

## 이산 비선형 시스템에 대한 확장 유한 임펄스 응답 필터

# An Extended Finite Impulse Response Filter for Discrete-time Nonlinear Systems

한 세 경, 권 보 규\*, 한 수 희  
(Sekyung Han<sup>1</sup>, Bo-Kyu Kwon<sup>2,\*</sup>, and Soohee Han<sup>3</sup>)

<sup>1</sup>Department of Electronics & Control Engineering, Hanbat National University

<sup>2</sup>Department of Control & Instrumentation Engineering, Kangwon National University

<sup>3</sup>Department of Creative IT Engineering, Pohang University of Science & Technology(POSTECH)

**Abstract:** In this paper, a finite impulse response (FIR) filter is proposed for discrete-time nonlinear systems. The proposed filter is designed by combining the estimate of the perturbation state and nominal state. The perturbation state is estimated by adapting the optimal time-varying FIR filter for the linearized perturbation model and the nominal state is directly obtained from the nonlinear nominal trajectory model. Since the FIR structured estimators use the finite horizon information on the most recent time interval, the proposed extended FIR filter satisfies the bounded input/bounded output (BIBO) stability, which can't be obtained from infinite impulse response (IIR) estimators. Thus, it can be expected that the proposed extended FIR filter is more robust than IIR structured estimators such as an extended Kalman filter for the round-of errors and the uncertainties from unknown initial states and uncertain system model parameters. The simulation results show that the proposed filter has better performance than the extended Kalman filter (EKF) in both robustness and fast convergency.

**Keywords:** finite impulse response, nonlinear state estimation, extended Kalman filter, extended FIR filter

### I. 서론

선형 시스템에 대한 상태 추정 문제에서 칼만 필터는 시스템 및 측정 잡음의 정확한 확률적 정보가 주어지는 경우 최적성이 보장되기 때문에 일종의 표준과 같이 사용되고 있다[1]. 뿐만 아니라 비선형 시스템에 대한 상태 추정 문제에서도 확장 및 구간의 용이성 등으로 선형 칼만 필터를 비선형 시스템으로 확장한 선형화된 칼만 필터(Linearized Kalman filter, LKF)나 확장 칼만 필터(EKF)가 많이 사용되고 있다[1-3]. 하지만 이러한 칼만 필터들은 초기 시간부터 추정 시점까지의 모든 측정 데이터를 사용하는 IIR 구조로 인해 모델 불확실성이나 초기 상태의 불확실성, 그리고 선형 근사화 오차 등으로 인해 추정 성능이 저하되거나 심지어 추정 결과가 발산할 수 있는 가능성도 있다[4,5]. 이러한 문제를 해결하기 위해 비선형 시스템의 선형화 오차의 불확실성을 감소시키는 방법이나  $H_\infty$  성능지수를 만족시키는 필터, 강인 EKF(Robust EKF), 그리고 무향 칼만 필터(Uncented Kalman filter, UKF) 및 이 필터와 파티클 필터(Particle filter)를 결합한 필터 등이 제안되었다[6-10]. 하지

만 이러한 필터들은 모두 초기 시점부터 추정 시점까지의 모든 정보를 사용하는 IIR 구조의 필터들로 누적된 불확실성이나 계산 오차에 의한 발산 문제나 추정 성능 저하에 대한 근원적인 해결책을 제시하지는 못하였다.

비록 선형 시스템을 대상으로 하지만 이러한 IIR 구조의 추정기의 발산 문제를 해결하기 위하여 최근의 유한 정보만을 사용하는 FIR 추정기들이 다양하게 연구되어져 왔다 [5,11-14]. FIR 구조의 추정기는 추정 시점 근처의 유한한 정보만을 사용하기 때문에 기본적으로 BIBO 안정도가 만족되어 IIR 구조의 필터보다 강인한 특성을 가지며, 특히 추정 오차의 발산 문제에 대한 문제를 근원적으로 해결할 수 있다. 또한 추정 시점에서 최근의 유한 구간의 정보만을 사용하기 때문에 일시적인 불확실성이 나타났다가 사라지는 경우 유한 구간의 크기만큼의 시간이 흐르면 추정에 사용되는 불확실성의 정보가 완전히 사라지게 되어 실제 상태를 빠르게 추정하는 빠른 수렴성도 보장된다[11-14].

