가 불러온 결과로 볼 수 있기 때문에 교과서 집필진들은 산술, 기하학, 방정식 등의 이집트 수학이 객관적으로 중등 수학교과서에 반영되도록 노력해야 한다.

둘째, 교과 이론에서 수학자와 관련된 수학사를 기술할 때, 해당 수학자의 저서를 직접 참고하여 이를 교과서에 반영해야 한다. 수학 교과서를 개관한 결과 흥미 위주로 수학자를 다루는 청소년 대중서의 내용을 여과 없이 또는 자의적으로 해석하여 사용하고 있고, 출처가 불분명한 인터넷 글을 참고하는 경우도 있다. 특히, 아메스, 유클리드, 아르키메데스, 디오판토스, 알콰리즈미, 데카르트, 네이피어 등의 업적은 해당 수학자의 저서를 직접 참고하여 관련 수학(사) 내용을 교과서에 담아야 한다. 교과서가 흥미위주의 청소년 도서를 참고문헌으로 사용

함으로서 탈레스는 '닮음의 신', 피타고라스는 '100마리 황소', 히파수스는 '바다에 수장됨', 플라톤은 '전염병', 디오판토스·아르키메데스는 '묘비', 아르키메데스는 '인류 최초의 태양 광선총', 데카르트는 '천장의 파리', 네이피어는 '천문학자의 수명을 두 배로 연장', 그리고 뉴턴·라이프니츠는 '미분법 표절시비' 등으로 수학(사)의 본질과 동떨어진 이야기가 정설로 우리나라 교과서에 자리 잡고 있다.

셋째, 참고문헌은 대학 교재 이상의 책이나 권위 있는 관련 논문을 사용하는 것이 필요하며 모든 인용내용의 출처를 참고문헌에 기록하여야 한다. 특히, 우리가 교과서에서 관습적으로 사용해온 수학사를 권위 있는 복수의 저서나 논문에서 찾아 진위를 확인하고 그 출처를 제시하는 것이 필요하다. 만일 해당 수학사 내용을 대학교재 이상의 권위 있는 참고문헌에서 찾지 못할 경우 이를 교과서에 기술하는 것은 피해야 한다. 또한 웹사이트에서 제공하는 내용을 사용할 때는 권위를 고려해야 하며 마지막 접속 날짜를 밝히는 것이 옳다고 본다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 하에서 출간된 교과서 이전에는 참고문헌을 대부분 표시하지 않았고 일부 사진 출처나 웹사이트 주소 등이 전부였는데 이로 인하여 수학사의 오해를 불러왔다고 본다. 2009 개정 교과서에서는 출처 제시에 있어 많은 변화가 있었지만 향후 주요 내용에 대한 더 많은 자료의 출처가 표시되도록 노력해야 한다.

2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 하에서 수학 교과서를 집필할 때, 본 논문에서 제시한 내용과 참고문헌들이 사용되기를 기대한다.

참 고 문 헌

고호경 외 (2012). 중학교 수학③. 서울: 교학사.

Kho, H. *et al.* (2012). *Middle school mathematics③.* Seoul: Kyohak-Sa.

교육과학기술부 (2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 2011-11.

The Ministry of Education, Science and Technology. (2011). *A study on the mathematics curriculum by 2009 revised curriculum.* 2011-11.

교육부 (2015). 초등수학 5-1. 서울: ㈜천재교육.

The Ministry of Education. (2015). *Elementary school mathematics 5-1.* Seoul: Chunjae Eud.

김서령 외 (2012a). 중학교 수학①. 서울: 천재교육.

Kim, S. *et al.* (2012a). *Middle school mathematics①.* Seoul: Chunjae Edu.

김서령 외 (2012b). 중학교 수학②. 서울: 천재교육.

Kim, S. *et al.* (2012b). *Middle school mathematics②.* Seoul: Chunjae Edu.

김용운 (1975). 수학의 흐름. 서울: 배영사.

Kim, Y. (1975). *The flow of mathematics.* Seoul: Baeyoung-Sa.

김용운·김용국 (1985). 수학의 흐름. 서울: 전파과학사.

