Journal of the Korean Institute of Illuminating and Electrical Installation Engineers (2015) 29(9) : 65~70
http://dx.doi.org/10.5207/JIEIE.2015.29.9.065 ISSN 1229-4691(Print) ISSN 2287-5034(Online)

특정지점을 경유하며 X-Y 축을 최단거리로 연결하는 전선로의 길이 산정

(Coordinate and Length of Straight Transmission Line Minimally connecting X-Y axis via a Specific Point)

이상중*
(Sang-Joong Lee)

Abstract

Minimal line length enables low-cost construction of the transmission lines and low-loss transportation of electric power. This paper presents a derivation to determine the coordinate and length of the straight line that minimally connects two perpendicular lines x-axis and y-axis via a specific point, using the optimization technique. The author shows a formula to obtain the minimal length, which is represented by the cube root of the coordinate given by the specific point. Case studies have been also discussed to prove the optimal solutions derived by the proposed formula.

Key Words : Optimization, Minimal Path, Specific Point, Connection

1. 서 론

Situation 1 :

오늘 밤 우리의 용감한 특공대는 아군의 해상 이동로와 우리 어민들의 생계를 위협하는 적군의 해안포를 기습 폭파하는 작전을 수행한다. 그림 1과 같이 적의 해안포는 90°로 치솟은 높은 해안 절벽 위에 설치되어 있어, 우리 특공대가 해안포에 접근하려면 직벽을 직접 타고 올라가는 수 밖에 없다.

Fig 1. Coastal artillery and Commando

그러나 적군 또한 직벽 아래에 상당한 높이의 철조망과 경보장치, 공중 지뢰 등을 설치하여 아군의 침투에 대비하고 있다. 따라서 지상에서 곧장 절벽을 오를

* Main author : Seoul National University of Science and Technology, Dept. of Electrical Engineering, Professor, PE
Tel : 02-970-6411, Fax : 02-978-2754
E-mail : sjlee@seoultech.ac.kr
Received : 2015. 7. 3
Accepted : 2015. 8. 13

수는 없고, 장애물을 우회하면서 지상과 절벽을 연결하는 사다리를 이용하고자 한다. 사다리가 너무 길면 수송과 현장설치가 어려우므로 가급적 짧아야 한다. 장애물을 우회하면서 지상과 직벽을 최단거리로 연결하는 직선 사다리의 길이는 얼마인가?

Situation 2 :

그림 2와 같이 전력관리본부 Q(x,y) 지점을 경유하면서 기존의 송전선(x축 및 y축)을 직선으로 연결하는 신규 송전선로를 건설하고자 한다. 이 송전선로가 짧을수록 건설비용과 관리비용이 적어지고 건설공기도 짧아진다.

Q(x,y) 지점을 경유하면서 기존의 두 송전선(x축 및 y축)을 연결하는 직선 전선로의 최단거리는 얼마이며, 이 경우 신규 송전선로와 x, y 축과의 교차점은 어디일까?

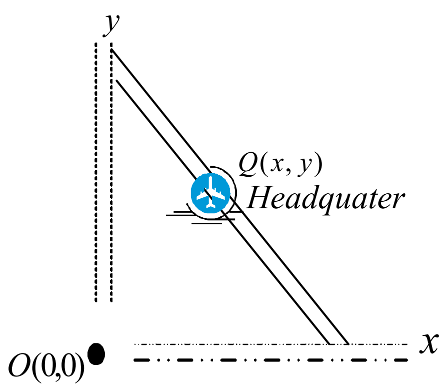

Fig 2. Headquarter Q(x,y) and Power Lines

주어진 함수로부터 최단거리, 최소비용, 이윤 극대화 등을 구하는 수학적 기법으로는 우선 Optimization 기법을 들 수 있으며[1-2], 주어진 좌표로부터 최단거리 경로를 구하는 데는 Optimization 기법과 Steiner tree 이론 등을 들 수 있다[3-7]. 본 논문은 특정 지점을 통과(또는 우회)하면서 x축과 y 축을 기하학적으로 가장 짧게 연결하는 방법을 소개한다. 또한 이 직선의 x, y 축과의 교차점의 좌표를 찾고, 그 최단거리를 계산하는 공식을 최적화 기법을 이용하여 유도하고 Case study를 통하여 확인하고자 한다.

2. 본 론

2.1 특정지점을 경유하며 x, y 축을 최단거리로 연결하는 직선의 좌표와 길이 산정 유도

그림 3은 Situation 1을 직각좌표와 그래프로 도시한 것이다. 직벽을 y축, 지상 level을 x축으로 표시하고, 장애물(철조망, 공중지뢰 등) 끝 부분의 좌표를 P(x,y)로 표시하였다. 사다리는 지상 접촉지점 (a,0), 직벽 접촉지점 (0,h) 와 P(x, y)점을 연결하는 직선 $\overline{ah}$로 표시하였다.

