대한수학교육학회지 <학교수학> 제 17 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 17, No. 1, 19 ~ 33. Mar 2015

CAS 공학을 사용한 합성함수 수업에서 나타난 수학적 표상 전환 과정에 대한 분석1)

이 유 빈* · 조 정 수**

본 연구는 일반계 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 컴퓨터 대수시스템(Computer Algebra Systems, CAS), 즉 CAS 공학을 사용한 수학수업을 교사의 표상 전환 중심으로 살펴보았다. 이 수업에서 수학교과 내용별로 어떤 표상 전환이 일어났는지를 한 달 진행된 CAS 공학을 사용한 15차시 수업 중 합성함수의 개념 도입부분에 해당하는 두 차시의 수학 수업을 중심으로 분석하였다. 특히 Lesh, Behr, & Post(1987)의 투명 표상과 불투명 표상 사이의 전환과 Kosslyn(1994)의 설명 표상과 묘사 표상 사이의 전환을 중심으로 살펴보았다. 본 연구의 결과 CAS 공학은 일반계 고등학교 수학 수업에서 표상 전환을 도와주었으며 교사 개인의 표상을 만들어내는 기회를 제공하였다. 그러나 표상 전환의 기회가 모두 교수-학습의 목적에 맞게 사용되지는 않았다. 이러한 결과는 수학 수업에서 CAS 공학에 의한 표상 전환의 새로운 역할의 중요성과 교사 역할의 중요성을 재고하는 기회를 제공할 것으로 기대된다.

Ⅰ. 서 론

수십 년 동안 수학교육 연구에서 표상은 지식과 이해의 상호작용을 돕는 유용한 도구로 생각해 왔다. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000)에서는 표상을 다섯 가지 과정 규준의 하나로 규정하면서 수학적 아이디어를 조직, 기록하며 그것들 사이에 상호작용을 돕기 위해 표상을 사용하고 만드는 활동과 문제를 해결하기 위해 수학적 표상을 선택, 적용, 변환하는 활동을 권장하고 있다. 표상이라는 주제는 수학교육에서 더 이상 새로운 주제가 아니다. 그리고 지난 20년 동안 표상 체계내에서 표상들 사이의 번역과 변환에 대한 많은 연구가 있었다(Núria & Guida, 2009). 예를 들어 Sfard(1992)는 함수의 그래프 표상과 대수의 기호 표상 사이의 연결을 하는 능력과 이해하는 능력은 학생들이 함수 개념을 이해하는데 영향을 준다고 하였다. Lesh, Behr, & Post(1987)는 같은 개념을 나타내는 다양한 표상들 사이의 유연하게 이동하는 능력은 수학 수업의 목표이며 개념적 이해를 확인하는 수단이 된다고 하였다. 마찬가지로, Even(1998)은 여러 표상에 대한 지식은 개념과 개념 이면에 있는 지식과 밀접하게 관련이 있으므로 학생들이 가지고 있는 개념 이면의 지식은 표상을 통해 추측할 수 있다고 하였다.

수학이라는 영역의 본질은 디지털 공학의 새로운 개발과 밀접한 관련을 가지고 있다. 학생의 측면에서 살펴보면 이러한 공학은 학생이 수학

* 영남대학교 대학원, missbeen@naver.com (제1 저자)
** 영남대학교, chocs@yu.ac.kr (교신저자)
1) 이 연구는 2011년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

적 아이디어와 절차를 활용하고 사용하는 것을 이해하는데 도움을 줄 수 있다(Muis, Stephen, & James, 2008). 공학과 교사와 관련하여 Goldenberg (2003)는 공학이 수학 교실에 도입됨으로써 교사는 전통적인 수학과 관련된 학습 내용에 대해 공학적 관점에서 살펴보고 이들 학습 내용에서 무엇을 버릴지에 대해 생각해 보아야 한다고 하였다. 또 컴퓨터 대수시스템, 즉 CAS 공학은 교사와 학생의 사고를 대신 해주는 마법이 아니라 수학을 좀 더 깊이 있게 탐구할 수 있도록 도와준다(McCallum, 2003).

