

## 2휠 구동 모바일 로봇의 정밀 위치제어

### A Precise Position Control of Mobile Robot with Two Wheels

정양근<sup>1</sup>, 백승학<sup>2</sup>

Yang-Guen Jung<sup>1</sup>, Seung-Hak Baek<sup>2</sup>

shintek co., Ltd.1, Doosan Heavy Industry co., Ltd.2

#### 〈Abstract〉

Two-wheeled driving mobile robots are precisely controlled in terms of linear control methods without considering the nonlinear dynamical characteristics. However, in the high maneuvering situations such as fast turn and abrupt start and stop, such neglected terms become dominant and heavily influence the overall driving performance. This study describes the nonlinear optimal control method to take advantage of the exact nonlinear dynamics of the balancing robot. Simulation results indicate that the optimal control outperforms in the respect of transient performance and required wheel torques. A design example is suggested for the state matrix that provides design flexibility in the control. It is shown that a well-planned state matrix by reflecting the physics of a balancing robot greatly contributes to the driving performance and stability.

*Keywords : two-wheeled mobile robot, balancing robot, SDRE(State Dependent Riccati Equation) control, optimal control*

---

1 정회원, 신라정보기술(주)

2 정회원, 교신저자, 두산중공업

1 Dept. shintek co., Ltd

2 Corresponding Author, Doosan Heavy Industry co., Ltd.

## 1. 서 론

현재 모바일 로봇 산업에서는 용도에 따라 다양한 로봇들이 개발되고 있으며 일부는 실용화 단계에 접어들고 있다. 서비스 로봇에 이동성을 부여하는 모바일 플랫폼으로는 기동성 측면에서 장점을 갖는 이륜 밸런싱 플랫폼이 최근 많은 관심을 받고 있다. 기존의 대부분의 모바일 로봇은 한번 충전에 약 20km를 주행할 수 있는 혁신적인 플랫폼으로서 전기 모터만으로 구동되는 새로운 무공해 교통 수단이라고 할 수 있다. 이륜 이동 로봇은 두 바퀴와 몸체를 갖는 역진자 타입의 로봇으로서 두 개의 모터만으로 자세제어와 주행이 동시에 이루어지는 부족 구동 시스템이며, 동역학적으로는 3자유도 비선형 미분방정식으로 모델링 된다. 밸런싱 로봇은 이륜 역진자 로봇 이동 로봇 또는 구조적인 단순성을 특징으로 갖는다.

한편, 현재까지 모바일 플랫폼에 대한 제어기술은 대부분 선형제어 기법에 바탕을 두고 있다 [3-5]. 그러나 이륜 모바일 플랫폼을 채택한 서비스 로봇을 이용하여 다양한 작업 기능을 구현하고 비선형적 특성이 강하게 나타나는 동작 구간에서도 원활한 성능을 달성하기 위해서는 비선형제어 기법을 적용할 필요가 있다. 여기서 밸런싱 로봇에 비선형 제어기를 도입하는 목적은 로봇에 고기동 제어 성능을 부여함으로써 특히 로봇에 사람이 탑승하는 경우에 급정지, 급출발, 그리고 급회전과 같은 안정성 측면에서 불리한 상황에 대처하는 능력을 확보하는 데 있다.

본 논문에서는 2휠 구동 이동로봇에 대하여 상태 의존 리카티 방정식을 이용한 비선형 최적제어 법칙을 적용한다. 이를 통하여 기존 선형제어 방식에 비해 로봇의 주행 성능이 개선됨을 보인다. SDRE 제어 방법은 1962년 Pearson[6]에 의해 최초로 제안되었지만 1990년도 후반에 와서야 본격적인 관심을 받기 시작하였다. 그동안 SDRE 방법

의 적용은 카트-역진자 시스템과 같은 단순한 모델[7,8]에 국한 되었으며 로봇제어에 적용된 사례는 거의 찾아 볼 수 없다.

