

CBR을 활용한 초등 영재 학생의 그래프 활동에 관한 연구¹⁾

강 영 린* · 조 정 수**

본 연구는 그래프 해석에 대한 유사한 오류를 범하는 초등학교 5학년 수학 영재 학생 4명을 대상으로 CBR을 활용한 그래프 활동이 그래프 능력에 미치는 효과를 분석하였다. 선행연구에 기초하여 CBR을 활용한 그래프 활동 수업 설계를 하였으며 40분 동안 2차시에 걸쳐 영재 교사에 의해 수업이 진행되었다. 자료 분석을 위해 동영상 촬영, 학생과의 인터뷰 등을 수집하여 녹취록을 작성하였고, 2주 후 동일한 문항으로 사후 검사를 실시하여 연구 참여자의 그래프 해석에 대한 오류가 어떤 변화를 거치는지 비교·분석하였다. 본 연구 결과에 따르면 학생들은 그래프의 변화를 이해하고, 변인 간의 관계를 진술하며, 종속 변수 간 관련짓기를 할 수 있었다.

1. 서 론

현대 사회는 다양한 많은 자료들이 존재하고 있어 이러한 자료들을 간결한 방식으로 전달하는 그래프의 중요성이 강조되고 있다. 그래프는 학교 수학에서도 기초 영역으로 간주되어 NCTM(2000)은 전학년에 걸쳐 그래프 능력을 향상시키도록 권고하고 있다. 이는 학교 수학에서 그래프가 분포나 함수, 변화 상태, 주기성, 패턴의 성질에 대한 전체적인 경향과 변화를 한눈에 파악할 수 있도록 표상을 제공해주는 수학적 도구의 역할을 하기 때문이다. 그러나 Goldberg & Anderson(1989)의 에피소드와 같이 다른 선행 연구에서도 학생들은 여전히 그래프를 읽고 해석하며 구성하는 것을 어려워한다고 주장하고 있다(Mevarech & Kramarsky, 1997; Shah & Hoeffner, 2002).

그림 (a)와 같이 시간-거리 그래프가 주어졌을 때 학생들은 (b)와 같이 그래프를 이동 경로로 해석하는 것이 관찰되었다. 학생들은 그래프와 물리적 개념 또는 그래프와 현실 세계를 연결시키는 것을 어려워했다(Goldberg & Anderson, 1989).



(a) 시간-거리 그래프 (b) 그래프에 대한 학생의 해석

게다가 중·고등학교에서 그래프 학습을 해왔지만 대학생이 되어서도 여전히 실세계 현상과 그래프를 연결시키고, 그래프를 해석하는 것에 어려움을 겪는다고 한다(Skalsky & Pastel, 2004).

이는 자료를 이해하기 쉽게 보여주고, 요약하며, 제시된 자료를 바탕으로 추론하여 앞으로의 경향을 예측하는 그래프 교육의 목적에 비추어 볼 때 지금 그래프 교육은 이러한 이점을 잘 살

* 효자초등학교, yr3027@hanmail.net (제1 저자)

** 영남대학교, chocs@yu.ac.kr (교신저자)

1) 이 연구는 2012년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

리지 못하고 있기 때문이라 사료된다. 우정호(2001)에 의하면 함수 개념의 운동학적 기하학적 측면은 약화되었으며 대수적 측면과 형식적 측면이 중심을 이루게 되어 수학의 시각적 토대를 비본질적인 것으로 경시하는 상황이 학교 수학에 그대로 드러났다고 한다. Freudenthal 역시 변화에 대한 전체적인 개관을 보여 준다는 점에서 그래프 활용을 중시해야 하며 그래프를 구성하는 과정에 앞서 그래프를 보고 변화를 해석하고 의미를 부여하는 해석 과정이 선행되어야 한다며 함수의 그래프를 강조하고 있다(정영옥, 1997 재인용). 결국 그래프 교육에서는 그래프로부터 변화 상황을 추측해보거나 개략적인 형태로 변화하는 양들 사이의 관계를 그려보는 질적 접근이 강조된다(송정화, 권오남, 2002). 그러나 최근 유현주(2013)의 연구에 따르면 여전히 초등학교 수학 교과서의 그래프 교육은 거의 대부분 그래프를 그리는 활동에 치우쳐 있으며, 자료 값들이 이루는 전체적인 경향이나 패턴으로부터 어떤 추정이나 예측을 하여 활용하는 부분이 부족한 실정이다.

NCTM(2000)은 수학 교육에서 학생들의 수학적 개념과 능력을 향상시키기 위해 사용할 수 있는 공학으로 그래픽 계산기, 컴퓨터, MBL(Micro Based Laboratory), CBL(Calculator Based Laboratory), CBR(Calculator Based Ranger) 등을 제시하고 있다. 그 중에서 그래프 지도에 대한 양적 접근의 전형적인 수학 수업에 대한 문제점을 해결하는 방안으로 CBR(Calculator Based Ranger)이 도입된 것도 10년 이상 지났다. CBR은 Texas Instruments에서 개발한 도구로 실시간으로 자료를 수집하여 그래프로 나타내어 분석할 수 있도록 해 준다(Texas Instruments, 1997). 선행 연구에 따르면 CBR은 실제의 운동을 센서로 감지하고 그 정보를 바로 그래픽 계산기에 입력하여 그래프로 나타내므로 자료 수집과 자료를 그래프로 변환하

는 시간적 노력을 줄일 수 있어 그래프를 이해하고 해석하는데 시간을 많이 할애할 수 있다고 보고하였다(Fiona, 2003). 또 CBR을 활용한 결과 그래프 해석 능력이 향상되며 수학에 대한 태도와 흥미 측면에서 긍정적인 변화가 있었다고 하였다(이현수, 박종률, 이광호, 2009; Kwon 2002; Skalsky & Pastel, 2004). 지금까지 CBR을 이용한 연구는 주로 그래프 작성과 해석에 있어서 중·고등학생의 어려움과 오류를 해소시키기 위한 교수·학습 방법으로 적용되어왔다. 그러나 Hogan(2001)에 따르면 그래프 모양을 보며 움직임을 예상해보거나 실제로 움직임을 그래프로 나타내는 실험을 가능하게 해 주는 CBR은 초등학생에게도 유용한 도구이고, 처음 그래프를 접하는 초등학교에 적용해볼만한 가치가 있다고 보았다.