Kim, Y. and Kim. Y. (1985). *The flow of mathematics.* Seoul: S-Wave Com.

김용운·김용국 (1991). 재미있는 수학여행. 서울: 김영사.

Kim, Y. and Kim. Y. (1991). *A funny journey of mathematics.* Seoul: Gimmyoung Pub.

김용운·김용국 (1996). 중국수학사. 서울: 민음사.

Kim, Y. and Kim. Y. (1996). *The history of mathematics of China.* Seoul: Minumsa.

김용운·김용국 (2012). 한국 수학사. 경기도: 살림Math.

Kim, Y. and Kim. Y. (2012). *The history of mathematics of Korea.* Gyeonggy: Sallimbooks.

김원경 외 (2012). 중학교 수학②. 서울: 비상교육.

Kim, W. *et al.* (2012). *Middle school mathematics②*. Seoul: Visang Edu.
김원경 외 (2014). 고등학교 수학I. 서울: 비상교육.
Kim, W. *et al.* (2012). *High school mathematics I*. Seoul: Visang Edu.
김창동 외 (2014a). 고등학교 미적분I. 서울: ㈜교학사.
Kim, C. *et al.* (2014a). *High school calculus I*. Seoul: Kyohak-Sa.
김창동 외 (2014b). 고등학교 미적분II. 서울: ㈜교학사.
Kim, C. *et al.* (2014b). *High school calculus II*. Seoul: Kyohak-Sa.
김창동 외 (2014c). 고등학교 기하와 벡터. 서울: ㈜교학사.
Kim, C. *et al.* (2014c). *High school geometry and linear algebra*. Seoul: Kyohak-Sa.
김창동 외 (2014d). 고등학교 수학II. 서울: ㈜교학사.
Kim, C. *et al.* (2014d). *High school mathematics II*. Seoul: Kyohak-Sa.
류희찬 외 (2013a). 중학교 수학①. 서울: 천재교과서.
Lew, H. *et al.* (2013a). *Middle school mathematics①*. Seoul: Chunjae Edu.
류희찬 외 (2013b). 중학교 수학②. 서울: 천재교과서.
Lew, H. *et al.* (2013b). *Middle school mathematics②*. Seoul: Chunjae Edu.
류희찬 외 (2013c). 중학교 수학③. 서울: 천재교과서.
Lew, H. *et al.* (2013c). *Middle school mathematics③*. Seoul: Chunjae Edu.
류희찬 외 (2014a). 고등학교 수학I. 서울: 천재교과서.
Lew, H. *et al.* (2014a). *High school mathematics I*. Seoul: Chunjae Edu.
류희찬 외 (2014b). 고등학교 수학II. 서울: 천재교과서.
Lew, H. *et al.* (2014b). *High school mathematics II*. Seoul: Chunjae Edu.
류희찬 외 (2014c). 고등학교 기초수학. 서울: 천재교과서.
Lew, H. *et al.* (2014c). *High school elementary mathematics*. Seoul: Chunjae Edu.
러시아 과학 아카데미 철학연구소 (2008). 세계철학사1(이을호 역음). 서울: 중원문화.
Akademiya Nauk SSSR. (1957). *History of philosophy 1*. Moscow: RAC.
박종률 외 (2013). 예술(음/미)과 수학 통합 교수 학습자료 개발. 서울: 한국과학창의재단 2013-5.
Park, J. *et al.* (2013). *Development of teaching and learning materials integrating art and mathematics*. Kofac 2013-5.
박제남 (2013). 현대대수학. 서울: 경문사.
Park, J. (2013). The element of modern algebra, Seoul: Kyungmoon-Sa.
박제남 (2014a). 황금비와 수학교육담론. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **28(2)**, 281-302.
Park, J. (2014a). The golden ratio and mathematics education issues, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education* **28(2)**, 218-302.
박제남 (2014b). 초등학교 수학 교과서가 다루는 수학사의 보완 방안-수학문화의 전이를 중심으로. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **28(4)**, 493-511.
Park, J. (2014a). A direction of a complement of the elementary school mathematics history described in the texts - Focusing on the mathematical trnsculture, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:Communications of Mathematical Education* **28(4)**, 493-511.
박제남・남호영 (2004). π-4천년 역사의 흔적. 서울: 교우사.
Park, J. and Nam, H. (2004). π : trace of a history. Seoul: Kyowoo-Sa.
손주영·송경근 (2011). 이집트역사. 서울: 가람기획.
Son, J. and Song, K. (2011). *A history of Egypt*. Seoul: Garam.
신준국 외 (2012). 중학교 수학③. 서울: 두배의느낌.