그러나 이륜 밸런싱 로봇은 구성이 비교적 단순하여 정확한 운동 방정식을 유도할 수 있으므로 제어 기법을 적용하기에 매우 적합한 경우라고 할 수 있다. 최적제어에서는 가중 행렬뿐만 아니라 상태 행렬을 조정함으로써 제어기 설계에 유연성을 제공한다[9]. 즉, 상태 변수 설정에 따라 결정되는 상태 행렬을 통하여 비선형 동역학 항들을 제어기 이득 결정 과정에 직접 반영함으로써 이에 따른 성능 향상을 기대할 수 있다. 한편, 기존의 제어 관련 논문에서는 선형제어기와의 단순한 성능 비교에 머물거나[10-12], 피드백 시스템에 대한 전역 점근적인 안정성을 확보하기 위해서 제한적인 상태 행렬을 가진 시스템에 한정되는 경우가 대부분이었다[6,7].

본 연구에서는 우선 이륜 밸런싱 로봇에 대한 SDRE 비선형 최적제어기를 설계하고 비교 시뮬레이션을 통해 LQ 선형 최적제어기와의 성능을 비교한다.

## 2. 로봇의 동적 모델링

이륜 밸런싱 모바일 로봇은 주행 중에 직진 방향( $x$ ), 피치 방향(pitch,  $\theta$ ), 요 방향(yaw,  $\psi$ )에 대한 3 자유도 운동을 한다. 본 논문에서는 이륜 밸런싱 로봇의 운동방정식을 유도하기 위하여 Kane 방법[15]을 이용하였다. Kane 방법은 일반 작용력(generalized active force)과 일반 관성력(generalized inertia force)을 각각 구한 후 그 합이 영이 되는 관계를 이용 한다는 점에서 라그랑지 방정식과 구별된다. 그림1에서  $\{N\}$ 은 고정 기준 좌표계(reference frame),  $\{F\}$ 는 로봇의 진행 방향을 알 수 있는 고정 기준에 대한 요 방향 기

준 좌표계, 그리고 {P}는 역진자의 무게중심에 위치한 이동 좌표계를 나타낸다. 일반 작용력과 일반 관성력은  $F_i, F_i^*$ 로 표기하고,  $i=1$ 은 직진방향,  $i=2$ 는 피치(pitch) 방향, 그리고  $i=3$ 은 요(yaw)방향을 나타낸다. 그리고 전방 이동 축에 대한 회전, 즉 롤(roll) 운동은 없다고 가정한다. 결과적으로 Kane 방법에 의거하여 이룬 밸런싱 로봇의 운동 방정식을 유도하면 다음 (1)식과 같이 3자유도 비선형 미분 방정식의 형태가 된다.

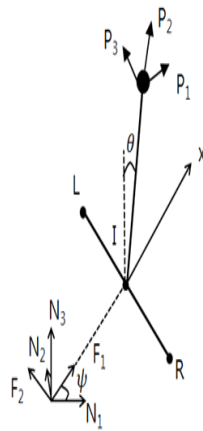


Fig 1. 2DOF two-wheeled balancing mobile robot.

즉, 이룬 밸런싱 로봇은 두 바퀴의 회전 운동에 의해 전방 속도와 두 방향의 자세를 동시에 제어하는 전형적인 부족 구동(under-actuation) 시스템이라고 할 수 있다. 이 결과는 [4]의 경우와 유사하며 표 1은 각 파라미터에 대한 설명이다.

$$\begin{aligned}
 F_1 + F_1^* &= (T_L + T_R)/R + M\dot{\mu}[\sin\theta(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) - \cos\theta\ddot{\theta}] \\
 &\quad - (M_p + 2M + 2J/R^2)\ddot{x} = 0 \\
 F_2 + F_2^* &= M\dot{\mu}(g \sin\theta - \cos\theta\ddot{x}) - T_L - T_R \\
 &\quad - (I_3 - I_1 - M\dot{\mu}^2)\sin\theta \cos\theta \dot{\psi}^2 - (I_2 + M\dot{\mu}^2)\ddot{\theta} = 0 \\
 F_3 + F_3^* &= -d(T_L - T_R)/R \\
 &\quad - \sin\theta \dot{\psi}[2(I_1 - I_3)\cos\theta \dot{\theta} + M\dot{\mu}(\dot{x} + 2l \cos\theta \dot{\theta})] \\
 &\quad - [I_3 + 2K + 2M\dot{\mu}^2 + 2Jd^2/R^2 - (I_3 - I_1 - M\dot{\mu}^2)\sin^2\theta]\ddot{\psi} = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Table 1. Parameters of two-wheeled balancing robot.