이에 본 연구는 5학년 수학 영재 학생을 대상으로 CBR을 이용한 그래프 활동을 제공하였을 때 학생들이 가지고 있던 그래프 능력이 어떠한 과정을 겪으면서 어떻게 변화하고 있는지 분석하여 CBR을 활용한 그래프 수업에 대한 시사점을 얻고자 한다.

II. 이론적 배경

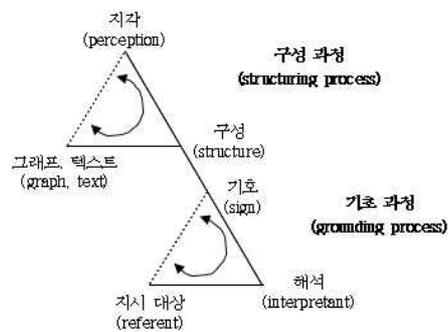
1. 그래프와 그래프 지도

사회 현상을 분석하고 이해하기 위한 유용한 도구 중의 하나는 그래프이다. 우정호(2001)에 따르면 그래프는 자료 사이의 관계를 도해로 제시하고, 자료와 맥락의 특성을 발견하도록 돕는 탐색 도구이다. 또 송정화, 이종희(2007)는 그래프가 많은 정보를 한 눈에 압축하여 나타낼 수 있고 자료들의 상관관계와 변화 경향을 쉽게 추측할 수 있다고 주장하였다.

수학, 과학 교육 분야에서는 이러한 그래프를 효율적으로 지도하기 위한 연구가 이루어져 왔다. Krabbendam(1982)은 그래프 해석을 양적인 값에 초점을 두었는지 그렇지 않은지에 따라 양적 접근과 질적 접근으로 구분하였다. 양적 접근은 정확한 수치적 자료를 이용해서 좌표평면이나 좌표공간 위에 이를 정확하게 그림으로써 변화의 특징을 설명하고 예측하는 것을 의미한다. 반면, 질적 접근은 그래프를 보고 두 변수 사이의 관계나 의미를 구하는 것으로 그래프 그 자체에 초점을 두어 그래프의 대략적인 경향을 스케치하거나 해석하는 접근을 말한다. 그에 따르면 처음 그래프를 지도할 때에는 질적 접근에서 시작하고 이후 정교화 단계에서 양적 접근으로 전환하여 수치적이고 좀 더 정확한 표현을 하는 것이 바람직하다고 말하였다.

Freudenthal은 그래프를 읽을 때나 그릴 때 초점을 어디에 두었는지에 따라 점별 접근, 국소적 접근, 광의적 접근으로 나누었다. 점별 접근은 한 점에만 초점을 맞추는 것으로 독립변수에 해당하는 점에 대한 종속변수의 값을 읽거나 그 점의 종속변수에 해당되는 독립변수의 값을 읽는 것을 의미한다. 국소적 접근은 한 점이 아니라 한 점의 근방에서 그래프의 변화를 보는 것으로 증가와 감소, 양과 음, 연속, 최대·최소, 기울기의 정도, 불연속인 점, 오목과 볼록을 알아보는 것을 의미한다. 따라서 점별 접근과 국소적 접근은 그래프에서 수치적인 값에 초점을 맞추어 해석이나 구성을 하는 양적 접근 기반이라 할 수 있다. 반면, 광의적인 접근은 어떤 구간이나 전체 구간에 대해서 그래프를 해석하는 것을 말한다. 이것은 그래프를 보고 두 변수 사이의 관계나 의미를 구하는 것으로, 정확한 양에 기초한다기보다는 그래프 그 자체에 초점을 두어 그래프의 대략적인 경향을 스케치하거나 해석하는 질적 접근과 연결된다(정영옥, 1997 재인용).

Roth & Bowen(2001)은 그래프 읽기 단계를 [그림 II-1]과 같이 기초 과정(grounding process)과 구성 과정(structuring process)으로 구분하고 있다. 이 모델은 Ogden & Richards의 기호 삼각형으로부터 영향을 받아 관계가 간접적인 경우를 나타내기 위해 점선을 사용하였고, 직접적으로 대응하는 경우 실선을 이용하였다.



[그림 II-1] Roth & Bowen의 그래프 읽기 과정

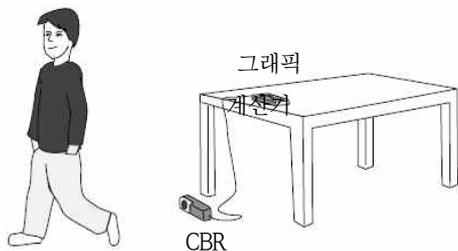
먼저, 기초 과정(grounding process)은 학생이 이미 알고 있는 지식과 그래프에 나타난 기호(sign), 예를 들어 x축, y축, 단위, 간격 등이 실세계에서 지시 대상(referent)이 의미하는 바를 경험할 수 있도록 연결하는 단계이다. 따라서 이 단계에서는 그래프로 나타나는 현상에 대한 경험이 강조되어 개인의 직접적인 경험이나 공학의 시뮬레이션을 통한 간접 경험이 요구된다. 이 때 지시 대상에 대한 해석(interpretant)은 기호가 사용되는 맥락과 관습에 따라 수학적 기호일 수 있지만 학생이 현상을 경험함으로써 알게 된 비형식적인 기호일 수도 있다. 기초 과정에서는 기호 그 자체에 초점을 두었다면 반면, 구성 과정(structuring process)은 그래프(graph)의 구성요소와 텍스트(text)로부터 그래프의 시각적 표현을 이해하고 구성(structure)하는 단계이다. 예를 들어 주어진 그래프에서 변수에 대응하는 값을 찾고 변인 간의 관계를 진술하며 주어진 식으로부터

그래프를 그리거나 반대로 그래프가 주어졌을 때 그것에 맞는 대수 관계를 만드는 활동 등을 하게 된다. 이미 알고 있는 그래프에 관한 지식으로부터 관심과 흥미를 보이며 지각(perception) 하게 되고 개인적인 소양에 따라 구성 과정은 달라진다. 따라서 이 과정에서 학생은 그래프에 대한 개념을 교사에 의해 주입받는 존재가 아니라 그래프를 조작하고 구성하는 동안 관련된 질문과 추측을 하는 능동적인 주체여야 한다.