Shin, J. *et al.* (2012). *Middle school mathematics③.* Seoul: DubaeBook.
신항균 외 (2014). 고등학교 미적분II. 서울: ㈜지학사.
Shin H. *et al.* (2014). *High school calculus II.* Seoul: Jihak Pub. Com.
우정호 외 (2012a). 중학교 수학②. 서울: 두산동아.
Woo, J. *et al.* (2012a). *Middle school mathematics②.* Seoul: Doosan Dongah.
우정호 외 (2012b). 중학교 수학③. 서울: 두산동아.
Woo, J. *et al.* (2012a). *Middle school mathematics③.* Seoul: Doosan Dongah.
우정호 외 (2014). 고등학교 기하와 벡터. 서울: 두산동아.
Woo, J. *et al.* (2012a). *High school geometry and linear algebra.* Seoul: Doosan Dongah.
이강섭 외 (2014a). 고등학교 수학I. 서울: ㈜미래엔.
Lee, K. *et al.* (2014a). *High school mathematics I.* Seoul: Mirae N Com.
이강섭 외 (2014b). 고등학교 수학II. 서울: ㈜미래엔.
Lee, K. *et al.* (2014b). *High school mathematics II.* Seoul: Mirae N Com.
이종우(편저) (1998). 기하학의 역사적 배경과 발달. 서울: 경문사.
Lee, J. (Edited). (1998). *Historical background and development of geometry.* Seoul: Kyungmoon-Sa.
이정우 (2014). 세계철학사1. 서울: 도서출판 길.
Lee, J. *The history of world philosophy 1.* Seoul: Booksgil.
이준열 외 (2012). 중학교 수학③. 서울: 천재교육.
Lee, J. Y. *et al.* (2012). *Middle school mathematics③.* Seoul: Chunjae Edu.
이준열 외 (2014a). 고등학교 수학II. 서울: 천재교육.
Lee, J. Y. *et al.* (2012). *High school mathematics II.* Seoul: Chunjae Edu.
이준열 외 (2014b). 고등학교 기초수학. 서울: 천재교육.
Lee, J. Y. *et al.*(2012). *High school elementary mathematics.* Seoul: Chunjae Edu.
정상권 외 (2012). 중학교 수학①. 서울: ㈜금성출판사.
Chung, S. K. *et al.* (2012). *Middle school mathematics①.* Seoul: Kumsung Pub. Com.
정상권 외 (2014). 고등학교 미적분II. 서울: ㈜금성출판사.
Chung, S. K. et al. (2014). *High school calculus II.* Seoul: Kumsung Pub. Com.
정수용·주미경·송륜진 (2014). 수학교과서 속 수학자들에 대한 비판적 분석-융합적 협업으로서 다문화교육 관점에서. 교과교육학연구, 18(2), 441-470.
Jeong, S., Ju, M. K. and Jin S. R. (2014). A critical analysis of the didactic use of historical mathematicians in seventh grade mathematics textbook. *Journal of research in curriculum instruction* 18(2), 441-470.
정해남. (2012) 예비수학교사를 위한 수학사 활용 방안. 한국수사학학회지, 25(3), 141-157.
Jung, H. N. (2012). Using history of mathematics for perspective mathematics teacher. *The Korean Journal for History of Mathematics* 25(3), 141-157.
한경혜 (2006). 수학과 교수·학습에서 수학사 활용의 교육적 함의: 수월성 교육을 중심으로 한 미적분 지도의 예. 한국수학사학회지, 19(4), 31-62.
Han, K. H. (2006). Didactical meaning of using history of mathematics in teaching and learning mathematics. *The Korean Journal for History of Mathematics* 19(4), 31-62.
황선욱 외 (2014a). 고등학교 미적분II. 경기도: 좋은책 신사고.
Hwang, S. *et al.* (2014a). *High school calculus II.* Seoul: Sinsago.
황선욱 외 (2014b). 고등학교 기하와 벡터. 서울: 좋은책 신사고.
Hwang, S. *et al.* (2014b). *High school geometry and linear algebra.* Seoul: Sinsago.

