

유동함수-와도 관계를 이용한 격자볼츠만 방법에서의 격자 세밀화 모델

신 명 섭*†

* 동양미래대학교 기계공학부

Grid Refinement Model in Lattice Boltzmann Method for Stream Function-Vorticity Formulations

Myung Seob Shin*†

* School of Mechanical Engineering, Dongyang Mirae Univ.

(Received December 9, 2014 ; Revised February 24, 2015 ; Accepted February 26, 2015)

Key Words: Lattice Boltzmann Method(격자볼츠만 방법), Stream Function-Vorticity Formulation(유동함수-와도 관계), Grid Refinement(격자 세밀화), Cavity Flow(공동형상 유동)

초록: 본 연구에서는 2차원 비압축성 유체 유동을 해석하기 위하여 격자 세밀화 모델을 적용한 격자볼츠만 방법(LBM)을 수치적으로 연구하였다. 일반적으로 유동해석에서 충분한 정확도를 얻기 위해서는 관심 있는 영역에서 격자가 세밀하게 구성되어야 한다. 그래서 본 연구에서는 유동함수-와도 공식을 적용한 LBM에 격자 세밀화 모델을 적용하여 유동해석을 수행하였다. 공동형상 유동에서의 기존의 신뢰성 있는 유동장 결과와의 비교를 통해 본 연구의 격자 세밀화 모델을 적용한 격자볼츠만 방법의 신뢰성과 유용성을 검토하였다.

Abstract: In this study, we present a grid refinement model in the lattice Boltzmann method (LBM) for two-dimensional incompressible fluid flow. That is, the model combines the desirable features of the lattice Boltzmann method and stream function-vorticity formulations. In order to obtain an accurate result, very fine grid (or lattice) is required near the solid boundary. Therefore, the grid refinement model is used in the lattice Boltzmann method for stream function-vorticity formulation. This approach is more efficient in that it can obtain the same accurate solution as that in single-block approach even if few lattices are used for computation. In order to validate the grid refinement approach for the stream function-vorticity formulation, the numerical simulations of lid-driven cavity flows were performed and good results were obtained.

1. 서론

1990년대 이후, 격자볼츠만 방법(lattice Boltzmann method, LBM)은 기존의 수치해석 방법인 유한체적법(finite volume method), 유한요소법(finite element method)과는 다른 관점으로 운동학 이론(kinetic theory)을 기반으로 하는 볼츠만(Boltzmann) 방정식을 이용하여, 유체입자의 분포 확률 변화를 통해 유동을 모사하는 수치해석 방법이다. 거시적 물리량인 밀도, 속도, 압력 등은 분포

함수의 유체역학적 운동량의 확률적 분포에 의하여 정의할 수 있다. 이러한 특징을 가진 LBM은 연속체에서 희박기체의 유동까지 그 적용범위가 넓어 미소유동(microflow), 다상유동(multi-phase flow)의 유동해석 등 여러 가지 복합적인 유동(complex flows)^(1,2)에 대하여 기존의 수치계산 방법과 경쟁할 수 있는 유용한 수치계산 방법이다.

2차원 비압축성 점성 유동을 해석하기 위한 수치해석 방법으로는 Navier-Stokes(N-S) 방정식을 이용하는 방법과 유동함수-와도(stream function-vorticity) 관계를 이용하는 방법으로 나눌 수 있다. 일반적으로 N-S 방정식을 이용하는 방법을

† Corresponding Author, shinms@dongyang.ac.kr

선호하지만, 압력과 속도의 상관관계를 통해 유동을 해석하기 때문에 수치적 안정성을 유지하기 위해서는 제약조건이 필요하다. 반면에 유동함수-와도 관계를 이용하는 방법은 압력항을 제거하여 유체 유동을 해석하기 때문에 압력-속도의 상관관계를 고려하지 않는다. 대부분의 LBM은 N-S 방정식을 기반으로 유체 유동을 해석한다. 최근에 Chen 등^(3,4)은 유동함수-와도 관계를 적용한 LB 모델을 제안하였다. 이 모델은 기존의 N-S 방정식을 기반으로 하는 모델보다 간단하고 수치적 효율성이 좋은 것으로 알려져 있다.

LBM은 일정한 간격을 가진 정렬 격자(grid or lattice)를 이용한다. 일정한 격자를 사용한 LBM으로 유체 유동 해석에서 충분한 정확도를 얻기 위해서는 매우 많은 격자가 필요하며, 이러한 이유로 컴퓨팅 파워와 계산시간이 증가하게 된다. 일반적으로 유체 유동 해석에서는 전 계산영역에서 모두 매우 높은 정확도를 요구하는 것은 아니다. 만약 높은 정확도가 요구되는 영역에서만 격자를 밀집시킬 수 있다면 컴퓨팅 파워와 계산시간을 줄일 수 있다. 이러한 이유로 LBM에서는 관심 있는 영역에 격자를 밀집시키는 격자 세분화(grid refinement) 모델이 연구되어져 왔다.

Filippova and Hanel⁽⁵⁾은 LBM에서 처음으로 coarse 격자와 fine 격자의 서로 상호간에 rescaling된 층돌이후의 분포함수 교환 방법을 제안하였다. 모든 격자에서는 동일한 점성(or Re수)을 가져야 함으로 각 격자 크기(grid size)에 따른 완화시간(relaxation time)을 조절하여 전체 유동장을 해석하게 된다. coarse 격자는 전 계산영역에 구성되며, fine 격자는 관심 있는 영역에 패치(patches) 형태로 구성된다. fine 격자의 경계에서는 coarse 격자로부터 공간적, 시간적으로 2차 정확도를 가진 내삽법(2nd-order interpolation)을 이용하여 분포함수를 교환하게 된다.