이상의 선행 연구들로부터 연구자는 그래프 지도는 질적이며 광의적인 방법으로 접근하는 것이 바람직하다고 판단을 하여 그래프가 나타나는 현상을 직접 경험해보도록 설계하였다.

2. CBR(Calculator Based Ranger)

CBR은 실시간으로 자료를 수집하여 그래프로 나타내어 분석을 할 수 있도록 해 주는 도구이다(Texas Instruments, 1997). 이것은 그래픽 계산기와 연결하면 그 속에 내장되어 있는 프로그램인 'Ranger'이 작동하게 되어 물체의 움직임을 감지하여 자료를 직접 수집한다. CBR은 [그림 II-2]와 같이 임의의 그래프를 따라서 움직이면서 거리와 시간과의 함수, 속도와 시간과의 함수, 가속도와 시간과의 함수를 직접 체험할 수 있게 해주며, 자신의 움직임에 대해 그래프를 직접 만들어주기도 한다.



[그림 II-2] CBR로 움직임을 그래프로 나타내기

또, 내장된 'BALL BOUNCE' 프로그램으로 공의 움직임을 그래프로 나타낼 수 있으며, 'MATCHIT' 프로그램으로 그래픽 계산기에서 제공하는 임의의 그래프에 맞춰 움직여보면서 학생들의 흥미와 동기를 유발할 수 있다.

함수와 그래프에서 CBR을 이용한 선행 연구는 다음과 같다. 먼저, Lapp & Cyrus(2000)는 CBR을 활용한 수업이 그래프와 물리적 개념을 연결하는 것의 어려움, 그래프와 실세계를 연결하는 것의 어려움, 그래프와 물리적 사건 사이의 변환에 대한 어려움, 그래프 개념의 이해 등에서 문제점을 해소시켜 줄 수 있음을 확인하였다.

Hogan(2001)은 초등학교 1학년을 대상으로 그래프 모양을 보며 움직임을 예상해보거나 실제로 움직임을 그래프로 나타내는 실험을 통해 CBR이 중·고등학생에게만 적합한 도구가 아니라 초등학생에게도 유용한 도구임을 입증하였다.

Fiona(2003)는 CBR이 다음과 같은 장점을 가진 도구라고 주장하였다.

- ① 즉각적인 피드백: CBR은 움직임과 동시에 그래프를 볼 수 있게 해 준다. 이러한 즉각적인 그래프는 학생들이 자기 주도적으로 학습을 가능하게 해 준다.
- ② 간편성: 실시간으로 자료를 수집할 수 있어 지필 환경처럼 자료 수집과 그래프를 구성하는 것에 시간을 들이기보다 그래프 해석에 초점을 둘 수 있다.
- ③ 직접적인 체험: 그래픽 계산기에 나타난 그래프는 상황, 언어적 표현, 그래프 해석, 움직임을 통한 모델링 등 학생의 직접적인 체험의 결과로 나타난 것으로 이러한 다양한 표상 사이의 변환은 함수의 기초가 된다.
- ④ 사용의 편의성: 그래픽 계산기 'ENTER' 키나 CBR의 'TRIGGER' 키를 이용하면 CBR이 작동되므로 학생들이 쉽게 사용할 수 있어 학생 중심의 활동이 가능하다.

⑤ 소집단 학습: 학생들이 주어진 그래프에 대해 움직임을 예상하고, 직접 실험하며 찾아낸 결과에 대해 논의할 수 있다.

마지막으로 Stylianou, Smith, & Kaput(2005)는 예비 초등 교사에게 CBR을 적용한 결과, 예비 초등 교사는 그래프에 대한 오개념 해소, 수학적 의사소통의 수단으로서 그래프 활용하기, 다양한 관점에서 그래프 조작하기와 같은 수학적 통찰과 학생의 실제적 경험을 통한 학습의 가치, 그래프에 관한 의사소통과 논의가 가능한 학습 환경의 제공에 대한 중요성과 같은 교수학적 통찰을 얻었다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 참여자

본 연구는 CBR을 이용한 그래프 활동을 분석하기 위하여 포항시에 소재하는 ○○초등학교 5학년 수학 영재 학급 학생들을 대상으로 하였다. 본 연구에서 적용할 내용 영역이 초등 교육과정을 넘어서는 수준의 내용으로, 수준의 난이도를 볼 때 일반 학생들한테는 본 연구와 활동에서 일어나는 수학적 활동 속에서 연구자가 의도하는 수학적 발견을 예측하는 것이 불가능할 것이라 판단되어 영재 학생을 대상으로 하였다. 이 학생들은 국가에서 실시하는 영재 선발 단계를 거쳐 선발된 학생으로 ○○초등학교 내에서 상대적인 수학 학업 성취도 수준은 상위권이었다. 영재 학급 대부분의 학생들은 평균적인 사회 경제적 배경을 가지고 있었으며, 특히 초등학교가 대학교 근처에 인근하고 있어 학부모의 교육열이 높은 편이었다. 이 학생들을 대상으로 그래프 해석 검사를 실시하여 그래프 해석에서 유사한

오류를 범하는 학생 4명(남 3명, 여 1명)을 선정하였다. 사전 검사에서 나타난 연구 참여자들이 갖는 그래프 해석에 관한 오류 특징을 요약하면 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 연구 참여자의 사전 검사 문항 오류 특징

연구 참여자	사전 검사 문항 오류
A	시간-거리 그래프에서 가로축과 세로축에 대한 의미를 간과하여 그래프에서 수평선을 속도가 같은 것으로 파악하고 그래프에서 변화를 파악하지 못한다.
B	그래프에서 수평선의 의미를 아무 것도 안 했다는 의미로 해석하며 자신의 경험으로 그래프 해석하거나 구성한다.
C	수평선의 의미를 생각하여 답을 하는 것이 아니라 그래프에서 변화를 읽지 못하여 주어진 정보, 즉 수평선은 '거리'라고 이해한다.
D	수평선의 의미를 생각하여 답을 하지 않고 그래프에서 변화를 읽지 못하여 주어진 정보, 즉 수평선은 '시간'이라고 이해한다.

