

# 복합소재 적층구조 이론 (Ⅲ)

-고차전단변형 판 이론-

## Theory of Laminated Composite Structures (Ⅲ)

-High-order Plate Theory-



김규동 (Gyu-Dong Kim) 학생회원 | 안동대학교 토목공학과 박사과정 | kkd1514@naver.com

이상열 (Sang-Youl Lee) 이사 | 안동대학교 토목공학과 교수 | lsy@anu.ac.kr

### 1. 서론

전 호에서 기술한 바와 같이 복합소재를 적용한 적층 구조의 이론은 크게 고전적 이론 (CLT: Classical Laminated Theory), 일차전단변형 이론 (FSDT: First Shear Deformation Theory), 그리고 고차항 이론 (HST: Higher-order Shear Deformation theory)로 나눌 수 있다. 정밀해석이 필요한 경우, 고차전단변형 판 이론을 사용하게 되는데 통상적으로 두께가 얇은 구조의 경우에 대해서는 고차항 판이론이 필요하지 않을 수 있으나, 하중 조건, 경계조건 및 단면 형상변화에 따라 고차항 이론을 적용하지 않으면 오차가 발생하는 경우가 발생할 수 있다.

지난기사에서는 고전적 이론 및 일차전단변형 판이론을 소개하였으며, 본 기사에서는 Reddy의 고차항 판이론 및 유한요소 정식화를 기술하고 강성 계산을 통한 예제를 통하여 고차항의 효과를 분석하기로 한다.

### 2. 고차전단변형 이론 및 유한요소 정식화

#### 2.1 고차전단변형 이론

본 연구에서 적용한 고차항 판이론은 그림 1과 같이 변형 전 판에서 중립면의 수직관계는 변형 후에도 수직한다는 고전적판이론과 일차항 판이론의 기본가정과는 달리 변형 후에 중립면의 횡 방향 변위는 비선형을 보이게 되며 실구조물과 같이 구조물의 상·하면에 전단 응력이 0으로 나타나게 된다. 판의 비선형 고차항 판이론에 의한 변위는 다음과 같은 관계로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_o(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t) \\ &\quad - c_1 z^3 (\phi_x + c_0 w_{0,x}) \\ v(x,y,z,t) &= v_o(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t) \\ &\quad - c_1 z^3 (\phi_y + c_0 w_{0,y}) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $c_0$ 과  $c_1$ 은 전단변형의 3차항을 나타내는 변수로서 0으로 놓으면 식 (2)는 일차항 판이론의 가정식과 동일하게 된다.

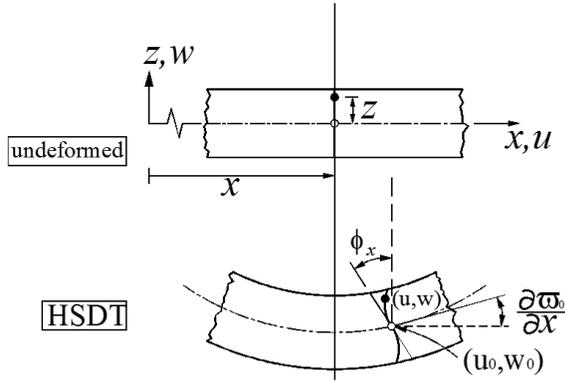


그림 1. 판의 두께방향에 대한 비선형 전단변형

### 2.2 유한요소 정식화

본 학술기사에서 적용하는 유한요소법은 판의 중립면에서의  $x$ ,  $y$  그리고  $z$ 방향으로의 변위 ( $u_0, v_0, w_0$ )와 변위각 ( $w_{0,x}, w_{0,y}$ ), 그리고 회전각 ( $\phi_x, \phi_y$ )이 고려된 요소의 절점 당 7개의 자유도를 갖는 Nonconforming 요소가 사용되었으며 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^4 \Phi_j [I_4] \begin{Bmatrix} u_{0j} \\ v_{0j} \\ \phi_{xj} \\ \phi_{yj} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ w_{0,x} \\ w_{0,y} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} \Psi_j & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_j^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_j^\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0j} \\ w_{0j,x} \\ w_{0j,y} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서,  $[I_4]$ 는  $4 \times 4$  크기를 갖는 Identity 행렬,  $\Phi$ 는 Lagrangian 보간함수,  $\Psi, \Psi^\alpha$ , 그리고  $\Psi^\beta$ 는 Hermite 보간함수이며  $\Psi$ 의 1차 및 2차 미분을 각각 의미한다.