후에 Lin and Lai⁽⁶⁾는 Filippova의 격자 세분화 모델과는 다르게 coarse 격자와 fine 격자 상호간의 분포함수(f_k)에 대한 rescaling 과정이 필요 없는 간단한 복합-블록(composite block-structured)을 적용한 LBM 모델을 제안하였다. coarse 격자는 전 계산영역에 구성되며, fine 격자로 구성된 블록(block)은 오직 관심 있는 영역에 패치 형태로 두 격자가 겹쳐지게 구성된다. Lin의 모델은 두 격자간의 동일한 계산 시간 레벨(time level)을 사

용하기 때문에 fine 격자의 경계(interface)에서는 coarse 격자의 분포함수를 시간에 대하여 선형 내삽법을 이용하여 표현하게 된다.

Yu 등⁽⁷⁾은 Filippova의 격자 세분화 모델을 적용하여 coarse 격자 블록과 fine 격자 블록으로 구성되는 멀티-블록(multi-block) 모델을 제안하였다. 각 블록은 Filippova와 Lin 모델과는 다르게 서로 겹쳐져 있지 않고, 오직 경계로만 연결되어져 있으며, 두 블록간의 정보 교환은 오직 각 블록의 경계에서만 이루어진다.

그러나 Filippova의 격자 세분화 모델과 Yu의 멀티-블록 모델은 coarse과 fine 격자 경계에서 교환하는 rescaling된 분포함수에 특이점(singularity, $\tau = 1$)이 발생하는 한계로 인하여 모델에 대한 일반성이 떨어진다. 또한, Lin의 복합-블록 모델은 두 격자 상호간에 교환하는 분포함수에 비평형 분포함수 부분을 고려하지 않기 때문에 경계 부분에서 부정확한 단점이 있다. 위의 단점들을 보완하기 위하여, Dupuis and Chopard⁽⁸⁾는 모든 완화시간을 사용하며, 경계에서 분포함수의 평형 부분과 비평형 부분 모두를 고려하는 정확하면서도 간단한 격자 세분화 모델을 제안하였다.

본 연구에서는 유동함수-와도 관계를 이용하는 LB 모델에 기존의 다른 격자 세분화 모델보다 정확하면서도 간단한 Dupuis and Chopard의 모델을 적용하여 수치 계산하였다. 유동해석을 위하여 coarse 격자와 몇 개의 fine 격자로 수치계산 영역을 구성하였으며, coarse 격자와 fine 격자 사이 경계에서의 유동함수와 와도의 분포함수를 교환하는 과정을 기술하였다. 적용된 격자 세분화 모델을 토대로 상관이 일정한 속도로 움직이는 정사각형 공동 형상 내부에서의 유동장 형태를 기존의 연구결과와 비교하여 본 연구에서 적용된 격자 세분화 모델의 신뢰성과 유용성을 평가하였다.

2. 격자볼츠만 방법에서의 유동함수-와도 방정식

비압축성 2차원 유동의 유동함수-와도 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (2)$$

여기서 Re 는 레이놀즈 수이고, ψ 와 ω 는 각각 유동함수(stream-function)과 와도(vorticity)이다. 또한, 유동함수의 정의로부터, x방향과 y방향 속도는 다음과 같다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

유체 유동의 물성치들(속도 등)을 LBM에서는 각 격자점에서 설정된 이산화된 속도벡터(\vec{e}_k)와 시간의 함수로 표현되는 각 이산화 방향의 확률적 입자 분포함수($f_k(\vec{x}, t)$)를 이용하여 유체 유동을 해석할 수 있다.

이산화된 분포함수($f_k(\vec{x}, t)$)의 형태로 볼츠만 방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \vec{\phi} \cdot \nabla f_k = \Omega_k \quad (5)$$

여기서 $\vec{\phi}$ 는 입자 속도벡터(particle velocity vector)이고, Ω_k 는 충돌과정에서 분포함수의 변화를 의미하는 충돌 연산자(collision operator)로서 Bhatnagar, Gross, and Krook(BGK)^(1,2)은 간단한 형태의 충돌 연산자를 제안하였다.

Chen 등^(3,4)에 의하면, 식 (1)의 와도 이동(vorticity transport) 방정식은 대류-확산 방정식 형태임으로, 단일 완화시간(single relaxation time, τ)을 적용한 이산화된 격자볼츠만 방정식(LBE)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_k(\vec{x} + c\vec{e}_k \Delta t, t + \Delta t) - f_k(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_k(\vec{x}, t) - f_k^{(eq)}(\vec{x}, t)] \quad (6)$$

여기서 $c = \Delta x / \Delta t$ 는 유체입자의 속력(fluid particle speed)이며, Δx 와 Δt 는 lattice에서의 계산 간격과 시간, 그리고 τ 는 무차원된 완화시간이다. 그리고 본 연구에서는 D2Q5 모델을 이용하기 때문에 각 lattice에서의 이산 속도(discrete velocity, $\vec{e}_k (k = 0, \dots, 4)$)는 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{e}_k = \begin{cases} (0, 0) & : k = 0 \\ \cos(k-1)\frac{\pi}{2}, \sin(k-1)\frac{\pi}{2} & : k = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (7)$$

와도의 평형분포함수 $f_k^{(eq)}$ 는 다음과 같다.

$$f_k^{(eq)} = W_k \omega \left[1 + 2.5 \frac{\vec{e}_k \cdot \vec{u}}{c} \right] \quad (8)$$

여기서 W_k 는 가중치 계수(weighting factors)로서, $W_k = 1/5 (k = 0, 1, 2, 3, 4)$ 이다.