우리나라에서도 이러한 공학을 수학교육에 반영하여 '2007년 개정 수학과 교육과정'과 '2009년 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정'의 교수-학습 방법에서, 수학수업의 목표가 학생들의 계산능력 숙달이나 향상이 아니라 복잡한 계산이나 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 그리고 문제해결 능력의 향상을 목표로 하는 경우에는 계산기를 포함한 공학 도구를 활용하여 수업을 할 수 있다고 명시하고 있다(교육인적자원부, 2007; 교육과학기술부, 2011).

이에 본 연구는 학생들의 수학 개념 이해의 한 가지 측도가 되는 표상 전환이 CAS 공학을 사용한 수업에서 어떻게 나타나는지를 알아보고자 한다. 특히 본 연구에서는 Lesh, Behr, & Post(1987)의 투명 표상과 불투명 표상 사이의 전환과 Kosslyn(1994)의 설명 표상과 묘사 표상 사이의 전환을 중심으로 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. CAS와 수학교육

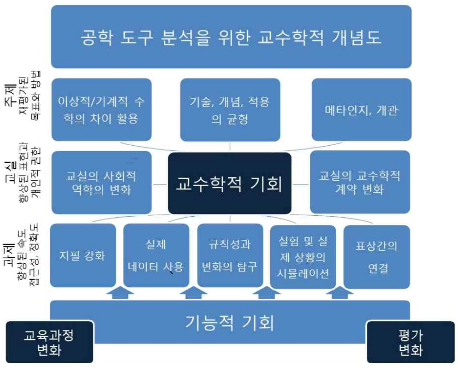
가. CAS 사용의 역사

수학교육에서 공학의 사용이 어떻게 변화되어 왔는지 역사적으로 살펴보면 크게 3가지 유형으로 살펴볼 수 있다(Heid, Thomas, & Zbiek, 2013). 첫 번째는 공학 자체의 유형과 두 번째는 공학의 사용하는 방법, 마지막으로 공학과 관련된 교수 학습에 관한 연구와 이론이다. 이러한 변화들은 서로 상호의존적인 관계에 있다. 예를 들어 공학 사용에 있어서의 제한은 공학의 유형의 제한과 관련되고 교수학습에서의 제한은 사용에 있어서의 제한과 관련이 있다. 예를 들어 CAS의 초기 사용에서는 CAS가 만들어진 플랫폼에 의해 모든 교수활동이 제한을 받았다. 초기 버전은 단지 기호 조작 프로그램의 구성으로만 되어 있었다. 이후 CAS의 플랫폼의 변화로 인해 수학교육에서 공학을 사용한 연구가 늘어갔다. 또 이는 교육과정과 교수법의 영역에서 변화를 이끌어냈다. 교육과정과 교수법의 변화는 CAS의 연구에 반영되었으며 공학의 사용과 관련된 이론의 발달에 가속도를 붙이게 되었다. 이렇게 만들어진 이론들에서는 학생들이 CAS를 사용하는 방법을 설명하고 교사, 학생, CAS 사이의 관계를 설명하는 또 다른 이론을 만들어내었다. 최근에는 Texas Instruments의 TI-Nspire Navigator의 발전으로 수학 교실에서 무선인터넷에 의한 교사-학생-CAS 공학의 의사소통 방식과 흐름, 유형 등에 그 관심이 옮겨지고 있다.

나. CAS와 교수학적 기회

공학의 역사를 통해 학교 수학 교실에서 그 역할을 살펴보면 CAS는 교수와 학습에 새로운 기회를 제공해 주었으며 그 결과로 인해 학생들에게 수학적 수행에서 뿐만 아니라 수학적 내용의 깊이와 본질에도 영향을 주었다. 이와 관련하여 Pierce, Stacey, & Wander(2010)는 CAS의 도입에 따라 수학 교실에서 형성되는 '교수학적

기회(pedagogical opportunity)'를 [그림 1]과 같이 제시하고 있다.



[그림 Ⅱ-1] Pierce, Stacey, & Wander(2010, p.686)의 CAS가 제공하는 교수학적 기회

위의 그림을 바탕으로 CAS가 수학 교실에 미친 영향을 살펴보면, 우선 CAS의 사용으로 기호적 절차를 빠르고 정확하게 수행할 수 있어 학생들은 확장된 범위에서 과제를 다룰 수 있는 기회를 제공해 준다. 또 CAS의 기호 조작의 능력은 공학의 도움 없이는 불가능한 여러 수학적 아이디어를 다양한 방법으로 탐구 가능하게 해준다. 그리고 이러한 새로운 교수학적 기회는 수학적 변인에 대한 탐구, 역동적 표상사이의 활발한 연결, 실제 데이터의 사용, 실험 및 시뮬레이션 활동, 수학적 관계의 탐구를 서로 연결하게 해준다.