2. 자료 수집과 분석 방법

먼저 영재 학생들의 그래프 해석이 어떠한지를 살펴보기 위하여 조아영, 이광호, 최성택(2014)이 개발한 문제 유형 중에서 변인 간의 관계 진술하기, 종속변수 간 관련짓기, 그래프와 상황 설명하기와 관련된 문항을 선택하였다. 수업을 하기 전 이 문항으로 사전 검사를 하여 문항에 대한 오류 유형을 분석하였고, 유사한 오류 유형을 가진 학생을 연구 참여자로 선정하였다. CBR을 이용한 수업을 실시하고 2주일이 지난 후 동일한 문항으로 사후 검사를 실시하여 연구 참여자의 그래프 해석에 대한 오류가 어떻게 변화되었는지 비교·분석하였다.

CBR을 이용한 그래프 활동을 알아보기 위해서 CBR과 TI-73 계산기를 활용한 활동을 관찰한 자료, 면담 자료, 활동 수행의 결과물인 학생 활

<표 III-2> CBR을 활용한 그래프 활동 수업 설계안

목 표	움직임으로 그래프를 나타낼 수 있다.	
수업설계의도	계산기와 CBR을 이용해서 방향, 움직임, 속도를 다르게 하여 몸으로 그래프를 표현한다. 이 때 계산기 화면에 다르게 나타난 다양한 그래프를 관찰하면서 각 그래프가 무엇을 의미하는지 해석한다.	
학습조직	교수 · 학습 활동	자료(□) 유의점(※)
전체	<p>● 알고 있는 그래프 종류 발표하기</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">CBR을 이용하여 몸으로 그래프를 나타내어 보자.</div>	<p>※교사는 칠판에 학습문제를 제시한다. □계산기, CBR</p>
전체	<p>● CBR 사용하기</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 연결선을 이용하여 계산기에 CBR을 연결시킨다. 2. 그림 ①: [APPS]를 눌러 3: CBL/CBR을 선택 3. 그림 ②: [ENTER] - 그림 ③ 화면 - 3: RANGER 4. [ENTER]을 누르면 그림 ④ 5. [ENTER]-2: SET DEFAULTS 화면에 TO START PRESS ENTER ON TI-730I 나오면 CBR의 TRIGGER를 누른 후 [ENTER] 이 때 CBR에서 두두두 소리가 나면서 작동한다. 6. 다시 시작하고 싶을 때는 [ENTER]-4: MAIN MENU-2: SET DEFAULTS 	
소집단	<p>● 몸으로 나타내기</p> <ul style="list-style-type: none"> - CBR로부터 1m 떨어진 곳에서 가만히 있을 때 그래프 예상하고, 직접 활동 후 비교하기 - 주어진 그래프를 해석하여 계산기 화면에 그래프 만들기 	
개별	<p>● 만들고 싶은 그래프 만들기</p>	
		<p>※교사는 학생들의 행위가 일어나는 중간에 각 행위가 활동과의 연관성에 대해 묻거나 이야기를 해주어 무엇을 하고 있는지 알 수 있도록 한다.</p>

동지와 계산기에 나타난 그래프 자료 등을 수집하였다. 전체 수업 과정을 한 대의 비디오카메라를 이용하여 녹화하였고, 또 다른 비디오카메라를 이용하여 연구 참여자들의 상호작용 과정을 녹화하였다. 탐구 과정과 활동지 기록 등을 관찰하면서 정확히 파악할 수 없는 내용과 학생들의 학습에 대한 이해를 살펴보기 위해서는 개별적인 면담을 실시하였다. 이렇게 수집된 녹화 자료 및 녹음 자료 그리고 인터뷰 자료는 모두 녹취록을 만들었으며 CBR을 이용한 그래프 활동이 영재 학생들의 그래프 해석과 구성에 어떤 영향을 주었는지 사전 검사의 문항 유형별로 에피소드를 나누어 분석하였다.

3. 그래프 활동 프로그램 개발

CBR을 활용한 그래프 활동을 개발하기 위해 II장에서 고찰한 그래프에 대한 이론적 배경에 기반을 두어 수학교육 전문가와 협의 하에 연구자가 과제를 개발하였다. 그래프 활동 프로그램은 Texas Instruments 회사에서 개발한 활동지 Discovering Mathematics with the TI-73: Activities for Grades 7 and 8(Ellen, 1998)을 바탕으로 하였다. 본 연구에서 사용된 활동은 주어진 그래프를 보고 실제로 움직임을 그래프로 나타내거나 그래프가 기초한 상황에서의 관계와 그래프에 해당하는 이야기를 만들어보는 것에 초점을 두었다. CBR을 활용한 그래프 활동에 관한 수업은 <표 III-2>와 같다.

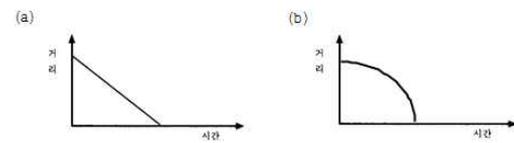
이렇게 개발된 과제는 ○○초등학교의 영재 교사에 의해 2014년 5월 28일 수요일 40분씩 두 차시에 걸쳐 수업이 진행되었다. 본 연구를 위해서 한 소그룹에 CBR과 TI-73 계산기를 각각 1대씩 제공하였으며, 4인 1조의 5개의 소집단을 구성하여 수업이 진행되었다. 특히 연구 참여자들은 동일 소그룹으로 구성되어 집중 관찰하였다. 이 학생들은 본격적인 연구가 시작되기 전 CBR과 연결되는 TI-73 계산기의 키와 매뉴얼 익히기에 관한 수업이 별도로 세 차시 이루어진 상태이므로 표 만들기, 그래프 그리기 등의 키 조작을 할 수 있었다.