황선욱 외 (2014c). 고등학교 수학I. 서울: 좋은책 신사고.
Hwang, S. *et al.* (2014c). *High school mathematics I*. Seoul: Sinsago.
허민 외 (2012a). 중학교 수학①. 서울: 대교.
Her, M. *et al.* (2012a). *Middle school mathematics①*. Seoul: Daekyo.
허민 외 (2012b). 중학교 수학③. 경기도: 대교.
Her, M. *et al.* (2012b). *Middle school mathematics②*. Seoul: Daekyo.
Aaboe, A. (1998). *Episodes from the early history of mathematics*. 12th ed. Washington: MAA.
Aaboe, A. (1954). al-Kashi's iteration method for the determination of sin1°. *Scripta Math.* 20, 24 -29.
Al-Khalili, J. (2010). *The house of wisdom: How Arabic science saved ancient knowledge and gave us the Renaissance*. New York: Penguin Books.
Anderson, M., Katz, V., and Wilson, R(Editors). (2004). *Sherlock Holmes in Babylon*. Washington: MAA.
Aristoteles. (2009). Politika(천병희 옮김). 서울: 도서출판 숲.
Aristoteles. (1957). *Politica*(Oxford Classical Text)(Edited: R. Ross). Oxford: Oxford Univ. Press.
Armstrong, K. (2010). 축의 시대(정영목 옮김). 서울: 교양인.
Armstrong, K. (2007). *The great transformation*. New York: Anchor.
Baragar, A. (2002). Constructions using a compass and twice-notched straightedge. *Amer. Math. Monthly* 109, 151-164.
Bashmakova, I., and Smirnova, G. (2000). *The beginnings and evolution of algebra*. Washington: MAA.
Beard, C. (1968). The Fibonacci drawing board-design of the great pyramid of Giza. *Fibonacci Quarterly* 6, 66-68.
Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. New York: Springer.
Bernal, M. (2011). 블랙 아테나, 제1권(오흥식 옮김). 서울: 소나무.
Bernal, M. (1987). *Black Athena, Vol. I*. New Jersey: Rutgers Univ. Press.
Bernal, M. (2012). 블랙 아테나, 제2권(오흥식 옮김). 서울: 소나무.
Bernal, M. (1991). *Black Athena, Vol. II*. New Jersey: Rutgers Univ. Press.
Bernal, M. (1992). Animadversions on the origines of western science. *Isis* 83, 596-607.
Bernal, M. (1994). Response to Robert Palter. *Hist. Sci.* 32, 445-468.
Bold, B. (1969). *Famous problems of geometry and how to solve them*. New York: Dover.
Bonnard, A. (2011a). 그리스인 이야기1(김희균 옮김). 서울: 책과함께.
Bonnard, A.(1954). *Civilisation Grecque, Vol. 1*. Vevey: Les Editions de L'aire.
Bonnard, A. (2011b). 그리스인 이야기2(양영란 옮김). 서울: 책과함께.
Bonnard, A. (1957). *Civilisation Grecque, Vol. 2*. Vevey: Les Editions de L'aire.
Boyer, B. (1991). A history of mathematics, 2nd ed. New York: John Wiley.
Bradly, R. (2007). *Euler, D'Alembert and the logarithm function, Leonhard Euler: Life, work and legacy*: R. Bradley and C. Sandifer(Editors). New York: Elsevier.
Bressoud, D. (2002). Was calculus invented in India?. *College Math. J.* 33, 2-13.
Broug, E. (2011). *Islamic geometric patterns*. London: Thames & Hudson.
Brown, E. (1999). Square roots from 1; 24, 51, 10 to Dan Shanks. *College Math. J.* 30, 82-95.
Burton, D. (2007). *The history of mathematics*, 6th ed. New York: McGraw-Hill.
Cajori, F. (1913). History of the exponential and logarithmic concepts. *Amer. Math. Monthly* 20(3), 5-14.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations, Vol. I.* La Salle: The Open Court Pub. Com.