선형 시스템에 대해 강인성과 빠른 수렴성이 검증된 FIR 추정기에 대한 연구는 비선형 시스템에 대한 상태 추정 문제로 확장되었다. [15]에서 제안된 비선형 시스템에 대한 FIR 필터는 선형 이동구간 칼만 필터(Receding horizon Kalman filter) 및 개선된 이동구간 칼만 필터(Modified RHKF)를 비선형 시스템으로 확장한 것으로, 제안한 FIR 추정기들이 IIR 추정기 대비 강인한 특성을 가지는 것을 입증하였다. 하지만 [15]에서 제안한 비선형 FIR 필터는 상태 변수 오차 공분산을 계산하는 과정에서 선형화된 시스템 행렬의 역행렬을 사용하여 이 행렬의 역행렬이 존재하지

\* Corresponding Author

Manuscript received October 7, 2014 / revised November 12, 2014 / accepted November 27, 2014

한세경: 한밭대학교 전자제어공학과(sk.han@hanbat.ac.kr)

권보규: 강원대학교 제어계측공학과(bkkwon@kangwon.ac.kr)

한수희: 포항공과대학교 창의IT융합공학과(sooheehan@postech.ac.kr)

※ 이 논문은 2013년도 한밭대학교 신입교수 연구비의 지원을 받았음.

않는 시스템에 적용할 수 없는 단점을 가지며, 상태 오차 공분산의 역행렬로 정의되는 정보행렬의 초기치가 영행렬이라는 가정을 필요로 한다. 또한 측정치 갱신 과정에서 정보행렬의 역행렬 계산이 되지 않아 새로운 상태변수를 정의해야하며, 최종 정보행렬의 역행렬을 다시 새로운 상태변수에 곱하여 실제 상태 변수를 추정하는 등 많은 계산량과 구조적인 문제를 가지고 있다.

따라서 본 논문에서는 기존 비선형 시스템에 대한 FIR 필터의 단점을 보완할 수 있는 확장 FIR 필터(Extended FIR filter, EFIRF)를 제안한다.

제안하는 필터는 시스템 행렬의 역행렬을 사용하지 않도록 설계되며, 구조적으로 정보행렬의 역행렬이 계산 과정에서 필요하지 않아 새로운 상태변수도 필요하지 않다. 또한 설계 시 고려된 비편향 조건으로부터 상태의 추정 결과가 비편향성을 가지며, 어떠한 초기 조건에 대한 가정도 필요하지 않다. 또한 제안하는 필터는 FIR 구조를 가지기 때문에 BIBO 안정도를 만족하여 기존 EKF와 같은 IIR 구조에서 발생 가능한 여러 오차들에 대한 발산 문제를 근원적으로 해결 할 수 있으며, 선형 FIR 필터에서와 같은 강인성과 일시적인 불확실성이 발생했다가 사라진 이후 빠르게 실제 상태를 추정하는 빠른 수렴성도 기대할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 II 장에서 대상 비선형 시스템을 비선형 명목 궤적 모델과 선형화된 섭동 모델로 구분하고, 이에 대한 EFIRF의 구조와 설계 방법을 제안한다. III 장에서는 제안하는 EFIRF를 IIR 구조의 비선형 필터인 EKF 및 무향 칼만 필터와의 비교 모의실험을 통해 제안하는 필터의 불확실성에 대한 강인성과 빠른 수렴성을 검증한다. 마지막으로 IV 장에서는 본 논문의 결론을 내린다.

## II. 확장 유한 임펄스 응답 필터

먼저 다음과 같은 이산 비선형 상태 방정식 모델을 고려해보자.