각 lattice에서의 와도 ω 는 다음과 같이 분포함수 f_k 와 평형분포함수 $f_k^{(eq)}$ 의 합으로 나타낸다.

$$\omega = \sum_{k=0}^4 f_k = \sum_{k=0}^4 f_k^{(eq)} \quad (9)$$

그리고 레이놀즈 수(Re)는 다음과 같다.

$$Re = \frac{5}{2c^2(\tau - 0.5)} \quad (10)$$

식 (2)은 푸아송(Poisson) 방정식 형태로서, LBM을 적용한 많은 방법들이 연구되어져 있지만, 본 연구에서는 기존의 다른 LBM에 비하여 효율성과 정확성이 높은 Chai and Shi⁽⁹⁾이 제안한 수치해석 방법을 사용하였다. 푸아송 방정식을 해석하기 위한 LBE는 다음과 같다.

$$g_k(\vec{x} + c\vec{e}_k \Delta t, t + \Delta t) - g_k(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau_\psi} [g_k(\vec{x}, t) - g_k^{(eq)}(\vec{x}, t)] + \dot{\Omega}_k \quad (11)$$

여기서 $\dot{\Omega}_k = \Delta t \zeta_k R D$ 이며, R 은 푸아송 방정식의 오른쪽 소스항($R = -\omega$)이고, ζ_k 는 가중치계수로서 $\zeta_0 = 0, \zeta_k = 1/4 (k = 1, 2, 3, 4)$ 이며, 확산계수 $D = \frac{c^2}{2}(0.5 - \tau_\psi)$ 이다. 무차원된 와도의 완화시간 τ_ψ 는 0.5를 제외한 값으로 설정하여야 한다.⁽⁹⁾ $g_k^{(eq)}$ 는 유동함수에 대한 평형분포함수로서 다음과 같이 정의한다.

$$g_k^{(eq)} = \begin{cases} (\xi_0 - 1.0)\psi & : k = 0 \\ \xi_k \psi & : k = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (12)$$

여기서 ξ_k 는 가중치 계수로서 $\xi_0 = 0, \xi_k = 1/4 (k = 1, 2, 3, 4)$ 이다.

각 lattice에서의 유동함수 ψ 는 분포함수 g_k 와 평형분포함수 $g_k^{(eq)}$ 의 합으로 나타낸다.

$$\psi = \frac{1}{1-\xi_0} \sum_{k=1}^4 g_k = \frac{1}{1-\xi_0} \sum_{k=1}^4 g_k^{(eq)} \quad (13)$$

본 연구에서는 식 (3)과 식 (4)의 각 방향 속도를 유동함수 ψ 에 대하여 중앙차분법을 이용하여 나타내었다.

LBM에서는 일반적으로 각 방향의 분포함수 값을 이동, 분산시키는 이동과정(streaming step)과 각 격자점에서 점성(or 확산)계수에 의해 결정된 완화시간(τ, τ_ψ)에 의한 충돌과정(collision step)이라는 두 과정을 이용하여 유동을 수치 해석한다. 본 연구에서는 식 (6)와 식 (11)을 이용하여 각 lattice에서의 분포함수(f_k, g_k)를 해석하고, 해석된 분포함수를 이용하여 와도 ω (식 (9))와 유동함수 ψ (식 (13))를 결정한다.

3. LBM에서의 격자 세밀화 적용 과정

유동함수-와도 관계를 적용한 LB 모델은 와도 ω 의 분포함수 f_k 와 유동함수 ψ 의 분포함수 g_k 로 구성되어진다. 본 연구에서는 coarse 격자와 fine 격자 사이의 경계에서의 분포함수 교환 과정(rescaling)은 두 분포함수 모두 동일한 과정을 사용하였다. 그래서 와도 ω 의 분포함수 f_k 를 통해 coarse 격자와 fine 격자 사이 경계에서의 교환 과정을 설명하고자 한다. 격자 세밀화 모델에서는 서로 다른 크기의 격자 상호간의 정보 교환 방법이 매우 중요하다. Fig. 1은 개략적으로 coarse 격자와 fine 격자 상호간의 정보 교환 과정을 보여주고 있다.

coarse와 fine 두 격자간의 공간적, 시간적 비율은 다음과 같이 정의된다.

$$N_r = \frac{\Delta x_c}{\Delta x_f} = \frac{\Delta t_c}{\Delta t_f} \quad (14)$$

여기서 각각의 아래첨자 c와 f는 coarse와 fine 격자의 변수를 의미한다. 본 연구에서는 coarse 격자 크기와 fine 격자 크기의 비율인 $N_r = 2$ 을 사용하여 fine 격자를 구성하였다.

격자(lattice) 크기 Δx 가 결정되면, 점성계수는 다음과 같이 정의된다.

$$\nu = c_s^2(\tau - 0.5)\Delta t \quad (15)$$

여기서 c_s 는 lattice 음속(speed of sound)이며, D2Q5 모델에서는 $c_s = \sqrt{2}c/\sqrt{5}$ 이다.⁽³⁾

각 coarse와 fine 격자에서는 같은 점성계수(or Re)를 가져야 함으로 식 (14)를 식 (15)에 대입하면, coarse 격자의 완화시간 τ_c 와 fine 격자의 완화시간 τ_f 사이에는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\tau_f = \frac{\Delta x_c}{\Delta x_f} \left(\tau_c - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \quad (16)$$

서로 다른 두 격자 사이의 경계에서의 변수들은 서로간의 연속성을 가져야함으로 서로 간에 교환하는 분포함수는 다음의 과정으로 결정되어야 한다.