수치적분의 용이함을 위하여 전체좌표계  $(x, y)$ 에서의 강성행렬은 -1.0부터 1.0까지의 일정한 범위로 변환된 새로운 국부좌표계  $(\eta_1, \eta_2)$ 에서의 강성행렬  $[K]_T$ 로 재구성하게 되며 다음의 식으로 요약하여 나타낼 수 있다.

$$[K]_T = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{B}]^T [D]_s [\bar{B}] |J| d\eta_1 d\eta_2 \quad (3)$$

식 (3)에서  $[D]_s$ 는  $13 \times 13$ 의 크기를 갖는 전체좌표계의 강성행렬을,  $[\bar{B}]$ 는  $13 \times 28$ 의 크기를 갖는 변환된 국부좌표계의 변형률-변위 관계 행렬을, 그리고  $|J|$ 는 Jacobian 변환행렬을 각각 의미하며,  $[D]_s$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[D]_s = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & E_{ij} & 0 & 0 \\ B_{ij} & D_{ij} & F_{ij} & 0 & 0 \\ E_{ij} & F_{ij} & H_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{ij} & D_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & D_{ij} & F_{ij} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서,  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ 는 단면력과 변형률의 관계를 나타내는 강성을 의미한다.  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ 는 적층판의 강성과 두께의 관계를 나타내며  $E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ 는 두께에 대하여 3차 이상의 비선형 고차항 효과를 나타내며 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, \quad i, j = 1, 2, 6;$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z^2, z^6) dz, \quad i, j = 4, 5. \quad (5)$$

한편, 변형률-변위 관계 행렬은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[\bar{B}] = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} \Phi_{j,\eta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{j,\eta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{j,\eta_1} & \Phi_{j,\eta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{j,\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{j,\eta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{j,\eta_1} & \Phi_{j,\eta_2} \\ 0 & 0 & \Psi^{(11)} & \Psi^{(12)} & \Psi^{(13)} & -c_1\Phi_{j,\eta_1} & 0 & \\ 0 & 0 & \Psi^{(21)} & \Psi^{(22)} & \Psi^{(23)} & 0 & -c_1\Phi_{j,\eta} & \\ 0 & 0 & \Psi^{(31)} & \Psi^{(32)} & \Psi^{(33)} & -c_1\Phi_{j,\xi} & -c_1\Phi_{j,\eta} & \\ 0 & 0 & \Psi_{j,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_j \\ 0 & 0 & \Psi_{j,\xi} & 0 & 0 & \Phi_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2\Psi_{j,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2\Phi_j \\ 0 & 0 & -c_2\Psi_{j,\eta} & 0 & 0 & -c_2\Phi_j & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$\Psi^{(11)} = -c_1\Psi_{j,\eta_1\eta_1}, \Psi^{(12)} = -c_1\Psi_{j,\eta_1\eta_1}^\alpha, \Psi^{(13)} = -c_1\Psi_{j,\eta_1\eta_1}^\beta, \Psi^{(21)} = -c_1\Psi_{j,\eta_1\eta_2}, \Psi^{(22)} = -c_1\Psi_{j,\eta_2}^\alpha, \\ \Psi^{(33)} = -c_1\Psi_{j,\eta_2\eta_2}^\beta, \Psi^{(31)} = -c_1\Psi_{j,\xi\eta}, \Psi^{(32)} = -c_1\Psi_{j,\eta_1\eta_2}^\alpha, \Psi^{(33)} = -c_1\Psi_{j,\eta_2}^\beta$$