Situation 2 또한 그림 3과 같이 모델링될 수 있다. 그림 2의 전력관리본부는 그림 3의 좌표 P(x,y)로 표시될 수 있고, 신규송전선로의 x, y축과의 교차지점은 (a,0) 및 (0,h)로, 선로의 길이는 직선 $\overline{ah}$로 표시될 수 있다.

P(x, y) 지점을 지나면서 x 축과 y 축을 최단거리로 연결하는 사다리(또는 송전선로)의 길이 $L=\sqrt{a^2+h^2}$는 얼마이며 x, y 축과의 교차점은 어디인가?

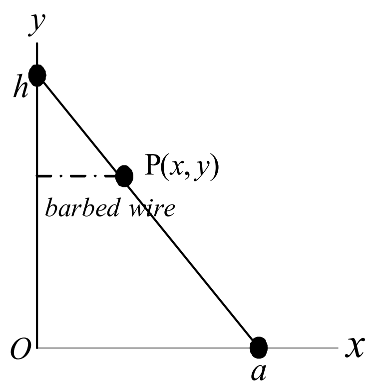

Fig. 3. A straight line passing over P(x,y)

이는 사다리의 길이 $L^2=a^2+h^2$를 목적함수로, P(x,y) 지점을 통과하면서 x, y 축을 연결하는 직선의 방정식을 제약조건으로 하는 최적화문제로 정형화될 수 있다. 즉

$$Min \qquad L^2=a^2+h^2 \tag{1}$$

$$subject\ to \qquad y=-\frac{h}{a}x+h \tag{2}$$

Lagrange 쌍대함수 Λ를 정의하면,

$$\Lambda = a^2+h^2+\lambda(y+\frac{h}{a}x-h) \tag{3}$$

따라서 최적조건은,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial a} = 2a+\lambda(-\frac{h}{a^2}x)=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial h} = 2h+\lambda(\frac{x}{a}-1)=0 \tag{5}$$

가 된다. 식 (2)로 부터,

$$\frac{x}{a}-1=\frac{x-a}{a}=-\frac{y}{h} \tag{6}$$

가 되고, 이를 (5)에 대입하여 (4)와 (5)를 정리하면,

$$2-\lambda\frac{h}{a^3}x=0 \tag{7}$$

$$2-\lambda\frac{y}{h^2}=0 \tag{8}$$

가 된다. 식 (7), (8)로 부터:

$$\lambda\frac{hx}{a^3}-\lambda\frac{y}{h^2}=0 \tag{9}$$

의 관계를 얻을 수 있고,

$$\frac{x}{a^3}-\frac{y}{h^3}=0 \tag{10}$$

로부터 아래의 관계를 얻는다.

$$\frac{h}{a}=\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \tag{11}$$

즉 사다리가 식 (11)의 기울기를 가질 때, P(x,y) 지점을 통과하면서 x, y 축을 연결하는 선분 $\overline{ha}$의 길이는 가장 짧아진다[8].

식 (11)은 세 개 지점을 가장 짧게 연결하는 직선의 기울기는 특정지점의 좌표 P(x,y)의 세제곱근으로 표시됨을 의미한다.

식 (11)을 (2)에 대입하면

$$y=-\frac{h}{a}x+h=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}x+h \tag{12}$$

가 되고, 이로부터 y 축 및 x 축 절편은,

$$h=y+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}x \tag{13}$$

$$a=x+\sqrt[3]{\frac{x}{y}}y \tag{14}$$

가 된다. 식 (13), (14)로부터 P(x,y) 지점을 통과하면서 x, y 축을 최단거리로 연결하는 사다리의 길이 L을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} L^2=a^2+h^2 &= (\frac{h}{\sqrt[3]{\frac{y}{x}}})^2+(y+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}x)^2 \\ &= (y+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}x)^2[(\frac{x}{y})^{\frac{2}{3}}+1] \end{aligned} \tag{15}$$

또는,

$$L=(y+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}x)\sqrt{1+(\frac{x}{y})^{\frac{2}{3}}} \tag{16}$$

2.2 최단거리 계산 Case study

2.2.1 Case study 1

Situation 2에서 전력관리본부의 위치가 원점 O(0,0)로부터 x축 방향으로 1km, y축 방향으로 8km, 즉 그림 4와 같이 Q(x,y) 좌표를 (1,8)이라 할 때, 전력관리본부를 지나면서 x, y 축으로 주어진 기존의 선로를 가장 짧게 이어주는 송전선로의 길이와

좌표를 구해보자.