분포함수는 다음과 같이 평형 부분(equilibrium part)과 비평형 부분으로(non-equilibrium part)로 분해된다.⁽⁸⁾

$$f_k = f_k^{(eq)} + f_k^{(neq)} \quad (17)$$

여기서 서로 다른 격자의 경계에서의 평형분포함수는 서로간의 연속성을 가져야함으로 다음과 같이 동일한 관계를 가지며,

$$f_k^{(eq)} = f_k^{(eq,f)} = f_k^{(eq,c)} \quad (18)$$

비평형분포함수는 두 격자간의 완화시간 관계에 의하여 다음과 같은 관계를 가진다.

$$f_k^{(neq,f)} = \frac{\Delta t_f \tau_f}{\Delta t_c \tau_c} f_k^{(neq,c)} = \left(\frac{1}{N_r} \right) \left(\frac{\tau_f}{\tau_c} \right) f_k^{(neq,c)} \quad (19)$$

식 (18)와 식 (19)을 식 (17)에 대입하여 정리하면, coarse와 fine 격자 사이의 rescaling된 분포함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$f_k^c = f_k^{(eq)} + (f_k^f - f_k^{(eq)}) N_r \left(\frac{\tau_c}{\tau_f} \right) \quad (20)$$

$$f_k^f = \tilde{f}_k^{(eq)} + (\tilde{f}_k^c - \tilde{f}_k^{(eq)}) \frac{1}{N_r} \left(\frac{\tau_f}{\tau_c} \right) \quad (21)$$

여기서 \tilde{f}_k 는 coarse와 fine 격자 사이 경계에서의 공간(spatial)과 시간(temporal)적으로 내삽법(interpolation)을 이용한 분포함수이다. 그래서 경계에서의 fine 격자의 f_k^f 를 결정하기 위해서는 경

계에서의 coarse 격자의 분포함수 \tilde{f}_k^f 와 평행분포 함수 $\tilde{f}_k^{(eq)}$ 를 공간과 시간적으로 내삽하는 과정이 필요하다.

본 연구에서는 Lin and Lai⁽⁶⁾에 의해서 제안된 내삽 과정을 사용하였으며, Fig. 1(b)에 두 격자 경계에서의 내삽 과정을 도식화하여 나타내었다. 그 과정을 간략히 설명하면 다음과 같다.

1) 먼저, coarse 격자에서 전체 계산영역에 대하여 수치계산을 수행한다. ($f_k^c(T_0), f_k^c(T_1)$)

2) 계산된 coarse 격자의 분포함수를 토대로 시간에 대하여 공통 경계점(Fig. 1(a)의 흰색원)에서의 $\tilde{f}_k^c(t_m)$ 를 다음의 식을 이용하여 결정한다.

$$\tilde{f}_k^c(t_m) = f_k^c(t_0) + \frac{m}{N_r} (f_k^c(t_{N_r}) - f_k^c(t_0)) \quad (22)$$

여기서 m은 fine 격자에서의 시간 간격(time step)으로서 $m = 0, 1, \dots, N_r$ 이다.

3) 결정된 경계(Fig. 1(a)의 흰색원)에서의 분포함수 $\tilde{f}_k^c(A, t_m), \tilde{f}_k^c(C, t_m)$ 를 토대로 fine 격자 경계점(Fig. 1(a)의 회색원)에서의 분포함수 $\tilde{f}_k^c(B, t_m)$ 를 공

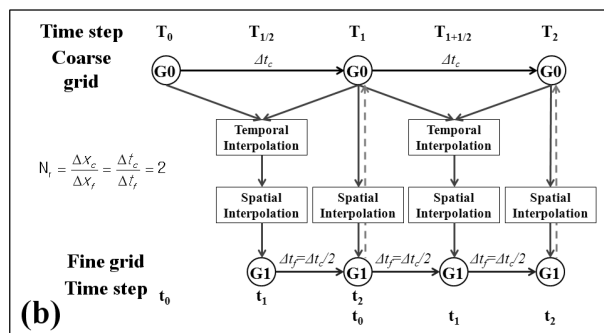
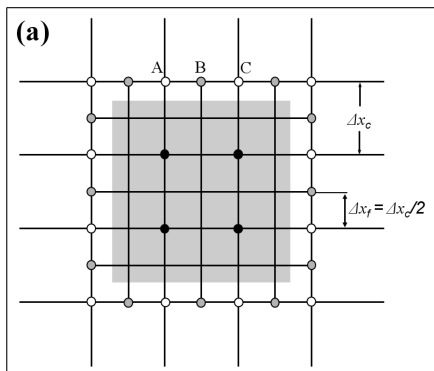


Fig. 1 Interpolation procedure of a coarse grid and a fine grid

간적으로 선형 내삽(linear interpolation)을 이용하여 결정한다.

4) fine 격자는 오직 경계에서만 식 (21)을 토대로 coarse 격자의 정보를 전달받게 되며, coarse 격자는 fine 격자 영역에서의 공통점(Fig. 1(a)의 검정색원)에서 식 (20)을 토대로 정보를 전달받게 된다.

Fig. 2는 본 연구에 적용된 격자 세분화 모델에 대한 플로우 차트(flow chart)이다.