Cajori, F. (1991). *A history of mathematics*, 5th ed. Rhode Island: AMS.

Chace, A. (1979). *The Rhind mathematical papyrus.* Virginia: NCTM.

Chang, W. and Gordon, A. (2014). Trisecting angles in Pythagorean triangles. *Amer. Math. Monthly* 121, 625-631.

Chinese Text Project: http://ctext.org/sunzi-suan-jing. Last time accessed 22 December 2014.

Clagett, M. (1999). *Ancient Egyptian science, A source book Vol. 3: Ancient Egyptian mathematics.* Philadelphia: APS.

Corbin, H. (1997). 이슬람 철학사(김정위 옮김). 서울: 서광사.

Corbin, H. (1964). *Histoire de la philosopbie Islamique.* Paris: Gallimard.

Couprie, D. (2004). How Thales was able to "predict" a solar eclipse without the help of alleged Mesopotamian wisdom. *Early Science and medicine* 9(4), 321-337.

Curchin, I. and Fischler, R. (1981). Hero of Alexandria's numerical treatment of division in extreme and mean ratio and its implications. *Pheonix* 35(2), 129-133.

Dahan-Dalmedico, A. and Peiffer, J. (2010). *History of mathematics.* Washington: MAA.

Derbyshire, J. (2006). *Unknown quantity.* Washington: Joseph Henry Press.

Descartes, R. (1954). *The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition* (Translator: D. Smith). New York: Dover.

Dunham, W. (1991). *Journey through genius.* New York: Penguin Books.

Durant, W. (2011). 문명이야기, 그리스 문명 2-1(김운한 · 권영교 옮김). 서울: 민음사.

Durant, W. (1939). *The story of civilization vol II.: The life of Greece.* New York: Simon & Schuster

Elam, K. (2011). *Geometry of design*, 2nd ed. New York: Princeton Architectural Press.

Engels, H. (1977). Quadrature of the circle in ancient Egypt, *Historia Mathematica* 4, 137-140.

Euclid. (1956). *The thirteen books of the elements*(Translated: T. L. Heath). New York: Dover.

Eves, H. (1983). *Great moments in mathematics before 1650.* Washington: MAA.

Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics,* 6th ed. New York: The Saunders Series.

Fowler, D. (2003). *The mathematics of Plato's academy, A new construction*, 2nd ed. Oxford: Clarendon Press.

Friberg, J. (2005). *Unexpected links between Egyptian and Babylonian mathematics.* New Jersey: World Scientific.

Friberg, J. (2007a). *A remarkable collection of Babylonian mathematical texts.* New York: Springer.

Friberg, J. (2007b). *Amazing traces of a Babylonian origin in Greek mathematics.* New Jersey: World Scientific.

Fritz, K. (1945). The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Math.* 46, 242-264.

Gandz, S. (1926). The origin of the term "algebra". *Amer. Math. Monthly* 33, 437-440.

Gandz, S. (1936). The sources of al-Khowārizmī's algebra. *Osiris* 1, 263-277.

Gandz, S. (1937). The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek, and early arabic algebra. *Osiris* 3, 405-557.

Gast, K. (2000). *Le Corbusier, Paris-Chandigarh.* Boston: Birkhäuser.

Gillings, R. (1982). *Mathematics in the time of the pharaohs.* New York: Dover.

Gonzalez-Velasco, E. (2011). *Journey through mathematics.* New York: Springer.

Grabiner, J. (1995). Descartes and problem-solving. *Math. Mag.* **68**, 83-97.

Gutas, D. (2013). 그리스 사상과 아랍문명(정영목 옮김). 경기도: 글항아리.