### 2.3 국부 질량 행렬 및 전체 시스템 행렬

비선형 고차항 판이론을 적용한 평판에서의 관성행렬 {S}와 가속도 벡터 {A}는 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다. 식 (2)에서 Nonconforming 요소의  $w_0$ 와 관련된 3개의 절점당 가속도  $\Delta_i$ 는  $\Delta_1 = \ddot{w}_o$ ,  $\Delta_2 = \ddot{w}_{o,x}$ , 그리고  $\Delta_3 = \ddot{w}_{o,y}$ 이다.

$$\{S\} = [\rho]\{A\} = \begin{bmatrix} I_o & 0 & -4I_3/3h^2 & J_1 & 0 \\ 0 & I_o & -4I_3/3h^2 & 0 & J_1 \\ -4I_3/3h^2 - 4I_3/3h^2 I_o + 16I_6/9h^4 & J_4 & J_4 & K_2 & 0 \\ J_1 & 0 & J_4 & K_2 & 0 \\ 0 & J_1 & J_4 & 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_o \\ \ddot{v}_j \\ \Delta_j \\ \ddot{\phi}_{xj} \\ \ddot{\phi}_{yj} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서,

$$I_i = \sum_{k=1}^m \int_{x_{3k}}^{x_{3k+1}} \rho^{(k)} z^i dz \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 6),$$

$$J_i = I_i - 4I_i/3h^2 + 2,$$

$K_2 = I_2 - 8I_4/3h^2 + 16I_6/9h^4$ 이며, m은 전체 적층수이다.

국부좌표계( $\eta_1, \eta_2$ )에서의 평판 요소에서의 질량행렬은 다음과 같은 관계로 표시된다.

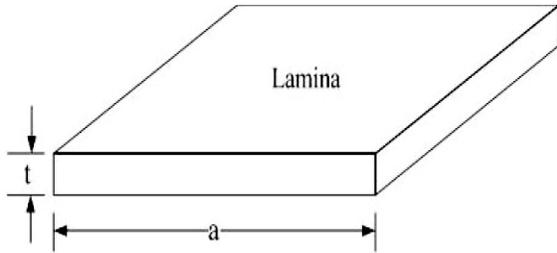
$$[M]_T = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{H}]^T [\rho] [\bar{H}] |J| d\eta_1 d\eta_2 \quad (8)$$

여기서,  $[\bar{H}]$ 는 Lagrangian과 Hermite 형상함수의 조합행렬이다.

### 3. 강성 계산 예

그림 2와 같은 해석모델에 대하여 고차항이론을 적용하여 강성값을 계산하였다.

해석에 사용된 복합재료의 물성은 다음과 같다.



$$\begin{aligned}
 E_1 &= 13.00E+10 \text{ N/m}^2 \\
 E_2 &= 1.00E+10 \text{ N/m}^2 \\
 G_{12} &= G_{13} = 0.5E+10 \text{ N/m}^2 \\
 G_{23} &= 0.33E+10 \text{ N/m}^2 \\
 \nu_{12} &= 0.35 \\
 \nu_{21} &= 0.35
 \end{aligned}$$

그림 2. 해석 모델

각 적층배열에 따른 해석을 위한 각 이론 별로 강성 값 계산 과정을 정리하면 다음과 같다.

1) 대칭 적층배열

<input data>

```

- Laminate Definition
nply = 8
angle = [ 0 45 45 0 0 45 45 0 ]
t = [ 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 ]

- Material Property
E1 = [ 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 ]
E2 = [ 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 ]
nu12 = [ 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 ]
nu21 = [ 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 ]
G12 = [ 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 ]
G13 = [ 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 ]
G23 = [ 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 4.815E+10 ]
    
```