Frame {N}	고정기준좌표계
Point P	무게중심
Body L,R	로봇의 좌우 바퀴
Point I	양 바퀴 축을 연결하는 직선의 중심
x	{N}의 원점에서 I점까지의 이동거리
	피치 각(pitch angle)
	요 각(yaw angle)
$T_L, T_R$	좌우 바퀴의 토크
d	바퀴와 I점 간의 거리
l	질량중심과 I점과의 거리
$M_p$	로봇 바디의 질량
M	바퀴의 질량
$I_1, I_2, I_3$	운동 축에 대한 질량관성모멘트(MOI)
J	바퀴 회전축에 대한 바퀴의 MOI
K	지면과 수직 방향에 대한 바퀴의 MOI
R	바퀴의 반지름

### 3. 비선형 최적제어

SDRE 제어에서는 비선형 최적 레귤레이션(regulation) 문제를 다루며 시스템의 모든 상태가 관측 가능하고 (입력값에 대하여 아파인이라고 가정한다. 기존의 연구에 의하면 우선 피드백 시스템은 다변수 입력 시스템에 대하여 지역 점근적으로 (locally asymptotically) 안정하고 최적이며, 단일 입력에 대해서는 최적이라는 사실이 증명되었다 [16,17]. 여기서 원점을 평형 점으로 가정하면 시스템은 다음과 같이 표현되며 이것은 일반성을 상실하지 않는다[18].

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= f(x) + B(x)u(t) \\
 \text{where } x(0) &= x_0, t \in [0, \infty), f(0) = 0, \\
 x &\in R^n : \text{state tor}, u \in R^m : \text{input tor} \\
 f : R^n &\rightarrow R^n, B : R^n \rightarrow R^{n \times m}, B(x) \neq 0 \forall x
 \end{aligned} \tag{2}$$

다음에 최적제어 법칙을 결정하기 위해 주어지는 성능지수는 다음(3)식과 같이 상태변수 $x$ 에 대하여는 비이차이고 입력 $u$ 에 대해서는 이차이다.  $Q(x)$ 와  $R(x)$ 는 상태 값과 입력 값에 대한 가중 행렬로서 상태 의존적이다.

$$J(x,u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T(t)Q(x)x(t) + u^T(t)R(x)u(t)dt$$

$$Q: R^n \rightarrow R^{n \times n}, R: R^n \rightarrow R^{m \times m},$$

$$Q(x) \geq 0, R(x) > 0 \forall x \tag{3}$$

한편, 비선형 시스템(2)에 대하여 다음 (4)식과 같은 연속적인 행렬 함수인  $A(x)$ 가 존재하며 아래와 같이 표현된다.

$$f(x) = A(x)x, \text{ with } A: R^n \rightarrow R^{n \times n} \tag{4}$$

위와 같이 상태변수들을 벡터로 분리하고 비선형 항들을 상태행렬  $A(x)$ 에 포함시킴으로써 선형 방정식 형태를 만들 수 있다. 위 식은  $n > 1$ 에 대하여 비유일성(non-uniqueness)을 갖게 되어 전역 점근적 안정화와 최적화를 보장할 수 없으며 현재까지 명확한 이론적 증명이 이루어지지 않고 있다. 그러나  $A(x)$ 의 무한한 변화 가능성 때문에 성능, 안정성, 최적성, 및 강인성과 같은 부분에서 조정 및 변화가 가능하다는 점이 SDRE 제어의 장점이라고 할 수 있다. 이러한 상태행렬  $A(x)$ 의 게인으로서의 특성을 이용하기 위해서는  $\{A(x), B(x)\}$ 가 임의의  $x$ 에 대해서 국소적인 가제어성이 확보되어 지역 점근적 안정화를 보장해야 한다.

(4)에서 상태행렬이 결정되면 (2)는 다음과 같이 변환된다.