Gutas, D. (1998). Greek thought, Arabic culture: The Graeco-Arabic Translation Movement in Baghdad and Early 'Abbāsid Society (2nd-4th/8th-10th Centuries). London: Routledge.

Hahn, A. (1998). *Basic calculus: From Archimedes to Newton to its role in science.* New York: Springer.

Hambidge, J. (1920a). *The elements of dynamic symmetry.* New Haven: Yale Univ. Press.

Hambidge, J. (1920b). *Dynamic symmetry: The Greek vase.* New Haven: Yale Univ. Press.

Hambidge, J. (1924). *The Parthenon and the other Greek temples.* New Haven: Yale Univ. Press.

Heath, T. (1910). *Diophantus of Alexandria*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Heath, T. (1949). *Mathematics in Aristotle.* Oxford: Clarendon Press.

Heath, T. (1981a). *A history of Greek mathematics, I: From Thales to Euclid.* New York: Dover.

Heath, T. (1981b). *A history of Greek mathematics, II: From Aristarchus to Diophantus.* New York: Dover.

Heath, T(Edited). (2002). *The work of Archimedes.* New York: Dover.

Heath, T. (2004). *Aristarchus of Samos: The ancient Copernicus.* New York: Dover.

Heidarzadeh, T. (2008). *A history of physical theories of comets-From Aristotle to Whipple.* New York: Springer.

Herodotos. (2012). 역사(천병희 옮김). 경기도: 도서출판 숲.

Herodotus. (1927). *Herodoti historiae*, 2vol(Oxford Classical Text)(Edited: C. Hude). Oxford: OUP.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces, A portrait of Old Babylonian algebra and its kin.* New York: Springer.

Hughes, H. (1986). Gerard of Cremon's translation of Al-Khwarizmi's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies* **48**, 211-263.

Iamblichus. (1991). *On the Pythagorean way of life*(Text, Translation, and Notes: J. Dillon and J. Hershbell). Atlanta: Scholars Press.

Jepson, C. and Yang, R. (1998). Making square from Pythagorean triangles. *College Math. J.* **29(4)**, 284-288.

Karpinski, L. (1915). *Robert of Chester's Latine translation of the algebra of Al-Khowarizmi.* London: MacMillan Company.

Katz, V. (1995). Ideas of calculus in Islam and India. *Math. Mag.* **68,** 163-174.

Katz, V(Eitor). (2007). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam, A source book.* New Jersey: Princeton Univ. Press.

Katz, V. (2009). *A history of mathematics: An introduction.* 3rd ed. New York: Addison-Wesley.

Kitto, H. (2004). 그리스 문화사(김진경 역). 서울: 탐구당.

Kitto, H. (1951). *The Greeks.* New York: Penguin Books.

Klein, F. (2012). 19세기 수학의 발전에 대한 강의(한경혜 옮김). 경기도: 나남.

Klein, F. (1926). *Vorlesungen über die entwicklung der mathematik Im 19. Jahrhundert.* Berlin: Springer.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times, Vol. 1.* Oxford: Oxford Univ. Press.

Lay-Yong, L. and Tian-Se, A. (1986). Circle measurements in ancient China. *Historia Mathematica* **13**, 325-340.

Livio, M. (2002) *The golden ratio.* New York: Broadway Books.

Livio, M. (2009). 신은 수학자인가?(김정은 옮김). 서울: 열린과학.

Livio, M. (2009). *Is god a mathematician?* New York: Simon & Schuster.

Lorch, R. (2001). Greek-Arabic-Latin: The transmission of mathematical texts in the middle ages. *Science in Context* 14, 313-331.

Lumpkin, B. (1980). The Egyptians and Pythagorean triples. *Historia Mathematica* 7, 186-187.

Lyons, J. (2009). *The house of wisdom.* New York: Bloomsbury Press.

Mardia, K. (2009). "Omar Khayyam, René Descartes and solutions to algebraic equations (abstract)," International Congress in Commemorating Hakim Omar Khayyam Neyshabouri.(900th Death Anniversary 9). Neyshabour, Iran, 17 - 19 May.