학교 교실에서 CAS의 도입은 과제뿐만 아니라 학생들과 교사의 상호작용에도 변화를 준다. 학생에게 CAS라는 도구를 주어졌을 때 수업의 주체는 학생으로 옮겨지게 되며 교사, 학생, 과제와 함께 공학까지 포함한 새롭게 정의된 관계에서 교사와 학생은 수업에 참여하게 된다. 그리고 이러한 교수학적 기회를 통해 학생과 교사는 좀 더 넓은 수학적 측면을 다룰 수 있게 된다.

다. CAS 역할

CAS의 역사를 바탕으로 CAS가 가장 큰 영향을 준 수학적 내용 부분을 살펴보면 수학적 개념, 구조, 추론의 3가지 영역이라고 할 수 있다 (Heid, Thomas, & Zbiek, 2013).

수학에서 대표적인 개념의 예로는 변수, 함수, 식, 방정식 등이 있다. CAS는 종종 이러한 각 개념들을 좀 더 깊은 방법으로 배울 수 있는 기회를 제공한다. 그리고 개념의 깊은 이해를 돕는 대표적인 방법은 이들 개념이 다른 표상과 어떠한 관계가 있는지에 대한 고려를 통해서이다 (Heid, Thomas, & Zbiek, 2013).

Duval(2006)은 수학적 개념의 이해는 표상들 사이의 전환 활동을 통해서 이루어지며 여기에 CAS는 이러한 표상 전환을 경험하는데 중요한 역할을 한다고 하였다.

CAS는 우리가 흔히 알고 있는 수학적 규칙이나 공리가 더 이상 적용되지 않는 또 다른 새로운 수학적 구조를 만들어 볼 수 있는 기회도 제공해 준다. 예를 들어 수의 곱셈에 대한 교환법칙은 행렬에는 적용되지 않는다는 것을 확인하여 행렬에 대한 새로운 구조를 만들어내는 활동을 CAS 공학이 지원해 준다(Heid, Thomas, & Zbiek, 2013).

CAS는 또한 드러난 구조와 수학적인 논증의 결과를 형식화, 일반화로 표현하고 이해를 향상시키는 도구가 될 수 있다(Arcavi, 1994). 여기서 논증을 형식화 하는데 있어 CAS는 학생들이 추론을 하는 대상을 표현하게 하고 그리고 그들의 추론한 결과의 적용을 돕는 도구의 역할을 한다. Zbiek & Heid(2001)는 CAS를 사용하여 표상들 사이의 역동적인 변화와 그 결과들에 대한 추론과 관련된 연구에서 CAS 환경은 학생들에게 변수가 다양한 값을 가지게 되는 경우를 경험하도록 함으로써 그러한 결과가 나타난 이유에 대해 추론을 하게 한다고 하였다. 즉 CAS 환경의 수학 교실은 지필 환경의 수학 교실에서는 다루지

못하는 중요한 수학적 추론 활동을 학생들이 반드시 경함하도록 하는 혜택을 소유하고 있다.