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k \quad (1)$$

$$y_k = h_k(x_k) + v_k \quad (2)$$

여기서  $x_k$ 와  $y_k$ 는 각각 시간  $k$ 에서의 상태 변수 및 측정치이며,  $f_k(x_k)$ 와  $h_k(x_k)$ 는 모두 상태 변수  $x_k$  부근에서 선형 근사화가 가능한 충분한 정도의 미분이 가능한 함수들로 가정한다. 또한 시스템 잡음  $w_k$ 와 측정 잡음  $v_k$ 는 모두 영-평균인 백색 가우시안 잡음으로, 공분산이 각각  $Q_k$ 와  $R_k$ 이며 상호 독립임을 가정한다.

먼저 상태 방정식 (1)의 상태전이 함수  $f_k(x_k)$ 는 시간  $k-1$ 에서 테일러 급수 전개를 통해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_k &= f_{k-1}(x_{k-1}) + w_{k-1} \\ &= f_{k-1}(x_{k-1}^{nom}) + \left. \frac{\partial f_{k-1}(x_{k-1})}{\partial x} \right|_{x=x_{k-1}^{nom}} \\ &\quad \times (x_{k-1} - x_{k-1}^{nom}) + \text{고차항} + w_{k-1} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $x_{k-1}^{nom}$ 은 시간  $k-1$ 에서의 명목 상태(nominal state)로 다음과 같은 비선형 명목 궤적 모델로 정의한다.

$$x_k^{nom} = f_{k-1}(x_{k-1}^{nom}) \quad (4)$$

이제 식 (3)의 테일러 급수의 2차 이상의 고차항을 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정하고, 실제 상태와 명목 상태의 차이를 섭동 상태  $\delta x_k = x_k - x_k^{nom}$ 를 정의하면, 다음과 같은 섭동 궤적 모델을 구할 수 있다.

$$\delta x_k = x_k - x_k^{nom} \approx F_{k-1} \delta x_{k-1} + w_{k-1} \quad (5)$$

여기서  $F_{k-1}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$F_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}(x)}{\partial x} \right|_{x=x_{k-1}^{nom}} \quad (6)$$

다음으로 비선형 측정 방정식(2)에 대해 명목 출력 모델과 섭동 출력 모델로 구분한다. 먼저 명목 상태와 명목 출력 사이의 관계를 다음과 같은 비선형 모델로 정의하면,

$$y_k^{nom} = h_k(x_k^{nom}) \quad (7)$$

식 (2)는 테일러 급수 전개를 통해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} y_k &= h_k(x_k) + v_k \\ &= h_k(x_k^{nom}) + \left. \frac{\partial h_k(x)}{\partial x} \right|_{x=x_k^{nom}} \delta x_k + \text{고차항} + v_k \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 2차 이상의 고차항을 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정하고, 섭동 출력을  $\delta y_k = y_k - y_k^{nom}$ 와 같이 정의하면 섭동 출력 모델을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta y_k = y_k - y_k^{nom} \approx H_k \delta x_k + v_k \quad (9)$$

여기서  $H_k$ 은 다음과 같다.

$$H_k = \left. \frac{\partial h_k(x)}{\partial x} \right|_{x=x_k^{nom}} \quad (10)$$

이상과 같이 비선형 상태 방정식 모델 (1)과 (2)를 명목 상태  $x_k^{nom}$ 에 대해 비선형 명목 궤적 모델 (4), (7)과 선형 섭동 모델 (5), (9)로 분리할 수 있으며, 이를 기반으로 비선형 상태 방정식의 추정 상태  $\hat{x}_k$ 을 다음과 같은 명목 상태와 추정 섭동 상태의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{x}_k = x_k^{nom} + \delta \hat{x}_k \quad (11)$$

즉, 주어진 초기 상태  $x_0^{nom}$ 와 비선형 명목 궤적 모델 (4)를 통해 현재의 명목 상태를 계산한 후 선형 섭동 모델 (5)와 (9)에 대한 섭동 상태를 추정하여 이들을 더하면, 비선형 상태 방정식 모델 (1)과 (2)에 대한 상태를 추정할 수 있다. 따라서 선형 섭동 모델 (5)와 (9)에 대해 유한 이동 구간  $[k-N, k-1]$  내의 출력 정보의 선형 조합으로 상태를 추정하는 FIR 구조의 필터를 다음과 같이 적용하면,

$$\delta \hat{x}_k = \sum_{i=k-N}^{k-1} L_{k,i-k+N+1} \{y_i - h_i(x_i^{nom})\}, \quad (12)$$