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t), \quad x(0) = x_0 \tag{5}$$

위에서  $u(t)=K(x)x$ 와 같이 선형 제어기 형태의 입력을 가정하고 비선형 미방 구속조건(2)식에 대하여 성능지수 (3)식을 최소값으로 접근시키는 압

력을 결정하면 결론적으로 원점이 '0'으로 가는 시스템에서 다음과 같이 준최적(suboptimal) 상태 피드백 제어법칙을 얻을 수 있다.

$$u(t) = k(x) = -K(x)x,$$

$$\text{where } K(x) = R^{-1}(x)B^T(x)P(x), k(0) = 0 \tag{6}$$

결국 위 식은 LQR 제어와 형태적으로 동일하며 준선형적인(quasilinear) 페루프 시스템을 국소적으로 (pointwise) 안정하게 만든다. 위 식에서  $P(x)$ 는 다음 (7) 식에 주어진 상태 의존적 대수 리카티 방정식(state dependent algebraic Riccati equation)의 유일한 해로서 대칭적이고 (symmetric) 양의 한정적인 (positive-definite)행렬이다.

$$P(x)A(x) + A^T(x)P(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0 \tag{7}$$

이상과 같이 비선형 제어에서는 상태 방정식의 행렬이 상태 의존적이며 비선형 동역학 자체를 이용하기 때문에 평형점에 대하여 선형화된 방정식을 이용하는 선형 최적 제어 방법의 성능 한계를 극복할 수 있다. 제어 입력을 계산하기 위해서는 매 샘플링 시간마다 상태 행렬을 상수로 처리하고 최적 제어 문제를 푼다.

SDRE 비선형 제어 이론을 응용한 기존 연구 결과들을 살펴보면 LQR과 SDRE 사이의 단순한 비교실험[10,11]이나 전역 점근적 안정성 확보를 위해 제한적인 상태행렬을 가진 시스템에 국한되고 있으며[13], 아직까지 SDRE 제어기 설계에서 핵심적인 내용에 해당하는 행렬에 대한 체계적인 설계 방법 또는 절차가 제시되지 않고 있다. 본 논문에서는 다변수 비선형 시스템인 역진자 형태의 이론 모바일 로봇에 대하여 SDRE 제어를 설계하고, 로봇 주행 시에 나타나는 동역학적 특

성을 상태행렬 선정에 고려한 설계 예제를 제시하고자 한다.

앞 절과 같은 운동방정식이 주어지면 최적제어 법칙에 따라 양 바퀴에 제어 입력을 결정할 수 있고 주어진 초기 조건에 대하여 비선형 방정식을 시간에 대하여 수치 적분함으로써 운동 시뮬레이션을 수행할 수 있다. 이 때 시뮬레이션에 사용된 이륜 밸런싱 로봇의 파라미터 값들은 표 2와 같으며 이것은 사람이 탑승할 수 있는 로봇에 해당한다. 양 바퀴는 최대 토크가 0.35 Nm인 모터에 기어비가 20:1인 감속기와 연결된 것으로 가정하며 최대 구동 토크를 세그웨이 경우와 같이 6.5 Nm로 제한한다. 표1에 나타난 다른 파라미터에 대한 값들은 표2와 같다. 여기서 로봇의 비선형 특성이 크게 나타나는 동작을 얻기 위해 로봇의 초기 자세를 피치각  $\theta = 20^\circ$ , 요각  $\psi = 270^\circ$  로 설정한 후, 로봇이 평형점으로 레귤레이션하는 시뮬레이션을 수행하면 그림 2와 같이 급회전과 전진 운동이 동시에 일어나게 된다. 이 때 다음과 같은 가중행렬을 적용하면

$$Q = \text{diag}([20 \ 5 \ 90 \ 0.02 \ 4 \ 1]), R = \text{diag}([1.5 \ 1.5]) \quad (10)$$

LQR 게인 행렬은 다음 (11)식과 같이 고정된 값으로 산출되는 반면, SDRE게인 행렬은 매 샘플링 시간마다 변화한다.

Table2. Simulation parameters.

$M_P = 45.0kg$	$M = 3.8kg$
$I_1 = I_2 = 6.000kg.m^2$	$I_3 = 0.009kg.m^2$
$I = 0.16m$	$d = 0.34m$
$R = 0.42m$	$J = 0.12kg.m^2 \quad K = J/2$

#### 4. 성능시험 및 결과

Fig 2는 상태 변수를  $\theta = 20^\circ, \dot{\theta} = 0, \dot{\psi} = 45^\circ/sec$  와 같이 일정하게 두고 전방 속도를  $\dot{x} = 0 \sim 6.0m/sec$ 로 변화시키면서 게인 행렬의 1행 요소(즉, 왼쪽 바퀴의 토크를 결정)들을 계산한 결과이다. 상태행렬을 적용했을 때는 게인 행렬의 모든 요소들이 변화하는 반면, 상태행렬(13)은 요각속도 관련 게인 요소만이 전방 속도에 따라 변화하는 것을 알 수 있다. 이와 같은 게인 값의 변화는 다른 상태 값들에 대해서도 유사한 경향을 나타내며, 오른쪽 바퀴 토크에 관여하는 2행 요소 또한 같은 경향성을 보인다.