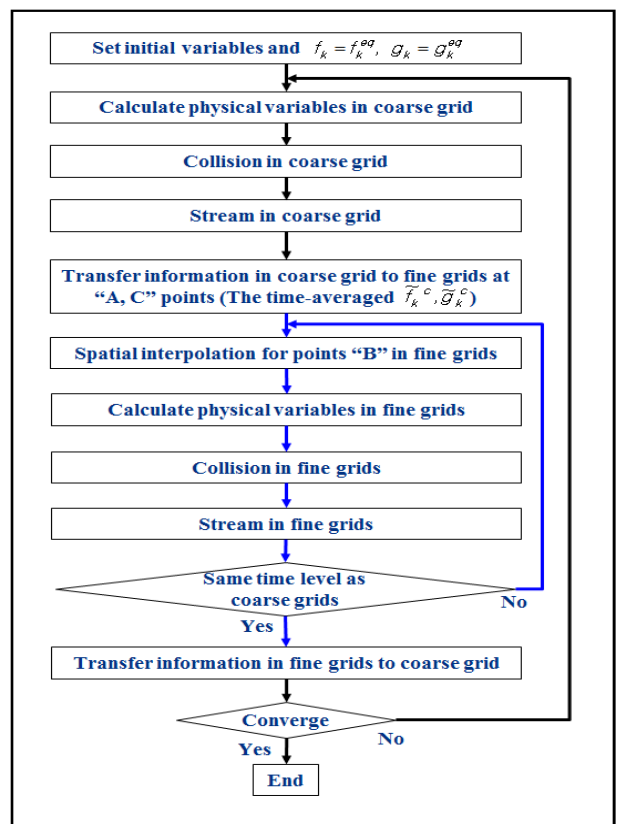


Fig. 2 Flow chart of the computational procedure in the grid refinement model

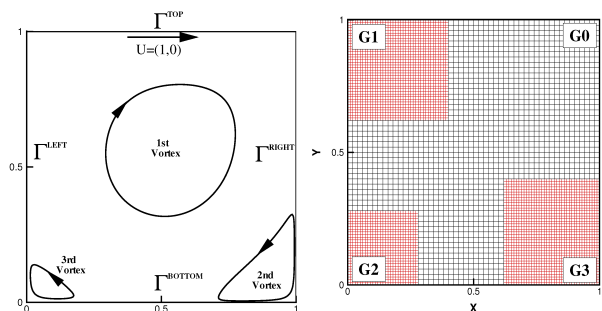


Fig. 3 The lid-driven cavity flow; (a)schematic of problem geometry, (b)grid refinement model layout

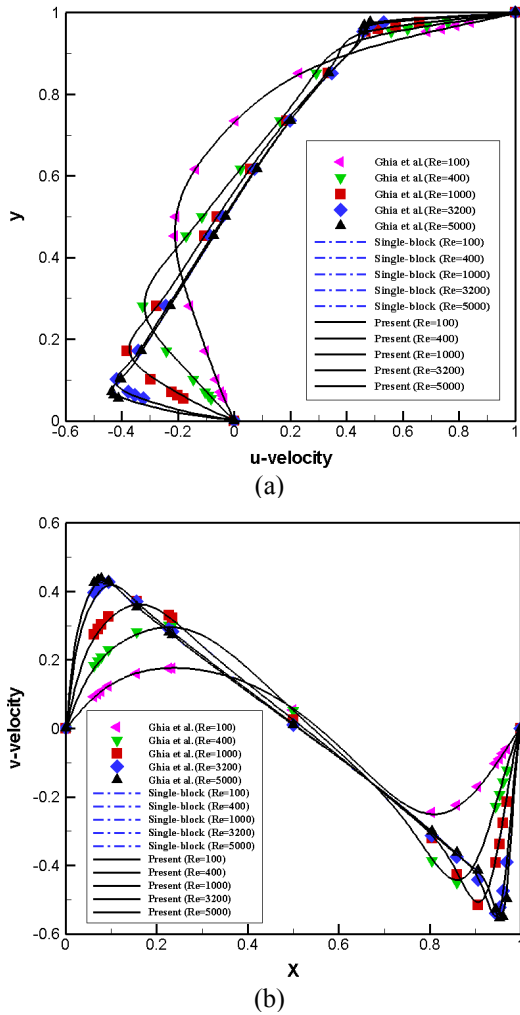


Fig. 4 The velocity components, u and v , along the vertical and horizontal lines through the square cavity center at different Reynolds number: $Re=100, 400, 1000, 3200,$ and 5000 . Dashdot lines: single-block, solid lines: present, symbols: Chia et al.⁽¹¹⁾

4. 수치계산 조건 및 결과

2차원 정사각 공동 유동은 단순한 형상을 가지면서도 Re 수의 변화에 따라 내부 유동에 매우 복잡한 현상을 가지고 있다. 이러한 유동현상은 각종 수치해법의 해석 정확도 및 정밀도를 평가하기 위한 척도로 사용되고 있으며, 많은 연구자들에 의하여 연구가 진행되어 왔다.⁽¹⁰⁾ 특히 Chia 등⁽¹¹⁾은 고정밀도 분해능 Navier-Stokes 해석 방법을 사용하여 공동형상 내부 유동을 모사하였으며, 이 후 수많은 연구자들이 그 결과를 이용하여 새로운 수치해석 방법을 검증해왔다. 그래서 본 연구에서는 단일-블록(single-block) 모델과 격

자 세분화 모델을 적용한 수치해석 결과를 기존 연구 결과와 비교하여 신뢰성과 유용성을 평가하고자 한다.

4.1 수치계산 조건

Fig. 3(a)에서 보이는 것처럼, 정사각 공동 유동의 계산영역은 $[0, 1] \times [0, 1]$ 이며, 위쪽(Top) 경계는 일정한 속도(U_0)로 움직이고 다른 경계는 벽면임으로 벽면점착(no-slip) 조건을 사용한다. 수치계산을 위한 경계조건으로는 다음과 같다.

1) 위쪽 경계(Γ^{TOP})

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial n} = U_0, u = U_0, v = 0$$

$$\omega = \frac{7\psi_w - 8\psi_{w-1} + \psi_{w-2}}{2(\Delta n^2)} - \frac{3U_0}{\Delta n} \quad (23a)$$

2) 왼쪽(Γ^{LEFT}), 오른쪽(Γ^{RIGHT}), 아래쪽경계

$$(\Gamma^{BOTTOM}); \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, u = v = 0$$

$$\omega = \frac{7\psi_w - 8\psi_{w-1} + \psi_{w-2}}{2(\Delta n^2)} \quad (23b)$$

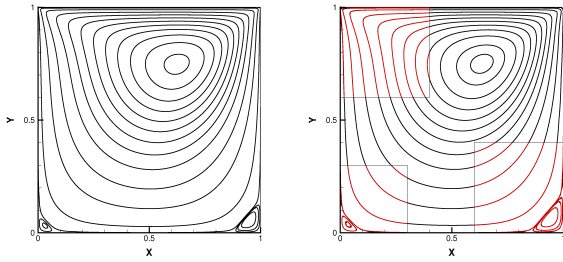
여기서 w 는 벽면에서의 격자이며, n 은 벽면에서의 수직방향을 의미한다.