2. 표상

가. 표상 정의

Olson & Campbell(1993)에 의하면 우리는 일상적인 대화에서 '표상'을 다양한 경우에 사용한다고 한다. 예를 들면, 비둘기가 먹이라고 착각하고 쪼아대는 붉은 색깔의 점을 먹이의 표상이라고 칭하기도 하며, 아이들의 낱말 그림책에 실려있는 동물이나 사물의 그림을 표상이라고 하기도 한다. Werner& Kaplan(1964)는 표상을 설명하는데 있어 실체에 관련된 외적인 표시나 기호를 논하기보다는 실체에 관한 인간의 내적인 이해를 부각시켰다. 그에 따르면, 표상은 구체적인 실체와 관련된 추상적인 개념이다. 쉽게 말해 어떤 사람의 생각 속에 A라는 실체가 '무엇'으로 전환되어 자리 잡혀 있을 때, 그 무엇이 바로 표상이다. 내적인 지식을 표상의 중심 개념으로 삼고 있는 Werner & Kaplan의 견해와 Olson & Campbell과 같이 일상에서 보이는 사물이나 그림을 표상으로 보는 견해에 대한 혼돈과 의문을 Mandler(1983)는 두 가지의 의미로 사용되는 표상에 대해 언급하였다. 그에 따르면 학자들 사이에서 표상이라는 용어는 두 가지의 의미로 사용되어 왔다고 한다. 그 중 하나인 전통적인 관점에서는 개인이 자신의 지식 세계나 느낌, 견해 등을 외적으로 표현한 산물을 표상으로 보는 것으로 그림, 조각, 말, 글 등이 그 예가 된다. 한편 좀 더 최근에 형성된 관점에서는 지식 또는 지식이 조직되는 방식을 표상으로 본다. 다시 말하면, 표상은 개인이 무엇에 대해 알고 있는 것이며, 더 나아가서 내적으로 형성하고 있는 세계이다. 표상 연구에 큰 영향을 준 Piaget(1962)는 표상을 이러한 두 가지 의미를 모두 사용하였다. 즉 지식을 의미할 경우에 표상의 의미는 사고와 동일하며, 이러한 표상을 "개념적 표상(conceptual representation)"이라고 칭하였다. 한편, 좁은 의미로서 표상은 상징화를 의미하는 것으로, 기호나 모형 등 외형화 된 표현물을 보고 관련된 실물이나 상황을 떠올릴 수 있는 능력을 의미한다. Piaget은 이러한 표상을 "상징적 표상(symbolic representation)"이라고 하였다.

이와 같이 표상에 대하여 두 가지 개념이 존재하여 왔다는 사실을 알고 나면 최근 표상 연구자들이 제시하는 표상에 대한 정의나 설명을 이해하는 일은 좀 더 수월해진다. 표상에 관한 사전적인 해석들을 종합하여 표상을 정의한 Paivio(1986)에 의하면, 표상이란 어떤 실체를 뒤따라 "마음에 떠올려진 것"이다. 그리고 이 정의에 따라 표상을 세 종류로 구분하여 첫째, 개인의 마음에 그려진 내적인 이미지나 묘사이고, 둘째, 그러한 것이 겉으로 표현된 초상, 그림, 조각 등이며, 마지막으로 해당 실물의 형상과는 상관없이 그것을 표시하기 위하여 인위적으로 만들어 낸 기호나 상징이다. Goldin(2002)은 표상은 어떤 것을 나타내는 형상(configuration)이라고 하였다. 예를 들어 기호와 그림, 글, 그래픽, 수와 도형은 모두 수학적 개념의 외적표상이다. 이러한 표상은 표상 그 자체로는 이해될 수 없으며 그 표상이 사용된 맥락에 대한 더 넓은 표상체계 내에서 이해될 수 있다. 다시 말해 표상은 보이는 것을 그대로 복사해 놓은 것이 아니라 표상 사용자의 상황에 대한 목적에 맞게 만들어 내거나 표상체계 내에서 만들어진 것으로 과정이면서 동시에 결과물이다.

나. 표상 역할

일반적으로 표상은 수학적 대상을 조작하는

도구로 사용된다. Skemp(1986)는 개인에게 조작할 표상이 있다는 것은 수학적 대상이 가지는 의미와는 별개로 작동적인 조작을 할 대상이 있다는 것이다. 그리고 표상을 조작한 다음 그 결과의 해석은 그 이후에 진행되기 때문에 조작하는 동안에는 오직 수학적 대상만을 다룰 수 있게 한다. Skemp의 이 말에 따르면, 수학 교실에서 학생들이 표상을 하지 못하면 그에 해당하는 수학적 대상을 조작할 수 있는 도구가 없다는 의미로 해석된다.

의사소통도 표상이 가지는 중요한 역할 중에 하나이다. 의사소통의 도구로 표상은 두 가지 목적을 가지고 있다. 첫째는 개별 학생과 수학적 아이디어 사이의 의사소통을 도와주는 것이며, 둘째는 학생 개인들 사이의 수학적 아이디어에 관한 의사소통에 도움을 주는 것이다. 그러나 위에서 언급한 의사소통으로 얻어진 표상을 수학적 기호로 연결할 때 비로소 표상의 효과적 사용이라고 할 수 있다. 여기서 수학적 기호의 연결에는 두 가지 유형으로 이루어진다. 하나는 학생이 좀 더 효과적으로 의사소통하기 위해 수학적 기호를 사용하는 것이고, 또 다른 유형은 학생이 기호로 나타낸 수학적 아이디어를 깨닫고 해석하는 것이다(Kaput, 1991; Skemp, 1986).