IV. 연구 결과

연구 결과, CBR을 이용한 그래프 활동을 통해 학생들은 그래프의 변화를 파악하기, 변인 간 관계 진술하기, 종속변수 간 관계짓기를 할 수 있게 되었다. 각각의 결과를 에피소드별로 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

1. 에피소드: 그래프의 변화 파악하기

학생들은 활동지에 주어진 그래프의 변화를 예측해보고 CBR 앞에서 실제로 움직여보면서 방향, 움직임, 속도로 그래프의 변화를 파악할 수 있었다. 활동지에는 [그림 IV-1]과 같이 둘 다 감소하는 형태이지만 속도의 변화는 다른 두 그래프를 제시하였다.



[그림 IV-1] 활동지에 제시된 그래프

먼저, [그림 IV-1(a)]에 대한 그래프를 예측하고 CBR로 검증해보는 과정에서 학생들이 나누어 이야기이다.

 그래프의 변화에 대해 먼저 예측하고 실제로 CBR을 이용하여 계산기에 나타내어 본다.

- 1 학생 A: 이번에도 가만히 서 있으면 돼?
- 2 학생 B: 아니. 가만히 서 있다
- 3 학생 C: 요렇게 가만히 있다가 좋아.
- 4 학생 B: 여기까지 걸어 와.
- 5 학생 C: 시작하면 천천히 걸어와.
- 6 학생 A: 천천히?
- 7 학생 D: [고개를 끄덕이며] 응. 천천히
- 8 학생 A: 박수를 쳐.
- 9 학생 D: [일정한 속도로 짹짹] 이렇게?
- 10 학생 A: 응.

학생 A는 처음에 이 그래프의 변화를 인식하지 못하고 있다. 그래서 가만히 서 있는 것이 그래프에서 수평선을 의미하는 것임에도 불구하고 감소하는 그래프에 대해서도 가만히 서 있으면 되는지 묻는다(1행). 그러나 직선으로 나타난 모양, 즉 기울기가 일정하다는 것은 속도가 일정하다는 것을 의사소통을 통해 알게 되면서 학생 A는 일정한 속도로 감소하고 있는 이 그래프에 대해서 일정한 속도를 박수 소리로 표현해달라는 의견을 제시하였다(8~10행).

CBR에 그래프를 나타내는 과제를 수행하고 난 후 학생들은 활동지에 [그림 IV-2]와 같이 기록하였다.

(CBR로부터 약 5m 떨어진 곳에서 아주 천천히 같은 속도로 걸어 와서 CBR 앞의 몇cm 앞에서 멈춘다.)

[그림 IV-2] 에 대한 그래프의 변화 설명

다음은 [그림 IV-1-(b)]에 대한 그래프를 예측하고 CBR로 검증해보는 과정에서 학생들이 나눈 이야기이다.

 그래프의 변화에 대해 먼저 예측을 하고 실제로 CBR을 이용하여 계산기에 나타내어 본다.

- 11 학생 B: 아주 천천히 걸어야 된다.
- 12 학생 C: 아, 맞아!
- 13 학생 B: 이렇게 조금 있다가 바로 뛰어 버린다. 요렇게...
- 14 학생 C: 그리고, 야, 바로 시작하면 안되고 4초나 5초 뒤에 시작해야 될 것 같은데? 야, 4초나 5초 뒤에 시작해야 될 것 같은데?
- 15 학생 A: [행동으로 시범을 보이는 학생에게] 아이 그 정도는 너무...
- 16 학생 B: 야, 그럼 직선이다
- 17 학생 D: 많이 걸으면 되잖아?
..... (중략)
- 18 학생 C: 시~작! 3초 있어. 3초. 아직 가지 마!
- 19 학생 B: 가지마! 가지마! 가지마! 가지마!
- 20 학생 B: 시작!
- 21 학생 C: 아직 가지 말라는데 사람 좀 있어야 돼. 이제 조금 속력 내.
- 22 학생 B: (웅성거림) 오, 됐다. 됐다.

먼저 학생들은 에 대한 그래프의 변화를 예측하였다(11~17행). 이 때 학생들은 감소하는 유형인 두 그래프 와 의 차이를 빠르기로 설명하였고(11, 13, 16행), 실제로 CBR 앞에서 그래프를 나타낼 때는 속력이라는 말을 사용하면서 기울기가 급한 부분에서는 속력을 내도록 재촉하였다(21행).

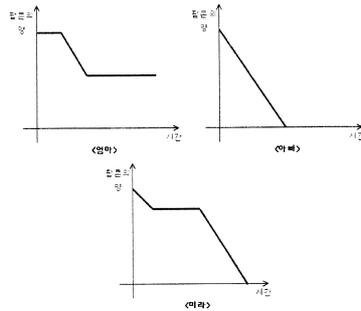
CBR에 그래프를 나타내는 과제를 수행하고 난 후 학생들은 활동지에 [그림 IV-3]과 같이 기록하였다.

약 4.5m 떨어진 곳에서
아주 천천히 오다가 점점
빠르게 온다.

[그림 IV-3] 에 대한 그래프의 변화 설명

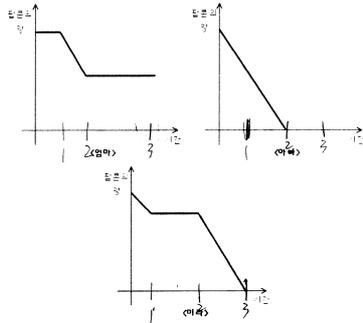
그래프의 변화를 CBR로 경험을 한 학생들은 그래프의 전체적인 경향뿐만 아니라 한 점의 근방에서 증가와 감소, 빠르기와 같은 그래프의 변화를 이해할 수 있었다. 특이한 점은 y축 변수에 눈금이 표시가 되어 있지 않았음에도 불구하고 학생들은 미묘한 y값의 차이를 5m, 4.5m와 같이 각각 나타내었다. 이처럼 CBR을 이용한 그래프 활동은 학생들이 그래프의 변화를 감지함과 동시에 특정한 점에 초점을 맞출 수 있게 하는 것을 발견할 수 있었다. 이러한 변화는 학생 D의 사후 검사에서 [그림 IV-4]와 같이 나타났다.