비선형 시스템 (1)과 (2)에 대한 EFIRF를 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= x_k^{nom} + \sum_{i=k-N}^{k-1} L_{k,i-k+N+1} \{y_i - h_i(x_i^{nom})\} \\ &= f_{k-1}(x_{k-1}^{nom}) + L_k \delta Y_{k-1} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $N$ 은 유한 이동 구간의 크기이며,  $\delta Y_{k-1}$ 은 다음과 같이 정의된 유한 이동 구간  $[k-N \ k-1]$  내의 섭동 출력 벡터이다.

$$\delta Y_{k-1} = [\delta y_{k-N}^T \delta y_{k-N+1}^T \cdots \delta y_{k-1}^T]^T \quad (14)$$

또한  $L_k = [L_{k,1}^T \ L_{k,2}^T \ \cdots \ L_{k,N}^T]^T$ 는 시변 FIR 필터 이득 행렬로, 다음 정리 1로부터 섭동 상태 추정 오차의 공분산을 최소화하도록 필터 이득을 구할 수 있다.

정리 1: 다음과 같은 시변 선형 시스템을 고려하자.

$$\chi_{k+1} = A_k \chi_k + G_k \omega_k \quad (15)$$

$$z_k = C_k \chi_k + v_k \quad (16)$$

여기서  $\omega_k$ 와  $v_k$ 는 모두 영-평균 가우시안 잡음으로 각각  $Q_{\omega,k}$ ,  $R_{v,k}$ 를 분산으로 가진다.

시스템 (15)와 (16)에 대해 다음과 같은 성능지수와

$$\min E[(\chi_k - \hat{\chi}_k)^T (\chi_k - \hat{\chi}_k)] \quad (17)$$

비편향 조건  $E(\chi_k) = E(\hat{\chi}_k)$ 을 만족하는 시변 최적 FIR 필터는 다음과 같이 설계된다[11]:

$$\hat{\chi}_k = \sum_{i=k-N}^{k-1} S_{k,i} z_i = S_k Z_{k-1}. \quad (18)$$

여기서  $Z_k$ 와  $S_k$ 는 다음과 같으며,

$$Z_{k-1} = [z_{k-N}^T \ z_{k-N+1}^T \ \cdots \ z_{k-1}^T]^T, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} S_k &= [S_{k,1}^T \ S_{k,2}^T \ \cdots \ S_{k,N}^T]^T \\ &= [\Phi_{k-1,k-N} \ M_k] \\ &\quad \times \left[ \begin{array}{c} (\tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \tilde{C}_k)^{-1} \tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \\ Q_{N,k} \tilde{G}_k^T \Pi_k^{-1} \{I - \tilde{C}_k (\tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \tilde{C}_k)^{-1} \tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1}\} \end{array} \right], \quad (20) \end{aligned}$$

식 (20)에서 사용된 행렬들은 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi_{i,j} = A_i A_{i-1} \cdots A_{j+1} A_j \ (i \geq j) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} M_k &= [\Phi_{k-1,k-N} G_{k-N} \ \Phi_{k-1,k-N+1} G_{k-N+1} \\ &\quad \cdots \ \Phi_{k-1,k-1} G_{k-2} G_{k-1}] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\Pi_k = \tilde{G}_k Q_{N,k} \tilde{C}_k^T + R_{N,k} \quad (23)$$

$$\tilde{C}_k = \begin{bmatrix} C_{k-N} \\ C_{k-N+1} \Phi_{k-N,k-N} \\ C_{k-N+2} \Phi_{k-N+1,k-N} \\ \vdots \\ C_{k-1} \Phi_{k-2,k-N} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\tilde{G}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{k-N+1} G_{k-N} & 0 \\ C_{k-N+2} \Phi_{k-N+1,k-N+1} G_{k-N} & C_{k-N+2} G_{k-N+1} \\ \vdots & \vdots \\ C_{k-1} \Phi_{k-2,k-N+1} G_{k-N} & C_{k-1} \Phi_{k-2,k-N+2} G_{k-N+1} \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & C_{k-1} G_{k-2} & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$Q_{N,k} = \begin{bmatrix} Q_{k-N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_{k-N+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Q_{k-N+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Q_{k-1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$R_{N,k} = \begin{bmatrix} R_{k-N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{k-N+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & R_{k-N+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_{k-1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