수학적 대상에 대한 활동인 표상 활동은 수학적 대상에 대한 정신적인 대상을 구성하는 활동이다(Dubinsky, 1991; Sfard, 1991). 또 그 과정에서 표상을 적절하게 선택함으로 추상화와 일반화가 가능하게 한다. 이와 관련하여 Kaput(1991)은 추상적인 수학적 개념은 표상 체계와 깊은 관련이 있다고 하였다. 수학에서 표상은 수학적 사고와 통찰을 얻는 도구이다(Diezmann & English, 2001; Kaput, 1987). 또 많은 연구에서 학생들이 사용하는 표상과 그들의 이해에는 관련이 있다고 하였다(Friedlander & Tabach, 2001; Lamon, 2001). 여기서 이해란 문제 상황에 적절한 표상을 선택하고 다양한 표상을 적용하는 능력이다. Janvier(1987)는 이해라는 것은 표상들의 질을 높이는 능력이며 표상 활동의 누적된 과정이라고 설명하였다.

다. 표상 종류

Lesh, Behr, & Post(1987)은 표상을 크게 투명 표상(transparent representations)과 불투명 표상(opaque representations)으로 구별하였다. 투명 표상은 수학적 아이디어나 구조만을 드러낸 표상이다. 불투명 표상은 아이디어나 구조의 특정한 부분을 강조하고 다른 것들은 덜 강조한 표상이다. Meira(1998)는 교수학적 도구로 이들 표상을 구별하였는데, 표상의 투명성은 그 자체로 표상의 특성이 아니라 특별한 교수 활동에서 사용의 특성이라고 설명하였다. 그리고 그는 수업에서 표상의 투명성을 강조하는 것은 학생들의 학습에 도움이 된다고 하였다.

Lesh, Behr, & Post의 투명 표상과 불투명 표상을 사용하여 Zazkis & Gadowsky(2001)는 수에 관한 표상에서 이 두 표상을 구분하였다. 예를 들어 784를 28^2으로 나타내는 것은 784가 완전제곱수라는 개념은 잘 드러내지만 98로 나누어진다는 것은 덜 강조한다. 즉 위의 표상에서 784는 완전제곱수라는 개념에 있어서는 투명한데 98로 나누어떨어진다는 성질에 대해서는 불투명하다. 또 784가 $13\times60+4$로 표현되면 13으로 나누었을 때 나머지가 4라는 것은 투명하지만 완전제곱수라는 사실은 불투명하게 되는 것이다. 그리고 그들은 수학적 개념을 획득하는데 있어 투명 표상의 부족은 수학적 개념의 이해와 형성에 장애가 된다고 하였다. 이와 유사하게 개념들 사이의 연결을 표상으로 정의하고 있는 Skemp(1986)도 수학적 개념과 관련된 표상의 부족은 표상을 활용하여 의사결정을 하는데 장애가 된

다고 하였다.

표상에 대한 많은 분류에도 불구하고 Kosslyn (1994)은 서술과 묘사라는 기본적인 형태에 따라 두 가지 표상을 제시하였다. 서술 표상(descriptive representations)은 개념을 표현할 때 상징을 사용하여 나타내는 표상을 말한다. 예를 들어 $V=s^3$(정육면체의 한 변과 부피와의 관계)과 같은 대수식이나 물리적 공식 $F=m\times a$(뉴턴의 제2법칙에 따라 힘과 질량과 가속도 사이의 관계)는 서술 표상이다. 즉 서술 표상은 그것들의 나타내고자 하는 대상과는 별개의 기호인 상징으로 만들어진다. 반대로 묘사는 공간적인 배열을 말하는 것으로, 예를 들어 좌표 평면에서 점의 집합과 같은 것들이다. 사진, 드로잉, 지도와 같은 그림 등은 대표적인 묘사 표상(depictive representations)들이다. 또 건물의 미니어쳐 모델이나 직선의 그래프 등도 묘사 표상에 해당된다. 이들 묘사 표상의 공통점은 아이콘으로 구성되어 있으며 이 아이콘 기호는 그들이 나타내고자 하는 대상의 유사성이나 다른 구조적 동일성과 관련이 되어있다