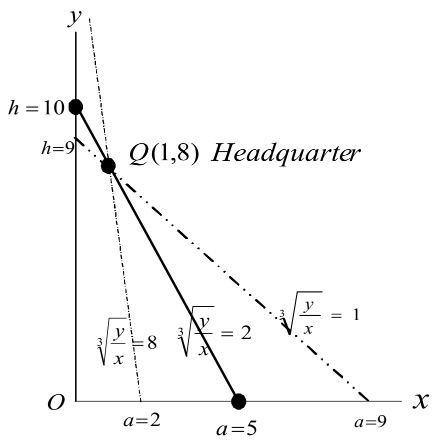

Fig 4. Straight lines with various slopes

우선 식 (11)에서 :

$$\frac{h}{a}=\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=\sqrt[3]{\frac{8}{1}}=2 \tag{17}$$

로서 선분 $\overline{ha}$의 길이가 최소가 되기 위한 직선의 최적 기울기는 2가 됨을 알 수 있다. 이 경우 $\triangle hOa$의 밑변 a와 높이 h는 각각 5와 10이 된다. 이는 선분 $\overline{ha}$가 x축 및 y축과 만나는 교점 공식 (13)과 (14)로도 확인할 수 있다. 즉

$$h=y+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}x=8+2\cdot 1=10 \tag{18}$$

$$a=x+\sqrt[3]{\frac{x}{y}}y=1+\frac{1}{2}\cdot 8=5 \tag{19}$$

를 얻을 수 있다. 즉 (5,0) 점과 (0,10) 점을 연결하면 전력관리본부 (1,8)을 지나는 최소길이의 송전선로를 건설할 수 있음을 의미한다.

선분 $\overline{ha}$의 길이 L_2는

$$L_2=\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{125} \tag{20}$$

가 된다. 공식 (16)을 이용하여 $\overline{ha}$의 길이를 구하면,

$$L_2=(y+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}x)\sqrt{1+(\frac{x}{y})^{\frac{2}{3}}} \tag{21}$$

$$=(8+2\cdot 1)\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$$

$$=\sqrt{125}$$

로 (20)과 같은 값을 얻는다.

즉 (1,8)에 위치한 전력관리본부를 지나면서 x, y 축을 가장 짧게 이어주는 송전선로의 길이는 $\sqrt{125}=11.18\ km$가 됨을 알 수 있다.

이 값이 최적해인지, 세 가지 다른 값을 대입해서 확인해 보자.

우선 그림 4와 같이 직선 $\overline{ha}$의 기울기가 1일 때, 즉 밑변과 높이가 같은 9일 경우를 생각해 보자. 이 경우, 선분 $\overline{ha}$의 길이 L_1은

$$L_1=\sqrt{9^2+9^2}=\sqrt{162} \tag{22}$$

가 된다.

이번에는 Q(x,y)의 좌표값 (1,8)에 주어진 대로 기울기를 8로 주어보자. 이 경우 $h=16$ 및 $a=2$가 되고 선분의 길이 L_8은

$$L_8=\sqrt{2^2+16^2}=\sqrt{260} \tag{23}$$

가 된다.

이번에는 기울기가 3일 때를 생각해 보자.

이 경우, 밑변과 높이의 길이는 각각 11/3 및 11이 되고 선분의 길이 L_3는

$$L_3=\sqrt{(\frac{11}{3})^2+11^2}=\sqrt{134.44} \tag{24}$$

가 되어 세 경우 모두 다 최적치 $\sqrt{125}$에 비해 더 긴 것을 확인할 수 있다[8].

2.2.2 Case study 2

Situation 1에서 장애물 끝 모서리의 위치가 x 축 방

향으로 1m, y축 방향으로 4.9m, 즉 P(x,y) 좌표를 (1, 4.9)이라 할 때, 장애물을 우회하면서 직벽(x축)과 지면(y축)을 가장 짧게 연결시키는 사다리의 길이와 좌표를 구해보자.

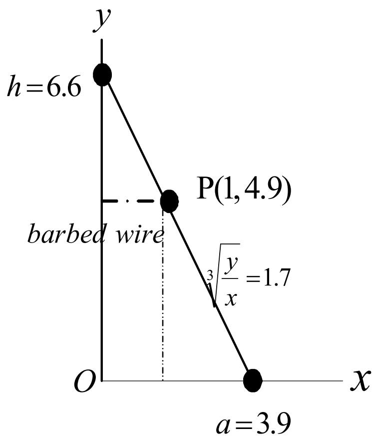

Fig 5. Shortest ladder passing over (1, 4.9)

우선 식 (11)에서 :

$$\frac{h}{a}=\sqrt[3]{\frac{4.9}{1}} \fallingdotseq 1.7 \tag{25}$$

로서 선분 $\overline{ha}$의 길이가 최소가 되기 위한 사다리의 최적 기울기는 1.7임을 알 수 있다.