<강성 계산 결과>

For i, j = 1, 2, 6

|                 |                       |                 |                       |                 |                         |
|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-------------------------|
| A <sub>ij</sub> | 1.0e+010 *            | B <sub>ij</sub> | 1.0e-006 *            | E <sub>ij</sub> | 1.0e-009 *              |
|                 | 1.4815 0.5185 -0.0000 |                 | 0.1341 0.0559 -0.0000 |                 | 0.4075 0.1310 -0.0000   |
|                 | 0.5185 1.4815 0.0000  |                 | 0.0559 0.1341 0.0000  |                 | 0.1310 0.4075 0.0000    |
|                 | -0.0000 0.0000 0.4815 |                 | -0.0000 0.0000 0.0596 |                 | -0.0000 0.0000 0.1164   |
| B <sub>ij</sub> | 1.0e-006 *            | D <sub>ij</sub> | 1.0e+007 *            | F <sub>ij</sub> | 1.0e+004 *              |
|                 | 0.1341 0.0559 -0.0000 |                 | 1.2346 0.4321 -0.0000 |                 | 1.8519 0.6481 -0.0000   |
|                 | 0.0559 0.1341 0.0000  |                 | 0.4321 1.2346 0.0000  |                 | 0.6481 1.8519 0.0000    |
|                 | -0.0000 0.0000 0.0596 |                 | -0.0000 0.0000 0.4012 |                 | -0.0000 0.0000 0.6019   |
| E <sub>ij</sub> | 1.0e-009 *            | F <sub>ij</sub> | 1.0e+004 *            | H <sub>ij</sub> |                         |
|                 | 0.4075 0.1310 -0.0000 |                 | 1.8519 0.6481 -0.0000 |                 | 33.0688 11.5741 -0.0000 |
|                 | 0.1310 0.4075 0.0000  |                 | 0.6481 1.8519 0.0000  |                 | 11.5741 33.0688 0.0000  |
|                 | -0.0000 0.0000 0.1164 |                 | -0.0000 0.0000 0.6019 |                 | -0.0000 0.0000 10.7474  |

For i, j = 4, 5

|                 |            |                 |            |
|-----------------|------------|-----------------|------------|
| A <sub>ij</sub> | 1.0e+009 * | D <sub>ij</sub> | 1.0e+006 * |
|                 | 4.8148 0   |                 | 4.0123 0   |
|                 | 0 4.8148   |                 | 0 4.0123   |
| D <sub>ij</sub> | 1.0e+006 * | F <sub>ij</sub> | 1.0e+003 * |
|                 | 4.0123 0   |                 | 6.0185 0   |
|                 | 0 4.0123   |                 | 0 6.0185   |

<결과 비교>

For i, j = 1, 2, 6

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{11} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \quad H_{ij} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{11} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix}$$

For i, j = 4, 5

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \quad F_{ij} = \begin{bmatrix} F_{44} & 0 \\ 0 & F_{55} \end{bmatrix}$$

where,

$$\overline{Q_{11}^{(k)}} = \overline{Q_{22}^{(k)}} = \frac{E^k}{1 - \nu_k^2}$$

$$\overline{Q_{16}^{(k)}} = \overline{Q_{26}^{(k)}} = 0$$

$$\overline{Q_{12}^{(k)}} = \frac{\nu_k E^k}{1 - \nu_k^2}$$

$$\overline{Q_{44}^{(k)}} = \overline{Q_{55}^{(k)}} = \overline{Q_{66}^{(k)}} = \frac{E^k}{2(1 - \nu_k)}$$

↓

|                            |        |         |
|----------------------------|--------|---------|
| Qbar(:, :, 1) = 1.0e+011 * |        |         |
| 1.4815                     | 0.5185 | 0       |
| 0.5185                     | 1.4815 | 0       |
| 0                          | 0      | 0.4815  |
| Qbar(:, :, 2) = 1.0e+011 * |        |         |
| 1.4815                     | 0.5185 | -0.0000 |
| 0.5185                     | 1.4815 | 0.0000  |
| -0.0000                    | 0.0000 | 0.4815  |
| Qbar(:, :, 7) = 1.0e+011 * |        |         |
| 1.4815                     | 0.5185 | -0.0000 |
| 0.5185                     | 1.4815 | 0.0000  |
| -0.0000                    | 0.0000 | 0.4815  |
| Qbar(:, :, 8) = 1.0e+011 * |        |         |
| 1.4815                     | 0.5185 | 0       |
| 0.5185                     | 1.4815 | 0       |
| 0                          | 0      | 0.4815  |

Matrix의 Form과 각 항의 결과가 수계산의 결과와 일치하였으며,  $\overline{Q}$ 에서 각 Layer의 결과도 일치함을 확인할 수 있었다.  $E_{ij}$ 와  $B_{ij}$ 에서 미소한 값이 발생하였지만  $10^{-6} \sim 10^{-9}$ 의 값으로서 거의 0에 가까우므로 무시할 수 있다.