정사각형 공동 유동에 대한 격자수는 단일-블록인 경우 200×200 이며, 격자 세분화 모델을 적용한 경우는 Fig. 3(b)에서 보이는 것처럼, coarse 격자 $G_0 = 100 \times 100$ 이고, 밀집된 fine 격자는 공동 형상의 왼쪽 상단 $G_1 = 80 \times 80$, 왼쪽 아래 $G_2 = 60 \times 60$, 오른쪽 아래 $G_3 = 80 \times 80$ 으로 구성하였다.

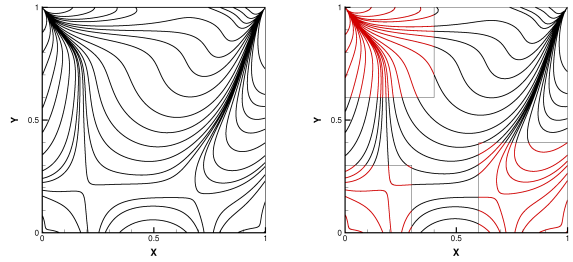
4.2 정사각 공동형상 내부에서의 유동 결과

Fig. 4는 공동 형상의 수직, 수평 중심선에서의 속도분포를 Chia 등⁽¹¹⁾의 결과와 비교하여 나타낸 것이다. Fig. 4에서 보이는 것처럼, 단일-블록과 격자 세분화 모델 모두 Chia의 결과와 거의 유사한 속도분포를 보이고 있다.

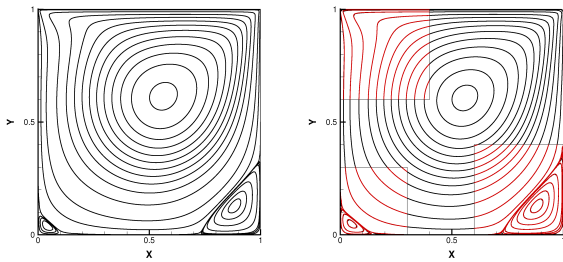
Table 1은 각 Re 수에 따른 주 와동(primary vortex)과 추가적인 와동(secondary vortices: BL, BR)의 위치와 유선 강도를 기존 연구들(Chia 등,⁽¹¹⁾ Hou 등,⁽¹²⁾ Gupta 등,⁽¹³⁾ Shin 등⁽¹⁴⁾)의 결과와 비교하여 나타내었다. 단일-블록과 격자 세분화 모델 모두 대체로 기존 연구결과들과 약 1% 미만의 차이를 나타내고 있다.