따라서 정리 1에 대해 다음과 같은 대입을 통해 비선형 시스템 (1)과 (2)에 대한 EFIRF (13)의 이득  $L_k$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta x_k &\rightarrow \chi_k, \quad \delta y_k \rightarrow z_k, \quad w_k \rightarrow \omega_k, \quad v_k \rightarrow v_k, \\ F_k &\rightarrow A_k, \quad H_k \rightarrow C_k, \quad G_k \rightarrow I, \quad Q_k \rightarrow Q_{\omega,k}, \quad R_k \rightarrow R_{v,k}, \quad L_k \rightarrow S_k. \end{aligned}$$

### III. 모의실험

이 장에서는 제안한 필터의 초기 조건 및 모델 불확실성에 의한 발산 문제에 대한 강인성과 모델 불확실성에 대한 강인성 및 빠른 수렴성을 검증하기 위해 모의실험을 수행한다.

#### 1. 발산 문제에 대한 모의실험

먼저 추정 오차의 발산 문제에 대한 제안한 EFIRF의 강인성을 검증하기 위해 [5]의 직선 궤도 결정 문제에 대해 EKF의 추정 결과와 비교한다. 본 논문에서는 이산형 필터를 제안하였으므로 [5]의 연속형 이차 비선형 시스템을 이산화한 다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{2,k} \\ -\mu/x_{1,k}^2 \end{bmatrix} \Delta_d \quad (27)$$

$$y_i = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{bmatrix} + v_i \ (i = M, 2M, 3M, \dots), \quad (28)$$

여기서 초기 상태  $[x_{1,0} \ x_{2,0}]^T = [7.99 \ 1.99]^T$ 로, 선형 섭동 모델 (5)와 (9)의 초기 섭동 상태는  $[0 \ 0]^T$ 로 설정한다. 또한 출력  $y_i$ 의 샘플링 시간  $M=100$ 로 설정하며, 측정 잡음  $v_i$ 는 공분산  $R=10^{-3}$ 인 영-평균을 가지는 백색 가우시안 잡음으로 가정한다. 식 (27)의 이산화 시간 증분  $\Delta_d$ 는  $10^{-4}$ 로 설정하며, 실제 값이 19.92244165인 중력 상수와 지구 반경의 곱  $\mu$ 는 모델링 오차에 의한 발산 문제를 고려하기 위하여  $\mu=19.91$ 로 설정한다. 필터의 설계를 위한

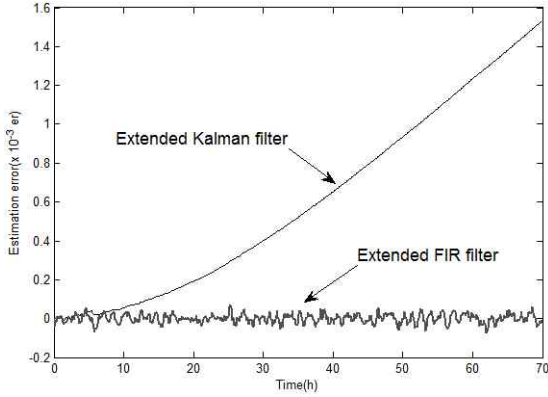


그림 1. 직선 궤도 결정 문제[5]에 대한 상태 추정 오차.  
Fig. 1. The estimation errors for rectilinear orbit determination problem [5].

설정은 다음과 같다. 먼저 EKF의 초기 추정 오차의 공분산을  $2 * I$ (여기서  $I$ 는 2차 단위행렬)로 설정하며, 필터의 초기 상태를  $[7.997 \ 1.992]^T$ 로 가정한다. 다음으로 제안하는 FIR 필터의 유한 이동 구간의 크기  $N=10$ 으로 설정하며, 동일한 조건의 비교를 위해 명목 상태의 초기값을 EKF의 초기 상태와 동일하게 설정한다.