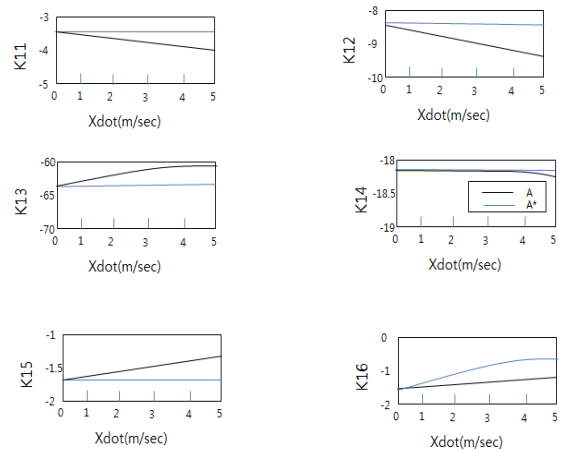
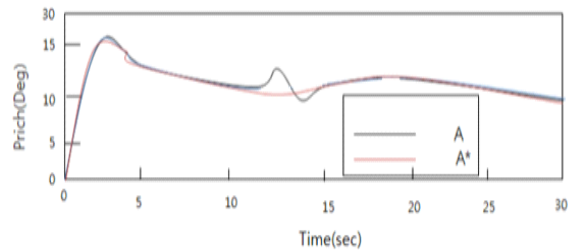


Fig. 2. Variation of the gains w.r.t the change of robot

velocity



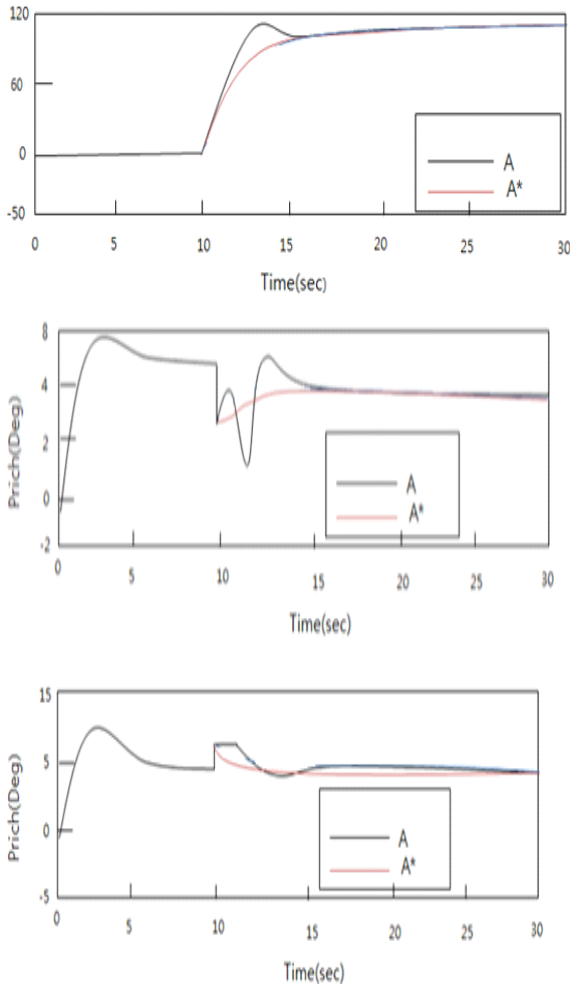


Fig 3. performance change according to the state matrix seleciron.

Fig 3은 로봇이  $0.9m/sec^2$ 의 전방 가속도로 출발하여 주행 성능이 안정화된 이후에 15초 근방에서(속도  $8m/sec$ ) 요 방향으로 선회 주행을 시작하는 경우로서, 성능 및 상태행렬 차이에 따르는 제어 성능을 상호 비교한다. 이 때 사용된 가중행렬은 (10)식과 같다. 상태행렬 (9)를 적용한 SDR 제어기를 적용했을 때 방향 전환 시에 피치 운동이 상대적으로 안정됨을 알 수 있다.