## 2) 비대칭 적층배열 (크로스 플라이)

<input data>

- Laminate Definition

```
nply = 6
angle = [ 0 90 90 0 0 90 ]
t = [ 0.0167 0.0167 0.0167 0.0167 0.0167 0.0167 ]
```

- Material Property

```
E1 = [ 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 1.3E+11 ]
E2 = [ 1.0E+10 1.0E+10 1.0E+10 1.0E+10 1.0E+10 1.0E+10 ]
v12 = [ 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 ]
v21 = [ 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 0.35 ]
G12 = [ 0.5E+10 0.5E+10 0.5E+10 0.5E+10 0.5E+10 0.5E+10 ]
G13 = [ 0.5E+10 0.5E+10 0.5E+10 0.5E+10 0.5E+10 0.5E+10 ]
G23 = [ 0.33E+10 0.33E+10 0.33E+10 0.33E+10 0.33E+10 0.33E+10 ]
```

<결과 비교>

$$D_{45} = F_{45} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = E_{11} = E_{22} = E_{12} = E_{66} = 0$$

예제에서 보는 바와 같이 동일한 물성과 제원을 갖는 경우에도 화이버 보강각도의 변화만으로 강성이 큰 차이가 있음을 알 수 있다. 또한, 프로그램의 해석 결과와 Plate constitutive equations의 비교를 통해 정확히 일치함을 확인할 수 있었으며, 고차항 이론에서 나타난 바와 같이  $E_{ij}$ 와  $B_{ij}$ 의 양상이 같이 흘러감을 해석결과를 통해 확인 할 수 있다.

## 4. 요약 및 결론

본 기사에서는 전 호에 이어서 복합소재 적층구조 이론 중에서 Reddy의 고차전단변형 판이론을 중심으로 소개하였다. 일차 전단변형 판이론은 사각형 판과 같은

일반적인 경우에 대하여 비교적 정확한 결과를 나타내는 것으로 알려져 있다. 그러나 1차 판이론에서 가정되는 전단보정계수 (5/6)는 다양한 기하학적 조건, 경계조건 및 하중조건을 갖는 경우에 대하여 항상 정확한 결과를 장담할 수 없다. 따라서 보다 정밀하고 정확한 해를 구하기 위해서는 고차항 판이론을 적용하는 것이 바람직할 수 있다. 그러나, 고차항 이론에 의한 전개는 수식이 복잡하고 수치 해석적으로 난해할 수 있으므로 필요한 경우에 따라 선택적으로 사용할 것을 추천한다.

#### 참고문헌

1. A. Bhimaraddi, L.K. Stevens, A high order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous and laminated rectangular plates, *Journal of Applied Mechanics* 51 (1984) 195-198.
2. T. Kant, J.H. Varaiya, C.P. Arora, Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and implicit time integration schemes, *Computers and Structures* 36 (3) (1990) 401-420.
3. S.J. Lee, J.N. Reddy, Vibration suppression of laminated shell structures investigated using higher order shear deformation theory, *Smart Materials and Structures* 13 (2004) 1176-1194.
4. S.Y. Lee, S.C. Wooh, Finite element vibration analysis of composite box structures using the high order plate theory, *Journal of Sound and Vibration* 277 (2004) 801-814.
5. A. Messina, K.P. Soldatos, Vibration of completely free composite plates and cylindrical shell panels by a higher-order theory, *International Journal of Mechanical Sciences* 41 (1999) 891-918.
6. J.N. Reddy, C.F. Liu, A higher-order shear deformation theory for laminated elastic shells, *International Journal of Engineering Science* 23 (1985) 319-330.