시스템 모델 (27)과 (28)의 상태  $x_{1,i}$ 에 대한 EKF와 제안한 EFIRF의 추정 오차는 그림 1과 같다.

그림 1에서 볼 수 있듯이 EKF는 초기 불확실성과 모델 불확실성의 누적 오차로 인하여 시간이 지남에 따라 빠르게 발산하는 반면 제안한 EFIRF는 최근 유한 구간 내에 존재하는 오차 범위 이내에서 발산하지 않고 실제 상태를 잘 추정하고 있다. 이는 [4]에서 수식적으로 증명된 바와 같이 칼만 필터는 IIR 구조에 의해 초기 조건의 불확실성 및 모델 불확실성의 오차가 누적되어 발산할 수 있지만, 제안하는 FIR 필터는 기본적으로 BIBO 안정도가 만족되고 설계 시 고려된 비편향 조건에 의해 어떠한 초기 정보를 사용하지 않음으로써 초기 조건 불확실성에 대해 강인한 특성을 가지게 된다. 따라서 이상과 같이 초기 상태 불확실성 및 모델 불확실성에 의해 발생하는 발산 문제에 대해 IIR 구조의 EKF 대비 제안하는 EFIRF가 보다 강인한 특성을 가지고 있음을 알 수 있다.

2. 모델 불확실성에 대한 강인성 및 빠른 수렴성 모의실험  
다음으로 시스템 모델 파라미터의 불확실성에 대해 제안한 필터의 강인성 및 빠른 수렴성을 LKF 및 EKF, 그리고 UKF와의 비교 모의실험을 통해 검증한다. 이를 위해 다음과 같은 비선형 시스템에 대해 고려한다.

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \delta_k & 1 + \delta_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$+ \begin{bmatrix} x_{2,k} \\ -25x_{1,k} - 10x_{2,k}x_{3,k} + 12 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_d + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_d \\ 0 \end{bmatrix} w_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{bmatrix} + v_k \quad (30)$$

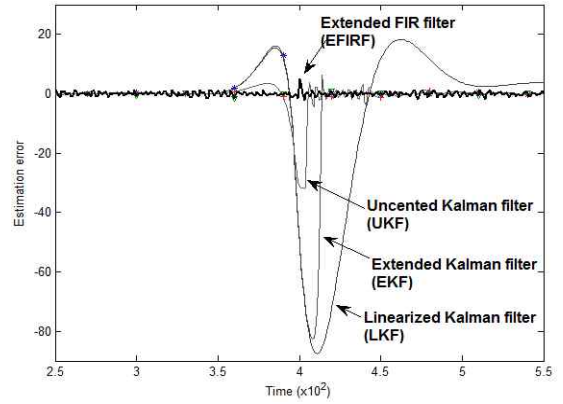


그림 2. 모델 불확실성에 대한 상태 추정 오차.  
Fig. 2. The estimation errors with model uncertainty.

여기서 모의실험을 위해 시스템의 초기 상태 및 섭동 모델의 초기 상태를 각각  $[x_{1,0} \ x_{2,0} \ x_{3,0}]^T = [0 \ 0 \ 0.5]^T$ ,  $[\delta x_{1,0} \ \delta x_{2,0} \ \delta x_{3,0}]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ 로 설정하며, 두 초기 상태의 오차 공분산은 모두  $2 * I$ 로 설정한다. 또한 시스템 잡음  $w_k$ 와 측정 잡음  $v_k$ 는 모두 영-평균 백색 가우시안 잡음으로 가정하며, 각각의 분산은  $Q=0.4$ ,  $R=0.1$ 로 설정한다. 그리고 이산화 시간 증분  $\Delta_d=0.01$ 로 설정하며, 모델 불확실성을 표현하기 위하여  $\delta_k$ 를 다음과 같이 설정한다.

$$\delta_k = \begin{cases} 0.15, & (350 \leq k \leq 400) \\ 0, & (else) \end{cases} \quad (31)$$