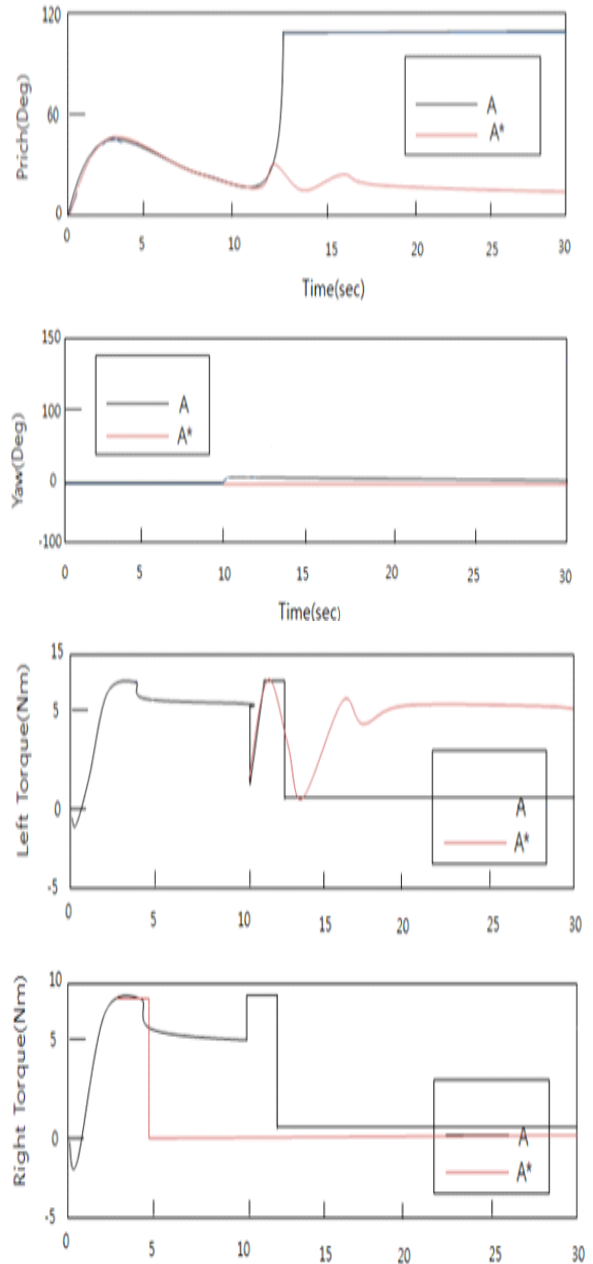


Fig. 4. Performance change according to the state matrix selection

위 Fig 4는 더 높은 가속도  $1.0m/sec^2$ 로 직진 주행하다가 12초 시점에 (속도  $12m/sec$ )  $160^\circ$  선회 운동을 시작하는 시뮬레이션 결과이다. 각 제

여기의 성능 차이를 확인하기 위해 양 바퀴의 토크 제한을 8.8Nm로 상향시켰다. 우선 선형 제어는 등가속을 시작하는 과도구간에서 안정화가 이루어지지 않아 넘어지는 결과를 나타낸다. 상태행렬(9)를 적용한 제어는 선회 시에 피치 안정화를 이루지 못하고 쓰러지는 현상을 보인다. 반면 상태행렬(13)을 통한 제어는 안정성을 유지하였다.

위 시뮬레이션 결과는 로봇이 감속 없이 급선회하는 상황을 나타내므로 정상적인 주행 상황에서는 다소 벗어난 경우라고 볼 수 있다. 그러나 이륜 모바일 로봇이 기존 선형제어의 성능 한계를 극복하기 위해서는 이와 같이 비선형 동역학항의 크기가 증가하는 고기동 조건에 대하여 안정된 제어 성능을 확보하는 것이 필요하다. 특히 인간 탑승형 로봇의 경우, 의도하지 않은 로봇의 오동작 또는 조작 실수로 인해 높은 가속도가 발생하는 비정상적인 상황에서 탑승자의 안전을 확보하기 위하여 SDRE 제어 방법이 매우 효과적인 수단일 수 있다.