(a)



올 때	먼저 많이 오다가 점점 느려지고 끝날 때 까지
아 빠	가속도가 점점 작아지는 것 같아.
미 라	조금 더 느려지다가 갑자기 엄청나게 빨라진다.

(b)



모든	1시간 동안 먹지 않음. 다가 2시간 가지 조금 먹고 갈 때 가지 먹지 않았음.
아빠	1시간 동안 계속 먹어 다 먹었다.
미리	1시간 가지 조금 먹고 3시간 가지 다 먹었다.

[그림 IV-4] 특정한 점에 대한 초점

[그림 IV-4(a)]와 같이 사전 검사에서는 질적 접근이며 광의적 접근에서 그래프의 특성을 기술을 하였다면 CBR을 이용한 그래프 활동을 하고 난 후 학생 D는 [그림 IV-4(b)]와 같이 그래프의 x축에 눈금을 임의로 1, 2, 3을 표시한 후 변수에 해당하는 값을 이용하여 기술하였다. 이것은 학생들이 움직임을 설명하거나 기술하는 과정에서 구체적으로 표현하기 위해 양적인 측면에 초점을 맞추게 되면서 나타난 현상으로 사료된다.

2. 에피소드: 변인 간 관계 진술하기

학생들은 자신들이 그려보고 싶은 그래프를 구상하여 실제로 데이터 수집 장치인 CBR로 그래프를 만들어보는 동안 시간-거리 그래프에서 두 변인 간의 관계를 파악할 수 있었다.

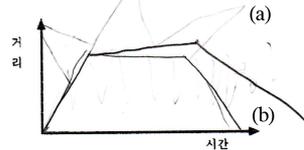
CBR을 이용하여 자신들이 나타내고 싶은 그래프를 그려보고, 그 그래프가 되기 위한 움직임을 이야기해본다.

- 1 학생 D: 별!
- 2 학생들: 그거 좋은 생각이다.
- 3 학생 C: 별 어떻게 만드는데? [별을 어떻게 나타내야 하는지 계속 묻는다.]
- 4 학생 B: [잠시 후] 시간이……. 이렇게 안 되잖아?
- 5 학생 A: 무슨 말이야!
- 6 학생 B: 시간이 뒤로 가진 않잖아?
- 7 (O.C. 별 모양을 그리자고 했는데 학생 B가 안 된다고 했다. 나도 생각하지 못한 것을 학생 B가 말한다.)

..... (중략)

- 8 학생 A: 이거하자! 이거!
- 9 학생 D: 어. 봐! 이것 좀 봐. 여기서는 이렇게 딱하고 여기서는 가만히 있어! 여기 딱 내려가고...
- 10 학생 A: 뭘소리고...
- 11 학생 D: 그니까 이렇게 하는거지. (웅성거림)
- 12 학생 B: 똑같은 속도야. 여기서 똑같은 속도 원하잖아?
- 13 학생 D: 어. 거기서 다시 이렇게 [CBR쪽으로] 오는거지. (현장조사록 #20, 5/28)

나타내고 싶은 그래프를 그려 봅시다. 어떻게 움직여야 이 그래프가 되는지 움직임에 대한 설명을 써 보시오. 그리고 실제로 CBR과 계산기를 이용하여 확인해봅시다.

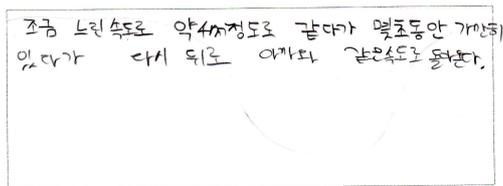


[그림 IV-5] 활동지에 구성된 그래프

처음에 연구 참여자들은 시간-거리 그래프의 두 변인인 시간, 거리에 대한 고려를 하지 않은 채 자신들이 그리고 싶은 모양을 결정하였고 (1~3행), 실제 활동지의 그래프 영역에는 별 모양(☆)을 그린 장면이 확인되었다([그림 IV-5-(a)]). 이것은 학생들이 시간-거리 그래프에서 운동을 기술하는 그래프는 움직이는 물체가 지나간 길을 그리는 것으로 잘못 인식하고 있기 때문이라 보인다. 그러나 x축 변수와 y축 변수에

관심을 가진 학생 B는 x축 변수, 즉 시간이 뒤로 가지 않는다는 표현(6행)을 하면서 학생 A, C, D가 활동 과정에서 두 변인 중 x축 변수에 대한 관심을 가지게 하였다. 다시 말하면 x의 값이 하나 정해지면 그에 따라 변수 y의 값이 하나씩 정해지는 관계가 될 때 함수의 그래프가 그려지는데 시간이 뒤로 가게 되면 x의 값이 여러 개가 생기게 되므로 함수가 될 수 없게 된다.

새로운 그래프를 구상하기 위해 학생들은 별 모양을 지우고, 그 자리에 사다리꼴 모양($\sqrt{\quad}$)을 그렸다(그림 IV-5-(b)). 학생들은 이 그래프에 대해서는 수평선인 경우 ‘가만히 있어(9행)’, ‘똑같은 속도(12행)’, ‘다시 이렇게 [CBR쪽으로] 오는거지 (13행)’와 같이 변인 간의 관계를 진술할 수 있었다. CBR로 직접 그래프 구성 활동을 마친 후 학생들은 [그림 IV-6]와 같이 활동지에 움직임을 기록하였다.



[그림 IV-6] 학생들이 구성한 그래프의 변화 설명

CBR을 이용한 그래프 활동은 학생들의 사후 검사에서도 <표 IV-1>과 같은 변화가 나타났다.

<표 IV-1> CBR 활동 후 변인 간 관계 진술하기에 대한 변화

연구 참여자	사전 검사	사후 검사
A	수평선은 계속 같은 속도로 갔다.	달리는 속도가 똑같다.
B	수평선은 아무 것도 안했다.	가만히 있었다.
C	수평선은 ‘거리’ 이다.	쉬었던 시간
D	수평선은 ‘시간’ 이다.	계속 가만히 있다.