Markowsky, G. (1992). Misconceptions about the golden ratio. *College Math. J.* 23, 1-19.

Martin, J. (2010). The Helen of geometry. *College Math. J.* 41, 17-28.

Martin, T. (2011). 고대 그리스의 역사(이종인 옮김). 서울: 가람기획.

Martin, T. (1996). *Ancient Greece.* Connecticut: Yale Univ. Press.

Mendelssohn, K. (1974). *The riddle of the pyramids.* London: Thames and Hudson.

Merzbach, U. and Boyer, C. (2011). *A history of mathematics*, 3rd ed. New Jersey: Wiley.

Miatello, L. (2005). The design of the Snefru pyramids at Dahshur and the Netjerikhet pyramid at Saqqara. *PalArch's Journal Archaeology of Egypt/Egyptology* 1(1), 1-11.

Mohanty, S. and Mohanty, S. P. (1990). Pythagorean Numbers. *Fibonacci Quarterly* 28(1), 31-42.

Nahin, P. (1998). *The story of* $\sqrt{-1}$. New Jersey: Princeton Univ. Press.

Neugebauer, O. (1957). *The exact sciences in antiquity*, 2nd ed. New York: Dover.

Newton, I. (1999). *The principia*(A new translation: I. B. Cohen and A. Whitman). California: Univ. of California Press.

Ngo, V. and Watson, S. (1998). Who cares if $x^2+1=0$ has a solution? *College Math. J.* 29(2), 141-144.

Ore, O. (1976). *Number theory and its history.* New York: Dover.

Osserman, R. (2010). Mathematics of the Gateway Arch. *AMS Notices* 57(2), 220-229.

Ostermann, A. and Wanner, G. (2012). *Geometry by its history.* New York: Springer.

Panchenko, D. (1994). Thales's prediction of a solar eclipse. *J. for The History of Astronomy* 25, 275-288.

Palter, R. (1993). Black Athena, Afro-centrism, and the history of science. *Hist. Sci.* 31, 227-287.

Paton, W. R(Translated). (1979). *The Greek anthology (BOOKS XIII-XVI).* Massachusetts: Harvard Univ. Press.

Phillips, G. (1981). Archimedes the numerical analyst. *Amer. Math. Monthly* 88(3), 165-169.

Pliny. (1967). *Natural history*(Translation: H. Rackham). Massachusetts: Harvard Univ. Press.

Platon. (2000). Timaios(박종현 · 김영균 옮김). 경기도: 서광사.

Platon. (1902). *Platonis Opera*, Tomus IV(Oxford Classical Text)(Edited: J. Burnet). Oxford: Oxford Univ. Press.

Platon. (2009). Menon(이상인 옮김). 서울: 이제이북스.

Platon. (1903). *Platonis Opera*, Tomus III(Oxford Classical Text)(Edited: J. Burnet). Oxford: Oxford Univ. Press.

Platon. (2011). Phaedrus(조대호 역해). 서울: 문예출판사.

Platon. (1910). *Platonis Opera*, Tomus II(Oxford Classical Text)(Edited: J. Burnet). Oxford: Oxford Univ. Press.

Platon. (2013). Theaetetos(정준영 옮김). 서울: 이제이북스.

Platon. (1995). *Platonis Opera,* Tomus I(Oxford Classical Text)(Edited: W. Hicken). Oxford: Oxford Univ. Press.

Plutarch. (2014). Parallel lives(플루타르크 영웅전I)(홍사중 옮김). 서울: 동서문화사.

Plutarch. (1906). *Plutarch's lives, Vol.1*(Edited: A. Clough; Translation: J. Dryden). New York: Modern Library.

Proclus. (1909). *The complete works of Plutarch: Essays and miscellanies, Vol. III.* New York: Crowell.

Ptolemy. (1998). *Almagest*(Translation: G. Toomer). Princeton: Princeton Univ. Press.

Querejeta, M. (2011). On the eclipse of Thales, cycles and probability. *Culture And Cosmos* 15, 5-16.