## 5. 결론

본 논문에서는 모바일 로봇에 대하여 비선형 최적제어기를 설계 하였으며 선형제어와의 비교 시뮬레이션을 통해 유용성을 밝혔다. 결론적으로 제안된 제어 방법은 비선형 동역학 항의 크기가 증가하는 고기동 상황에서 선형제어에 비해 우수한 성능을 보이며 로봇 양 바퀴에 대한 최대토크를 완화시킨다.

한편, 비선형 제어에서는 비선형 요소들을 갖는 제어구조 설계 문제가 핵심적인 오픈 이슈로 남아 있으며, 아직까지 이론에 근거한 체계적인 설계 방법이 제시되지 못하였다. 본 논문에서는 2월구동 모바일 로봇에 대한 설계 예제 로서 두 가지 제어구조를 제시 하였다. 특히 로봇이 고기동하는

주행 조건에 대한 물리적 특성을 고려하여 상태행렬을 적용했을 때 선회주행 안정성이 크게 개선됨을 보였다.

## 참고문헌

- 1) <http://www.segway.com>
- 2) <http://www.gm.com>
- 3) F. Grasser, A.D'Arrigo, and S.Colombi, "JOE:A mobile, inverted pendulum," IEEE Trans. on Industrial Electronics, vol.49, no. 1, pp.107-114, Fed.2002
- 4) Y. Kim, S. Kim, and Y. Kwak, "Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum fobot," Journal of Intelligent and Robotic Systems, vol.44, no. 1, pp.25-46, sep.2005
- 5) J. M. Yun, J.-K. Lee, and J.-M. Lee, "An Efficient Horizontal Maintenance Technique for the Mobile Inverted Pendulum," Journal of Control, Automation, and Systems Engineering (in Korean), vol. 13, pp. 656- 663, jul2007
- 6) J. D. Pearson, "Approximation methods in optimal control," journal of Electronics and Control, vol. 13, pp.453-469, 1962
- 7) N.M Singh, J.Dubey, and G. Laddha, "Control of pendulum on a cart with state dependent riccati equations," Int. Journal of Computer, Information, and Systems Science, and Engineering, pp. 92-96, 2009.



- 8) C. Huifeng, L. Hongxing, and Y. Peipei, "Swinging- up and stabilization of the inverted pendulum by energy well and SDRE control." "Control and Decision Conf, pp.2222-2226, Jun.2009.
- 9) J. R. Cloutier and C. P. Mracek, "Parametric enhancement of state-dependent riccati equation based control," Proc. of the American Control Conf, vol.2, pp.1072-1073, Jun.1997
- 10) E. Erdem and A. Alleyne., "Experimental real- time SDRE control of an underactuated robot," Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, vol.3, pp.2986-2991, Dec.2001
- 11) P. Dand and F. Lewis., "Controller for swing-up and balance of single inverted pendulum using sdre-based solution," IECON<sup>3</sup> 1st Annual Conference of IEEE, pp.304-309, Nov.2005
- 12) A. Fenili and J. M. Balthazar, "The rigid-flexible nonlinear robotic manipulator: Modeling and control," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol.16, pp.2332-2341, May 2004.
- 13) E. Fenili and A. Alleyne, "Design of a class of nonlinear controllers via state dependent riccati equations," IEEE Trans on Control Systems Technology, vol. 12, no. 1, pp.133-137, Jan.2004
- 14) A. Nemra and N. aouf "Robust INS/GPS sensor fusion for UAV Localization using sdre nonlinear filtering," IEEE Sensors Journal, vol. 10, no.4, Apr.2010.
- 15) T. R. Kane and D. A. Levinson, "Dynamics: Theory and applications," McGraw-Hill Book Company, 1085
- 16) C. P. Mracek and J. R. Cloutier, "Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent riccati equation method," Int, Journal of Robust and Nonlinear Control, vol.8, pp.401-433, Apr.1998
- 17) J. R. Cloutier, C. N. D'Souza, and C. P. Mracek, "Nonlinear regulation and nonlinear  $H_{\infty}$  control via the state-dependent Riccati equation technique: Part 1, Theory; Part 2, Examples," Proc. of the First Int. Conf. on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, pp. 117-141, May 1996
- 18) T. Cimen, "State-Dependent Riccati Equation (SDRE) control: A survey," Proc. of the 17th World Congress the Int. Federation of Automatic Control, pp.3761-3775, Jul.2008

---

접수:2015.03.11., 수정:2015.04.06, 게재확정:2015.04.20