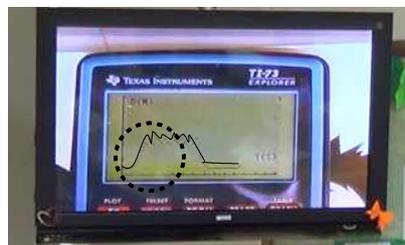
학생 A를 제외하고 학생 B, C, D는 사다리꼴 모양의 그래프를 그리면서 수평선에서 ‘가만히 있어(9행)’로 표현한 바와 같이 가만히 있거나 움직이지 않았던 시간으로 파악하였다.

3. 에피소드: 종속 변수 간 관련짓기

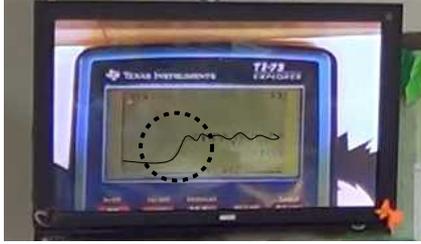
학생들은 교사와 함께 배운 내용에 대해 정리를 하는 과정에서 교사는 CBR과 연결한 TI-73 계산기를 실물화상기에 두고 두 학생이 각각 뛰거나 걷는 것을 그래프로 나타내어 전체 학생들에게 이 그래프를 보이면서 빠르기와 기울기 사이의 관계를 학생들이 찾아내도록 하였다.

- 1 교사: 자, 그래프를 잘 봐. 분명히 보성이? 보성이[그림 IV-7-(a)]가 뛰어갈 때는 한솔이[그림 IV-7-(b)]보다 그래프가 좀 더 어때?
- 2 학생: 높아져요.
- 3 교사: 뭐가? 높아져요?
- 4 학생: 선의 높이
- 5 교사: 선의 높이라... 이런 걸 뭐라고 말하면 좋을까?
- 6 학생: 경사?
- 7 교사: 어. 경사, 좋다. 경사가 높죠?
- 8 학생: 네.
- 9 교사: 그럼 누가 더 빠르다고 할 수 있나요?
- 10 학생: 보성이요. 뛰니까 더 빨라요.
- 11 교사: 그걸 경사라는 말로 이야기 해볼래?
- 12 학생: 보성이가 빨라서 경사가 높아요.

(a)



(b)



[그림 IV-7] 더 빠른 속도로 움직이는 구간

먼저 교사는 펠 때와 걸어갈 때 나타난 그래프의 차이를 발표시켰으며(1, 3행), 학생들은 선의 높이(2, 4행)가 서로 다르다고 이야기를 했다. 학생들의 생각을 좀 더 정교하고 구체화하기 위해 교사의 발문이 다시 이루어졌고(5행), 학생들은 경사라는 말로(6행) 수정하게 되었다. 이와 같이 움직임을 그래프로 나타내고, 나타난 그래프를 비교하면서 움직임을 빠르기와 경사(기울기)의 관계를 관련지을 수 있었다(9, 10, 11, 12행).

CBR을 이용한 그래프 활동은 사후 검사에서 <표 IV-2>와 같이 종속변수 간의 관련짓기에 변화가 나타났다.

<표 IV-1> CBR 활동 후 종속변수 간 관련짓기에 대한 변화

연구 참여자	사전 검사	사후 검사
A	정답 맞으나 이유가 불분명(명수는 일직선, 재석은 대각선)	정답과 이유가 분명(더 경사지고 높아서)
B	정답만 맞음	이유 제시(경사가 높아서)
C	정답 맞으나 이유가 불분명(빨리 도착)	이유 제시(차이나고 선이 높아서)
D	정답만 맞음	물음표로 제시

학생 D를 제외하고 학생 A, B는 속도가 빠른

구간을 경사가 높고 낮음으로 판단하였다. 그러나 학생 C는 수업 시간에 교사와 학생 사이에 이루어졌던 상호작용과 같이 선의 위치가 상대적으로 높은 곳에 배치되어 있다는 의미인지 경사가 높은 것인지 불분명한 이유를 제시하고 있었다.

V. 결론

본 연구는 초등학교 5학년 수학 영재 학급의 학생을 대상으로 CBR을 활용한 그래프 활동이 그래프 해석에 어떤 영향을 미치는지 살펴보았다. 연구 결과로부터 얻은 결론과 시사점은 다음과 같다.

첫째, CBR을 활용한 그래프 활동은 학생들이 질적인 접근과 양적인 접근을 동시에 가능하게 해주었다. CBR을 활용한 그래프 활동은 문헌 고찰에 따라 질적이며 광의적인 접근 방식으로 수업이 설계되었으며 그래프가 나타나는 현상을 직접 경험할 수 있도록 하였다. 그러나 연구 결과에 따르면 그래프의 변화를 파악하는 과정에서 CBR을 활용한 후 학생들은 그래프의 전체적인 경향(질적 접근) 뿐만 아니라 한 점의 근방에서 증가와 감소, 빠르기와 같은 그래프의 변화를 이해(양적 접근)할 수 있었다. 이것은 비록 수업 설계가 질적이고 광의적인 접근으로 구성되었지만 CBR을 이용하여 자신의 움직임에 대한 경험을 설명하고 상대방에게 전달하기 위해서는 단위, 위치, 거리 등의 기호에 관한 양적인 측면에서 구체적으로 표현할 필요가 있었기 때문으로 보인다.

둘째, CBR을 활용한 그래프 활동은 과학 교과에서 요구하는 그래프 해석하는 능력을 향상시킬 수 있을 것이다. 2009 개정 과학과 교육과정에 따른 5학년 과학 교과서에는 ‘속력’, ‘물체의

빠르기'와 그래프'를 다루고 있다. 실제 이 단원에서 실험을 통해 얻은 자료를 분석하고 그 변수들 사이의 관련성을 예측하며 물체의 빠르기를 그래프에 나타내거나 물체의 속력과 기울기 사이의 관계를 파악하게 되어 있다. 따라서 CBR을 활용한 그래프 활동은 본격적으로 함수를 다루기 전 실제 학습자의 경험에 의한 그래프 해석을 통해 수학 교육에서 강조하고 있는 그래프 능력뿐만 아니라 과학 개념 습득과 그래프와 관련한 탐구 능력에도 긍정적인 영향을 줄 것이라 여겨진다.