식 (31)은 시간  $k=350$ 에서 불확실성이 발생하여 유지되다가 시간  $k=400$ 에서 불확실성이 사라지도록 하는 것으로, 이는 시스템 모델 불확실성에 대한 강인성과 불확실성이 사라진 이후 얼마나 빠르게 실제 상태로 수렴하는지에 대한 특성을 함께 살펴보기 위한 것이다. 그리고 이 모의실험은 모델 불확실성에 대해서만 수행해야 하므로 필터 설계 설계를 위한 모든 초기 상태 및 초기 섭동 상태, 그리고 상태오차 공분산을 시스템 설정과 동일하게 설정하며, EFIRF의 유한 구간의 크기는  $N=10$ 으로 설정하여 모의실험을 수행하였다.

모델 불확실성이 존재하는 경우 상태  $x_{1,k}$ 에 대한 각 필터들의 추정 오차는 그림 2와 같다.

또한 불확실성이 존재하는 구간  $350 \leq k \leq 400$ 에서 각 필터들의 평균 제공된 추정 오차의 합은 다음 표 1과 같다.

먼저 모델 불확실성에 대한 강인성에 대해 살펴보자. 그림 2의 결과에서 볼 수 있듯이 IIR 구조의 필터들인 LKF, EKF 및 UKF의 추정 결과는 모델 불확실성이 발생하는  $k=350$ 부터 점점 증가하여 시간이 흐름에 따라 더욱 커지

표 1. 모델 불확실성에 대한 상태 추정 오차(평균제곱근오차 합).

Table 1. The estimation errors with model uncertainty(sum of root mean square errors).

EFIRF	LKF	EKF	UKF
3.3969	44.4709	34.5498	13.3778

는 것을 확인할 수 있는 반면, 제안한 EFIRF의 추정 오차는 시스템 불확실성이 발생한 시점보다 많이 지연되어서 나타나며, 그 크기 또한 매우 작음을 확인할 수 있다. 그리고 표 1의 결과를 통해 모델 불확실성이 존재하는 구간에서 제안한 EFIRF가 다른 IIR 구조의 필터들 대비 상태 추정 오차가 매우 작음을 알 수 있다. 따라서 이상의 결과를 통해 제안한 EFIRF의 모델 불확실성에 대한 강인성 확인할 수 있다. 다음으로 모델 불확실성이 사라진 이후 추정 상태가 실제 상태로 수렴하는 수렴성에 대해 살펴보자. 그림 1과 같에서 모델 불확실성이 사라지는  $k=400$  시점 이후의 IIR 필터들의 추정 오차들은 느리게 영(0)으로 수렴하는 반면, 제안한 EFIRF의 추정 오차는 유한 구간 범위 이내에서 매우 빠르게 영(0)으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이 결과를 통해 일시적인 불확실성이 나타났다가 사라지는 경우 제안한 EFIRF가 다른 IIR 구조의 필터들 대비 빠른 수렴성을 확인할 수 있다.

#### IV. 결론

본 논문에서는 확률적으로 표현되는 이산형 비선형 시스템의 상태 추정을 위해 선형 FIR 필터를 비선형 시스템으로 확장한 EFIRF를 제안하였다. 제안한 필터는 섭동 모델에 대해 설계된 시변 최적 FIR 필터로부터 추정된 섭동 상태와 비선형 명목 모델로부터 계산된 명목 상태의 합으로 표현된다. 제안한 FIR 필터는 기존 결과와 달리 시스템 행렬의 역행렬을 사용하지 않도록 설계되어 선형화된 시스템 행렬의 역행렬이 존재하지 않는 시스템에 대해서도 적용 가능하며, 새로운 상태 변수를 정의할 필요가 없는 단순한 구조를 가진다. 또한 고려한 비편향 조건으로부터 어떠한 초기 조건을 사용하지 않도록 설계되었으며 이를 통해 상태의 추정 결과도 비편향성을 가지게 된다. 그리고 제안한 EFIRF는 FIR 구조에 의해 BIBO 안정도를 만족하며 기존 IIR 구조의 EKF가 가지고 있었던 발산 문제에 대한 근원적인 해결 방안을 제시할 수 있으며, 이를 검증하기 위하여 제안한 EFIRF와 여러 IIR 구조의 필터들과의 비교 모의실험을 수행하였다. 모의실험에서 제안한 EFIRF가 기존 많이 사용되고 있는 IIR 구조의 필터들보다 발산 문제와 모델 불확실성에 대해 강인하며 불확실성이 사라진 이후 추정 상태가 실제 상태로 빨리 수렴하는 우수성을 입증하였다.