묘사 표상과 서술 표상은 목적에 따라 다르게 사용된다. 서술 표상은 비교적 일반화와 추상화에 사용되는 반면, 묘사 표상은 좀 더 구체적이고 세부적인 곳에 사용된다. 그러므로 서술 표상이 묘사 표상보다 좀 더 표상 측면에서 강하다고 할 수 있다. 예를 들어 '애완견 출입금지' 혹은 '고혈압은 니코틴 혹은 운동 부족으로 야기될 수 있다.'와 같이 일반적인 부정적 표현하는데 서술 표상은 문제가 없다. 반대로 이런 경우에 대해 묘사 표상은 단지 구체적인 특정한 동물에 부정만을 표현할 수 있으며 그 특정 동물의 아이콘이나 사진으로만 나타낼 수 있다. 그러므로 서술 표상은 수학의 일반적이며 추상적인 지식을 표현하는데 좀 더 유용하며, 특히 대상을 특징화하고 높은 수준의 추상화, 사건에 대한 설명이나 예측, 인지적 과정과 개인적 주의를 이끌어내는데 유용하다. 그와 반대로 묘사 표상은 대상의 모습을 마음속에 구체적으로 형상화하는 작용을 하므로 수학적 개념의 이해와 추론, 다른 사람과의 수학적 의사소통에 유용하다(Verschaffel, Corte, Jong, & Elen, 2010).

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

본 연구는 인문계 고등학교 1학년을 대상으로 CAS 공학을 사용하는 합성함수에 대한 수업의 비디오 관찰을 통해 교사 중심으로 일어나는 표상 전환 과정을 알아보고자 한다. 이를 위해 다음과 같은 방법과 절차에 의해 본 연구를 진행하였다.

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 대구광역시 소재 D고등학교 1학년 학생 30명과 수학교사 1명이다. 이 학교 학부모의 경제적인 수준은 중산층 이하이다. 그러나 학급의 약 50%정도의 학생들이 수학교과에 대한 사교육을 받고 있다. 본 연구의 수업을 진행한 교사는 9년의 경력을 가지고 있는 남자 교사이다. 이 기간 이 교사는 CAS 계산기에 대한 교사연구 모임에 참여하여 CAS 공학의 수학 교실 통합에 대해 연구함으로써, CAS 계산기를 수학 단원별로 학년별로 선택적으로 사용하여 왔으며 본 연구에서도 선택적으로 사용하였다. 연구에 사용한 계산기 종류는 TI-nspire CAS이며 모든 학생들에게 각자 한 대씩 계산기를 가지고서 수업에 참여할 수 있도록 하였다. 본 연구에서 관찰한 수업은 수학교과전용교실에서 진행되었다. 그리고 수업에 참여한 학생들은 이 고등학교의 1학년 14학급에서 1학기 수학 시험 성적이

하위권인 학생들만으로 구성하여 새로 편성된 네 개 학급의 학생들이다.

2. 자료 수집 방법 및 절차

2012년 8월 24일 ~ 9월 24일 사이에 진행된 CAS를 사용한 수학수업 15차시 중에 표상 활동이 가장 활발히 일어났다고 판단된 처음 두 개 차시를 중심으로 분석하였다. 자료 수집을 위해 수업 참여 교사에게 대단원 전체에 대한 수업 활동의 맥락을 파악하고자 전체 15차시의 비디오 녹화를 부탁했다. 이 비디오 녹화는 수학 교과교실에 설치된 비디오카메라로 교사와 칠판에 초점을 맞추어 이루어졌다. 따라서 연구자가 따로 비디오 장비를 설치하지는 않았다. 또한 연구자는 이 수업을 참관하지 않았으며 녹화된 동영상을 분석하는 것이 본 연구자의 역할이었다. 이 두 개 차시는 합성함수의 개념에 대한 설명과 예시를 중심으로 수업 활동이 진행됨으로써 개념 형성을 위한 다양한 표상 활동과 표상 전환 활동이 CAS 계산기를 매개로 일어났다. 또 수학 교과 교실에 설치된 비디오카메라 중 교사와 칠판을 중심으로 촬영된 동영상을 중심으로 자료를 분석하였다. 그리고 본 연구의 수업에 사용된 문제와 내용은 교과서의 내용을 바탕으로 하였으며 교과서는 (주)지학사에서 출판한 고등학교 수학 교과서를 사용하였다.