셋째, CBR은 대수적인 함수와 그래프를 배우기 전 그래프에 대한 변화를 경험을 제공해줄 수 있어 초등학생에게 적합한 도구로 보인다. 손원옥(2003)에 따르면 CBR과 유사한 실시간 데이터 수집 장치인 CBL 수업을 한 실험반에서 구체적 조작기 학생들의 그래프 능력 변화가 유의미한 향상이 있었다고 한다. 그는 형식적 조작기의 학생들은 이미 과학 개념과 표상 사이의 연결 능력이 있으나, 이 능력이 부족한 구체적 조작기의 학생들에게는 실시간으로 그려지는 CBL 시스템의 그래프가 개념과 그래프 표상 사이의 연결을 도와준다고 보았다. Hogan(2001)도 CBR은 즉각적인 피드백과 사용의 편의성으로 인해 초등학생에게 사용이 적합하다고 주장한 바 있다. 이처럼 구체적 조작기인 초등학생에게 CBR을 이용한 그래프 활동을 적용한다면 기초적인 함수 개념의 운동학적 기하학적 측면을 경험하게 되고 시각적인 부분이 강화될 것이다.

본 연구에서는 그래프 해석에 대한 유사한 오류를 범하는 초등학교 5학년 수학 영재 학생 4명을 대상으로 CBR을 활용한 그래프 활동이 그래프 능력에 미치는 효과를 분석하였다. 그러나 2차시라는 연구 기간과 영재 학생이라는 연구 대상은 연구 결과를 일반화하기에 제한점이 있다. 또한 영재 학생 20명 중 유사한 오류를 가진

학생 4명을 대상으로 관찰하였기 때문에 그래프 해석에 대한 다른 오류를 가진 학생에 대해서는 새로운 양상이 관찰될 수 있으므로 이에 대한 후속 연구도 필요할 것으로 본다.

참 고 문 헌

- 손원옥(2003). **CBL 수업이 중학생들의 그래프 능력에 미치는 영향**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.
- 송정화, 권오남(2002). 6차와 7차 교과서 분석을 통한 그래프 지도 방안. **학교수학**, 4(2), 161-192.
- 송정화, 이종희(2007). 그래프에서 교사와 학생의 의미 구성에 관한 사례연구. **학교수학**, 9(3), 375-396.
- 우정호(2001). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.
- 유현주(2013). 2007 개정 초등수학교육과정에 따른 통계영역 교과서 분석: 그래프 지도를 중심으로. **초등연구교육**, 24(1), 81-97.
- 정영옥(1997). **Freudenthal의 수학적 학습-지도론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
- 조아영, 이광호, 최성택(2014). 초등학교 6학년 학생들의 그래프 해석 및 지도 방안. **초등수학교육**, 7(2), 113-125.
- 이현수, 박종률, 이광호(2009). 그래핑 계산기와 CBL을 활용한 1차 함수 탐구: 초등 영재아를 중심으로 한 사례연구. **학교수학**, 12(3), 347-364.
- Ellen, C. J. (1998). *Discovering mathematics with the TI-73: Activities for grades 7 and 8*. Texas Instruments.
- Fiona, T. (2003). *The calculator based ranger and students' understanding of motion graphs and functions*. Unpublished Doctoral Dissertation,

- University of Florida.
- Goldberg, F. M., & Anderson, J. H. (1989). Student difficulties with graphical representations of negative values of velocity. *The Physics Teacher*, 27, 254-260.
- Hogan, K. D. (2001). Learning in motion. *Focus*, 8(4), 40-42.
- Krabbendam, H. (1982). The non-quantitative way of describing of relations and the role of graphs: Some experiments. In G. Van Barneveld, & H. Krabbendam (Eds.), *Proceedings of the conference on functions* (pp. 125-146). The Netherlands: National Institute for Curriculum.
- Kwon, O. N. (2002). *The effect of calculator-based ranger activities on students' graphing ability*. Retrieved from <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1949-8594.2002.tb17895.x/abstract>
- Lapp, D. A., & Cyrus, V. F. (2000). Using data collection devices to enhance student understanding. *Mathematics Teacher*, 93(6), 504-510.
- Mevarech, Z. R., & Kramarsky, B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: Stability and change in students conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 229-263.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Roth, W. M., & Bowen, G. M. (2001). Professionals read graphs: A semiotic analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 159-194.
- Shah, P., & Hoeffner, J. (2002). Review of graph comprehension research: Implications for instruction. *Educational Psychology Review*, 14(1), 47-69.
- Skalsky, N., & Pastel, R. (2004). *Transportable research instrument: A PDA based laboratory for science experiments*. Retrieved from <http://www.cs.mtu.edu/~rpastel/Research/Documents/WMTE04SkalskyPastel.pdf>
- Stylianou, D. A., Smith, B., & Kaput, J. J. (2005). *Math in motion: Using CBRs to enact functions*. Retrieved from <https://tituscuin6397.files.wordpress.com/2007/08/math-in-motion-using-cbrs-to-enact-functions.pdf>
- Texas Instruments (1997). *Getting started with the CBR*. Retrieved from <http://education.ti.com>

The Study of the Graph Activity of Gifted Elementary Students Using CBR

Kang, Young Ran (Hyoja Elementary School)

Cho, Cheong Soo (Yeungnam University)

This study has analyzed the effect of graph activity using CBR on the graphic ability through the observation on the 4 math-gifted 5th grade students. The study had designed the graph activity class using CBR based on the theories of graph and progressed it twice for 40 minutes, respectively. The recorded videos of the classes and the interviews of students were collected for analyzing the data, and 2 weeks later, post inspection using the same questionnaire was held for the comparative analysis on the errors that the students had made in the interpretation of the graph. According to the results of this study, the students were able to understand the flow change of the graph, interpret the relationship between variables, and contextualize the dependent variables.

* Key Words : Gifted Elementary Student(수학 영재), Graphic activity(그래프 활동), CBR(실시간 자료 수집 장치)

논문접수 : 2015. 2. 8

논문수정 : 2015. 3. 2

심사완료 : 2015. 3. 4