Rashed, R. (1989). Problems of the transmission of Greek scientific thought into Arabic: Examples from mathematics and optics. *His. Sci.* 27, 199-209.

Rashed, R. (2015). *Classical mathematics from Al-Khwarīzmī to Descartes*(Translated by M. Shank). New York: Routledge.

Robert, J. (2000). 로마에서 중국까지(조성애 옮김). 서울: 이산.

Robert. J. (1993). *De Rome à la Chine.* Paris: Les Belles Lettres.

Robins, G. and Shute, C. (1987). *The Rhind mathematical papyrus.* New York: Dover.

Robson, E. (2001). Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322. *Historia Mathematica* 28, 167-206.

Robson, E. (2002). Words and pictures: New light on Plimpton 322. *Amer. Math. Monthly* 109, 105-120

Robson, E. (2008). *Mathematics in ancient Iraq.* New Jersey: Princeton Univ. Press.

Rosen, F(Edited and Translated). (1923). *The algebra of Mohammed ben Musa.* Lexington: ULAN Press.

Rossi, C. (2003). *Architecture and mathematics in ancient Egypt.* Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Sontag, S. (2013). 해석에 반대한다(이민아 옮김). 서울: 이후.

Sontag, S. (1965). *Against interpretation.* New York: FSG.

Stephenson, F. and Fatoohi, L. (1997). Thales's prediction of a solar eclipse. *J. for the History of Astronomy* 28, 279-282.

Stillwell, J. (2010). *Mathematics and history,* 3rd ed. New York: Springer.

Struik, D(Edited). (1986). *A source book in mathematics, 1200-1800.* New Jersey: Princeton Univ. Press.

Suzuki, J. (2002). *A history of mathematics.* New Jersey: Prentice Hall.

Suzuki, J. (2009). *Mathematics in historical context.* Washington: MAA.

Thomas, I(Translated). (1993). *Greek mathematics II.* Massachusetts: Harvard Univ. Press.

Thomas, I(Translated). (2006). *Greek mathematics I.* Massachusetts: Harvard Univ. Press.

Trachtenber, M. and Hyman, I. (2002). *Architecture: From prehistory to post-modernism,* 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall.

Van Brummelen, G. (2009). *The mathematics of the heavens and the earth: The early history of trigonometry.* New Jersey: Princeton Univ. Press.

Van De Mieroop, M. (2011). *A history of ancient Egypt.* Chichester: Wiley-Blackwell.

van der Waerden, B. L. (1985). *A history of algebra.* New York: Springer.

Varadarajan, V. (1998). *Algebra in ancient and modern times.* Rhode Island: AMS.

Veljan, D. (2000). The 2500-year-old Pythagorean theorem. *Math. Mag.* 73(4), 259-272.

Wells, D. (1997). *The penguin dictionary of curious and interesting numbers,* rev. ed. New York: Penguin Books.

Whitman, E. (1943). Some historical notes on the cycloid. *Amer. Math. Monthly* 50(5), 309-315.

Study on Criticism and Alternative on the History of Mathematics Described in the Secondary School Mathematics Textbooks

Park, Jeanam†
Department of mathematics education, Inha University, Incheon Korea
E-mail: jnpark@inha.ac.kr

Jang, Dongsook
Department of mathematics, Inha University, Incheon Korea
E-mail: jds0919@ice.go.kr

The purpose of this article is to discuss some of the most commonly repeated misconceptions on the history of mathematics described in the secondary school mathematics textbooks, and recommend that we should include mathematical transculture in the secondary school mathematics.

School mathematical history described in the texts reflects the axial age, and deals with mathematical transculture from the ancient Greek into Europe excluding the ancient Egypt, Old Babylonia, and Islamic mathematics. We discuss about them through out the secondary school textbooks and give some alternatives for the historical problems.

* ZDM Classification : A33, A34, A32
* 2000 Mathematics Subject Classification : 01A05, 01A16, 01A17, 01A20, 01A25, 01A30, 01A35, 01A40, 01A45, 01A72
* Key Words : History of Mathematics, Learning Mathematics, Axial Age, Mathematical Transculture.
† corresponding author