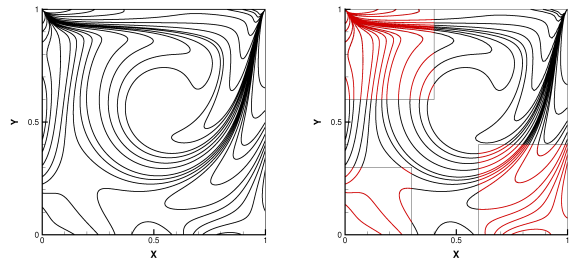
(a) Re=100



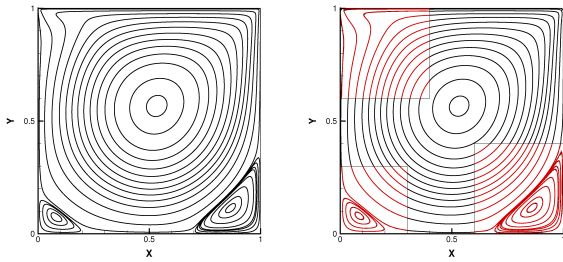
(a) Re=100



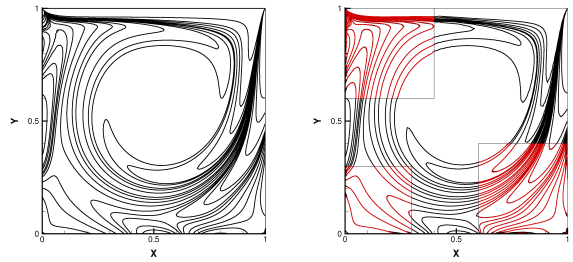
(b) Re=400



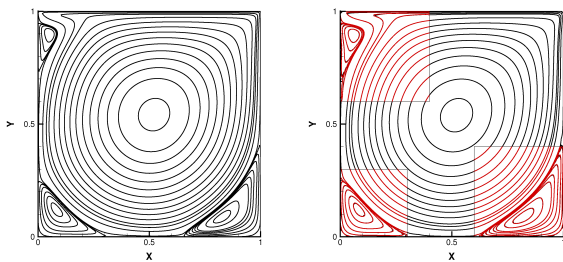
(b) Re=400



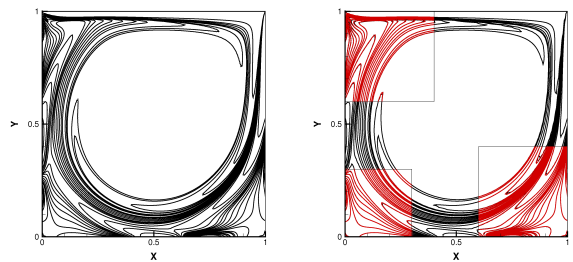
(c) Re=1000



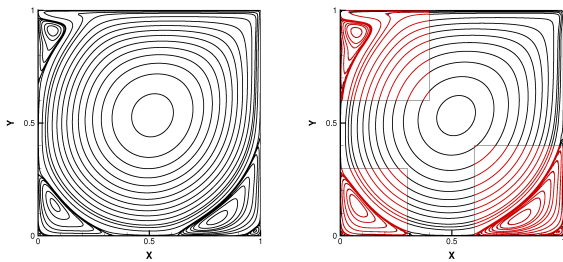
(c) Re=1000



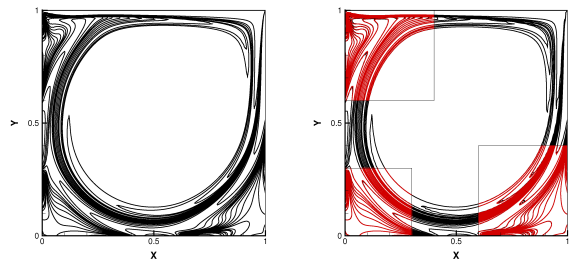
(d) Re=3200



(d) Re=3200



(e) Re=5000



(e) Re=5000

Fig. 5 Contour lines of stream function in a lid-driven square cavity flow at Re=100, 400, 1000, 3200, and 5000 (from top to bottom). Left: single-block, right: present

Fig. 6 Contour lines of vorticity in a lid-driven square cavity flow at Re=100, 400, 1000, 3200, and 5000 (from top to bottom). Left: single-block, right: present

Table 1 The strengths ψ and location (x,y) of the primary vortex and secondary vortices of the lid-driven square cavity flow

Re	Source	Primary Vortex			Bottom Left			Bottom Right		
		ψ	x	y	ψ	x	y	ψ	x	y
100	Ghia[11]	-0.103	0.6172	0.7344	1.25E-5	0.9453	0.0625	1.75E-6	0.0313	0.0391
	Hou[12]	-0.103	0.6196	0.7373	1.22E-5	0.9451	0.0627	1.72E-6	0.0392	0.0353
	Gupta[13]	-0.103	0.6125	0.7375	1.45E-5	0.9375	0.0625	1.83E-6	0.0375	0.0375
	Shin[14]	-0.103	0.6172	0.7379	1.32E-5	0.9378	0.0597	1.92E-6	0.0362	0.0353
	Single-block	-0.103	0.6197	0.7393	1.28E-5	0.9401	0.0599	1.48E-6	0.0355	0.0355
	Present	-0.103	0.6186	0.7374	1.27E-5	0.9402	0.0598	1.44E-6	0.0352	0.0354
400	Ghia[11]	-0.114	0.5547	0.6055	6.42E-4	0.8906	0.1250	1.42E-5	0.0508	0.0469
	Hou[12]	-0.112	0.5608	0.6078	6.19E-4	0.8902	0.1255	1.30E-5	0.0549	0.0510
	Gupta[13]	-0.113	0.5500	0.6125	6.48E-4	0.8875	0.1250	1.30E-5	0.0500	0.0500
	Shin[14]	-0.113	0.5547	0.6055	6.35E-4	0.8804	0.1219	1.02E-5	0.0511	0.0411
	Single-block	-0.114	0.5501	0.6061	6.30E-4	0.8898	0.1204	1.21E-5	0.0499	0.0502
	Present	-0.113	0.5528	0.6078	6.33E-4	0.8892	0.1205	1.29E-5	0.0500	0.0499
1000	Ghia[11]	-0.118	0.5313	0.5625	1.75E-3	0.8594	0.1094	2.31E-4	0.0859	0.0781
	Hou[12]	-0.118	0.5333	0.5647	1.69E-3	0.8667	0.1137	2.22E-4	0.0902	0.0784
	Gupta[13]	-0.117	0.5250	0.5625	1.70E-3	0.8625	0.1125	2.02E-4	0.0875	0.0750
	Shin[14]	-0.118	0.5313	0.5662	1.55E-3	0.8645	0.1117	1.54E-4	0.0789	0.0742
	Single-block	-0.119	0.5300	0.5631	1.60E-3	0.8699	0.1130	2.46E-4	0.0802	0.0780
	Present	-0.118	0.5320	0.5642	1.64E-3	0.8608	0.1124	2.31E-4	0.0874	0.0756
2000	Hou[12]	-0.120	0.5255	0.5490	2.44E-3	0.8471	0.0980	7.26E-4	0.0902	0.1059
	Gupta[13]	-0.118	0.5250	0.5500	2.41E-3	0.8375	0.1000	8.58E-4	0.0875	0.1000
	Single-block	-0.120	0.5229	0.5500	2.48E-3	0.8450	0.0997	7.93E-4	0.0899	0.1003
	Present	-0.119	0.5250	0.5498	2.44E-3	0.8397	0.1000	7.35E-4	0.0847	0.1050
3200	Ghia[11]	-0.120	0.5165	0.5469	3.14E-3	0.8125	0.0859	9.78E-4	0.0859	0.1094
	Gupta[13]	-0.122	0.5188	0.5438	2.86E-3	0.8125	0.0875	1.03E-3	0.0813	0.1188
	Shin[14]	-0.122	0.5187	0.5440	2.89E-3	0.8132	0.0853	1.05E-3	0.0816	0.1201
	Single-block	-0.123	0.5183	0.5423	2.88E-3	0.8203	0.0847	1.11E-3	0.0839	0.1201
	Present	-0.122	0.5187	0.5440	2.74E-3	0.8151	0.0852	1.04E-3	0.0812	0.1203
5000	Ghia[11]	-0.119	0.5117	0.5352	3.08E-3	0.8086	0.0742	1.36E-3	0.0703	0.1367
	Hou[12]	-0.121	0.5176	0.5373	3.03E-3	0.8078	0.0745	1.35E-3	0.0784	0.1313
	Gupta[13]	-0.122	0.5125	0.5375	2.96E-3	0.8000	0.0750	1.32E-3	0.0750	0.1313
	Shin[14]	-0.121	0.5156	0.5349	3.19E-3	0.8071	0.0748	1.29E-3	0.0746	0.1324
	Single-block	-0.123	0.5148	0.5350	3.22E-3	0.8066	0.0745	1.45E-3	0.0749	0.1353
	Present	-0.121	0.5158	0.5362	3.28E-3	0.8062	0.0745	1.21E-3	0.0741	0.1358