공식 (16)을 이용하여 사다리의 최소길이를 구하면,

$$L_2=(y+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\,x)\sqrt{1+(\frac{x}{y})^{\frac{2}{3}}} \tag{26}$$

$$=(4.9+1.7)\sqrt{1+(\frac{1}{1.7})^2}$$

$$\fallingdotseq 7.7$$

를 얻는다. 즉 장애물을 우회하기 위한 사다리의 길이는 최소한 7.7m가 되어야 함을 의미한다.

식 (13)과 (14)로부터 사다리가 직벽과 지면과 만나는 교점을 확인하면,

$$h=y+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\,x=4.9+1.7=6.6 \tag{27}$$

$$a=x+\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\,y=1+\frac{1}{1.7}\cdot 4.9=3.9 \tag{28}$$

를 얻을 수 있다. 즉 직벽(y축)으로부터 3.9m 떨어진 지점에 사다리를 세우면 좌표 (1, 4.9)에 위치한 장애물을 우회하면서, 직벽 6.6m 지점과 연결되는 최단거리 직선 침투로를 확보할 수 있고, 이 때 필요한 사다리의 최소길이는 7.7m임을 의미한다.

3. 결 론

본 논문은 특정 지점을 우회하면서 x 축과 y 축을 기하학적으로 가장 짧게 연결하는 방법을 소개하였다.

세 개 지점을 가장 짧게 연결하는 직선의 기울기는 특정지점의 좌표의 세제곱근으로 표시됨을 최적화 기법을 이용하여 유도하였다. 또한, 그 최단거리를 계산하는 공식과, x 축 및 y 축과의 교점의 좌표를 계산하는 공식을 제시하였다.

계산 사례를 통하여 본 논문에서 제시된 공식으로 구해진 계산결과가 최적해임을 확인하였다.

본 논문에 제시된 공식은 특정지점(전력관리본부 등)을 경유하면서 직각으로 교차하는 두 선로를 최단거리로 연결하는데 응용될 수 있을 것으로 사료된다.

Acknowledgement

This study was supported by the Research Program funded by the Seoul National University of Science and Technology.

References

〔1〕 M. Bazaraa, C. M. Shetty, “Nonlinear Programming Theory and Algorithms”, John Wiley & Sons Inc. pp. 175-214. 1979.
〔2〕 Sang-Joong Lee, “Calculation of Optimal Generation for System Loss Minimization Using Loss Sensitivities Derived by Angle Reference Transposition”, IEEE Trans on Power Sys, vol.18, no3, Aug 2003, pp.1216-17.
〔3〕 R. Courant & H. Robbins. “What is Mathematics?” Oxford University Press, New York, pp. 354-360, 1941.
〔4〕 Z. A. Melzak, “On the problem of Steiner”, Canad. Math. Bull. 4, pp143-148, 1960.
〔5〕 T. W. Ruijgrok. “The exact solution of a three-body

problem", European Journal of Physics, vol.5, pp. 21-24, 1984.

〔6〕 Sang-Joong Lee, "Location of Strategic Military Base Minimally Connecting Three Frontlines", Journal of the Korea Institute of Military Science and Technology, vol 16, No 3, pp . 250～254, Jun 2013.

〔7〕 Sang-Joong Lee · Jun-Young Yoon, "Cost Reduction through Shortest Path Connection of Electric Power Line", Journal of the Korean Institute of Illuminating and Electrical Installation Engineers(Jnl of KIIEE, ISSN 1229-4691), vol 25, No 5, pp 34-38, May 2011.

〔8〕 SangJoong Lee, "Minimal length of the straight line crossing right-angled edge via a specific point, The 4th International Conference on Convergence Technology, July 2-5, 2014.

◇ 저자소개 ◇

이상중 (李尙中)

1955년생. 부산공업고등전문학교 전기과 5년 졸업. 성균관대학교 전기공학과 졸업. 충남대학교 대학원 졸업(박사). 1987～1988년 PSEC 수료(Power System Engineering Course, GE Research Center in Schenectady, NY). 1976년 한국전력 입사. 1988～1996년 한전전력연구원 계통연구실. 1995년 한전전력연구원 수화력발전연구실 부장. 1996년 한전보령화력본부 복합시운전, 제어계측 부장. 1998년～현재 서울과학기술대학교 전기정보공학과 교수.