3. 공학 도구

본 연구에서 학생들의 표상 전환에 도움을 줄 수 있는 공학 도구로 휴대용(handheld) CAS형 그래핑 계산기인 Texas Instrument의 TI-nspire CAS를 사용하였다. 이 도구는 교사의 계산기 화면과 계산기 버튼을 수학 교과교실의 TV화면으로 학생들이 볼 수 있어 하반이라고 하더라도 버튼을 누르는데 어려움은 없으며 수업을 진행하는데도 용이한 계산기이다.

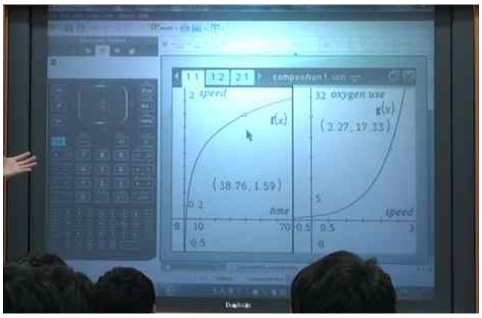
Ⅳ. 연구 결과

1. 수업의 도입에 사용된 묘사 표상

서술 표상이 상징을 사용하여 나타내는 것과는 반대로 묘사 표상은 표와 그래프를 사용하여 개념의 특정한 예를 표현한 표상이다. 그리고 묘사 표상은 서술 표상보다 수학적 개념을 도입할 때 개념의 이해에 더 유용하다(Verschaffel, Corte, Jong, & Elen, 2010). 본 연구에 참여한 교사는 합성함수의 개념을 학생들에게 도입하기 위해 합성함수의 개념이 포함된 예시의 묘사 표상을 학생들에게 제시하였다. 이 묘사 표상은 두 개의 함수의 그래프를 역동적으로 나타내고 있으며 이는 CAS를 사용하여 만들어졌다. 교사는 앞의 묘사 표상을 통해 얻은 결과를 다시 칠판에 벤다이어그램을 이용하여 다시 나타내었다. 다시 말해 함수의 그래프로부터 얻은 결과를 칠판에 대응이라는 또 다른 묘사 표상을 만들어 학생들에게 합성함수의 개념을 도입하고 있다.

에피소드 1 - 묘사 표상인 그래프 표상

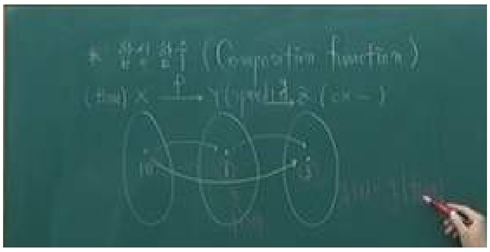
교사 : 다음의 두 개의 함수의 그래프를 살펴보세요. 이것은 무엇을 나타낸 그래프인가요?
학생 : 선수의 속도와 속도마다 선수가 사용한 산소소비량이요.
교사 : 맞습니다. 그럼 이 두 그래프를 관련지어 설명해봅시다.
학생 : 속도가 늘어날수록 산소가 많이 쓰입니다.
교사 : 여러분들이 생각하는데 도움을 주기 위해 제가 그래프 위에 점을 찍어 볼게요. 이 좌표가 의미하는 것은 무엇일까요?
(2012/8/27 녹취록)



[그림 Ⅳ-1] 수업 도입에서 사용된 묘사 표상 1

에피소드 2 - 묘사 표상인 그림 표상

교사 : 여러분들이 10초 후에 필요한 산소의 양이 3이라고 대답했는데 이것을 새로운 대응으로 한 번 만들어 봅시다.
교사 : 집합 X를 시간으로 Y를 속력으로 Z를 산소소비량으로 해봅시다. 그리고 두 함수를 f, g라고 해봅시다.
교사 : 여러분 시간이 10초 후에 산소의 소비량이 얼마라고 하였나요?
학생 : 3이요.
교사 : 아까 10에서 1로 가는 것은 시간에서 속도로 가는 함수였습니다. 그리고 1에서 3으로 가는 것은 속도에서 산소 사용량으로 가는 것이었습니다. 그런데 이렇게 보니 10에서 3으로 여러분들이 대답한 대응도 만들 수 있습니다. 이것을 두 함수의 합성함수라 합니다. (2012/8/27 녹취록)