Fig. 5, Fig. 6은 Re수가 100, 400, 1000, 3200과 5000일 때의 단일-블록과 격자 세밀화 모델의 유선과 와도의 유동형태를 보여주고 있다. 단일-블록과 격자 세밀화 모델 모두 다른 문헌의 수치계산 결과와 거의 유사한 유동 구조를 보여주고 있다. Fig. 5에서 보이는 것처럼, 상판이 왼쪽에서 오른쪽으로 이동함으로써 공동 형상 중간부분에

시계방향으로 회전하는 주 와동이 발생한다. Re수가 증가함으로써 주 와동의 회전방향과는 다르게 반시계방향으로 밀면 양 모서리에 추가적인 와동(BL, BR)이 발생하며, 점점 그 크기가 증가하는 현상을 볼 수 있다. 또한 주 와동이 공동형상 중심으로 이동하는 현상도 볼 수 있다. 두 모델 모두 Re수가 1000 이하에서는 왼쪽 상단부분에 추

가적인 와동(TL)이 발생하지 않지만, Re수가 2000 이상인 경우에는 반시계방향으로 회전하는 추가적인 와동이 발생하는 것을 볼 수 있다. Benjamin and Denny⁽¹⁵⁾의 연구에 의하면 Re수가 1200정도이면 TL이 발생하며, Re수가 10000이 될 때까지는 그 크기와 강도가 증가한다. 또한 Re=5000일 때는 오른쪽 아래에 추가적인 와동(tertiary vortex)이 발생하는 현상을 볼 수 있다. 이러한 본 연구에서의 유동형태는 기존의 연구결과와 거의 유사한 공동형상에서의 유동형태를 보여주고 있다.

5. 결론

본 연구에서는 유동함수-와도 관계를 적용한 LB 모델에 격자 세밀화 모델을 적용하여 수치계산을 수행하였다. coarse 격자와 fine 격자 사이 경계에서의 유동함수와 와도의 분포함수를 교환하는 과정을 보였다. 적용된 격자 세밀화 모델의 정확도와 효율성을 보이기 위하여 정사각 공동형상 유동에 대하여 수치계산을 수행하였으며, 기존 연구들과의 비교를 토대로 본 연구에서 적용된 격자 세밀화 모델에 대한 신뢰성과 효율성을 파악하였다. 후에 본 연구에서 적용된 격자 세밀화 모델을 난류 유동과 3차원 유동에 확대 적용하면 수치계산 시간을 줄일 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌 (References)

- (1) Chen, S. and Doolen, G. D., 1998, "Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 30, pp. 329~364.
- (2) Aidun, C. K. and Clausen, J. R., 2010, "Lattice-Boltzmann Method for Complex Flows," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 42, pp. 439~472.
- (3) Chen, S., Tolke, J., and Krafczyk, M., 2008, "A New Method for the Numerical Solution of Vorticity-streamfunction Formulations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 367~376.
- (4) Chen, S., 2009, "A Large-eddy-based Lattice Boltzmann Model for Turbulent Flow Simulation," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 215, pp. 591~598.
- (5) Filippova, D. and Hanel, D., 1998, "Grid Refinement for Lattice-BGK Models," *Journal of Computational physics*, Vol. 147, pp. 219~228.
- (6) Lin, C.L. and Lai, Y., 2000, "Lattice Boltzmann Method on Composite Grids," *Physical Review E*, Vol. 62, pp. 2219~2225.
- (7) Yu, D., Mei, R. and Shyy, W., 2002, "A Multi-block Lattice Boltzmann Method for Viscous Fluid Flows," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 39, pp. 99~120.
- (8) Dupuis, A. and Chopard, B., 2003, "Theory and Applications of an Alternative Lattice Boltzmann Grid Refinement Algorithm," *Physical Review E*, Vol. 67, 066707.
- (9) Chai, Z. and Shi, B., 2008, "A Novel Lattice Boltzmann Model for the Poisson Equation," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 32, pp. 2050~2058.
- (10) Shankar, P. N. and Deshpande, M. D., 2000, "Fluid Mechanics in the Driven Cavity," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 32, pp. 93~136.
- (11) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (12) Hou, S., Zou, Q., Chen, S., Doolen, G. and Cogley, A. C., 1995, "Simulation of Cavity Flow by Lattice Boltzmann Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 118, pp. 329~347.
- (13) Gupta, M. M. and Kalita J. C., 2005, "A New Paradigm for Solving Navier-Stokes Equations: Streamfunction-velocity Formulation," *Journal of Computational Physics*, Vol. 207, pp. 52~68.
- (14) Shin, M. S., Jeon, S. Y. and Yoon, J. Y., 2013, "Numerical Investigation of Mixing Characteristics in a Cavity Flow by Using Hybrid Lattice Boltzmann Method," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. B*, Vol. 37, No. 7, pp. 683~693.
- (15) Benjamin, A. S. and Denny, V. E., 1979, "On the Convergence of Numerical Solutions for 2-D Flows in a Cavity at Large Re," *Journal of Computational physics*, Vol. 33, pp. 340~358.