#### REFERENCES

- [1] B. D. O. Anderson and J. B. Moor, *Optimal filtering*, Dover, 2005.
- [2] F. L. Lewis, *Optimal estimation*, Wiley, 1986.
- [3] M. S. Grewal and A. P. Andrews, *Kalman filtering: Theory and Practice*, Prentice-Hall, 1993.
- [4] R. J. Fitzgerald, "Divergence of the Kalman filter," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, pp. 736-747, 1971.
- [5] A. H. Jazwinski, "Limited memory optimal filtering," *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-23, pp. 653-659, 1968.
- [6] U. Shaked and N. Berman, " $H_\infty$  nonlinear filtering

of discrete time process," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 9, pp. 2205-2209, 1995.

- [7] G. A. Einicke and L. B. White, "Robust extended Kalman filtering," *IEEE transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 9, pp. 2596-2599, 1999.
- [8] H. S. Hong, J. G. Lee, and C. G. Park, "An extended Kalman filter robust to linearization error," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 12, no. 2, pp. 92-100, 2006.
- [9] R. Kandepu, B. Foss, and L. Imsland, "Applying the-unscented Kalman filter for nonlinear state estimation," *Journal of Process Control*, vol. 18, no. 7, pp. 753-768, 2008.
- [10] O. S. Kwon, "Nonlinear system state estimating using unscented particle filters," *Journal of the Korea Institute of Information and Communication Engineering (in Korean)*, vol. 17, no. 6, pp. 1273-1280, 2013.
- [11] S. H. Han, B. K. Kwon, and W. H. Kwon, "Minimax FIR smoothers for deterministic continuous-time state space models," *Automatica*, vol. 45, no. 6, pp. 1561-1566, 2009.
- [12] B. K. Kwon, S. Han, and W. H. Kwon, "A continuous-time recursive fixed-lag smoother converging in finite time," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1613-1618, 2009.
- [13] B. K. Kwon, "An optimal FIR filter for discrete time-varying state space models," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 17, no. 12, pp. 1183-1187, 2011.
- [14] B. K. Kwon and S. Han, "An optimal fixed-lag FIR smoother for discrete time-varying state space models," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 20, no. 1, pp. 1-5, 2014.
- [15] S. Y. Cho and K. H. Kim, "FIR fixed-interval smoothing filter for discrete nonlinear system with modeling uncertainty and its application to DR/GPS integrated navigation system," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 19, no. 5, pp. 481-487, 2013.



한 세 경

2002년 한양대학교 전기전자공학과(공학사). 2007년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학석사). 2012년 동경대학교 전자이공학부(공학박사). 2007년~2009년 SK에너지 전기차배터리연구소 연구원. 2012년~2013년 일본 산업기술

종합연구소 연구원. 2013년~현재 국립한밭대학교 전자제어공학과 조교수. 관심분야는 전가자동차용 배터리 시스템, 스마트 그리드, 신호처리.



### 권보규

2002년 인하대학교 전자공학과(공학사). 2005년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학석사). 2008년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학박사). 2008년~2010년 삼성중공업 산업기술연구소 책임연구원. 2010년~현재 강원대학교 제어계측공학과 조교수. 관심분야는 제어 이론 및 추정이론, 로봇 제어, 계측 시스템, CACSD, 신호처리.



### 한수희

1998년 서울대학교 전기공학부(공학사). 2000년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학석사). 2003년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학박사). 2007년~2008년 강원대학교 로봇 S/W 연구센터 책임연구원. 2009년~2014년 건국대학교 전기공학과 부교수. 2014년~현재 포항공과대학교 창의IT융합공학과 부교수. 관심분야는 컴퓨터 기반 제어시스템 설계 도구, 분산 제어 시스템, 시간 지연 시스템, 신호처리.