[그림 Ⅳ-2] 수업 도입에서 사용된 묘사 표상 2

에피소드 1은 교사가 새로운 개념인 합성함수를 학생들에게 설명하기 위해 그래프 형태의 묘사 표상을 사용하고 있는 장면이다. 교사는 CAS를 이용하여 두 개의 함수의 그래프를 학생들에게 제시하였다. 이 두 함수는 서로 정의역과 치역이 맞물려 있는 함수로 지필환경에서는 보기 드문 합성함수의 한 가지 예에 해당되는 표상이다. 교사는 이 두 함수의 관계를 학생들에게 질문하고 이를 바탕으로 합성함수의 개념을 설명하고 있다. 에피소드 2는 앞에서 그래프 형태인 묘사 표상에서 얻은 결론을 다시 한 번 칠판에 벤다이어그램으로 표현하는 장면이다. 교사는 함수의 그래프를 나타내는 묘사 표상에서 한 점의 좌표를 가지고 학생들이 해석한 결과를 칠판에 다시 대응으로 표현하였다. 칠판에 표현된 대응을 나타내는 벤다이어그램은 묘사 표상이다.

본 연구의 교사는 합성함수의 개념을 도입하기 위해 두 개의 묘사 표상을 사용하였다. 그 중 두 개의 함수의 그래프를 동시에 제시하는 표상의 경우 지필환경에서는 구현하기 힘든 표상이다. 이러한 묘사 표상과 이를 다시 벤다이어그램으로 표현한 묘사 표상을 사용하여 합성함수의 개념을 학생들에게 이해시키려고 하고 있다. 그리고 이를 위해 한 점을 좌표를 이용한다. 특히 한 점의 대응을 통해 합성함수의 개념을 설명하고 있다. 합성함수는 함수를 하나의 수학적 대상으로 보고 이 두 대상 사이의 연산을 의미한다. 하지만 앞에서 교사가 제시한 두 개의 표상에는 이러한 함수를 하나의 대상으로 보는 것보다는 한 점에 초점을 두고 있다. 한 점의 대응을 나타내는 이 두 개의 표상은 그 자체로 합성함수의 개념을 드러내지는 못한다. 이에 본 연구의 교사가 수업에 도입에 사용한 두 묘사 표상은 합성함수 개념에 있어 불투명 표상이다.

2. 함숫값으로 표현된 서술 표상

묘사 표상은 학생들이 새로운 수학적 개념을

배우는데 있어 유용한 인지적 도구이다. 하지만 묘사 표상만으로는 수학적 개념 사이의 관련성을 알아내기는 힘들다. 이러한 개념 사이의 관련성은 묘사 표상에 적용된 절차를 서술적 표상으로 나타내고 이들 두 표상사이의 상호작용을 통해 획득된다(Verschaffel, Corte, Jong, & Elen, 2010). 본 연구에 참여한 교사는 합성함수라는 새로운 개념을 학생들에게 가르치기 위해 앞에서 살펴본 것처럼 두 가지 유형의 묘사 표상을 사용하였다. 그리고 난 뒤 이러한 묘사 표상에 적용된 절차를 다시 서술적 표상으로 나타내었다.

에피소드 3 - 함숫값의 서술 표상

교사 : 앞에서 나타난 결과를 함숫값으로 나타내 봅시다. 여기서 속도 1을 10에 대한 함숫값으로 나타내면 어떻게 되나요?
학생 : f(10)=1이요.
교사 : 3을 1에 대해 함숫값으로 나타내 봅시다.
학생 : g(1)=3이요
교사 : 그럼 여러분들이 10에서 3이 나온 결과를 함숫값으로 표현하면 이렇게 되네요. g(f(10))=3 이것은 10초 일 때의 속도를 그리고 속도에 대한 함숫값을 적는 표현입니다. 이것이 바로 X에서 Z로 가는 합성함수입니다. (2012/8/27 녹취록)

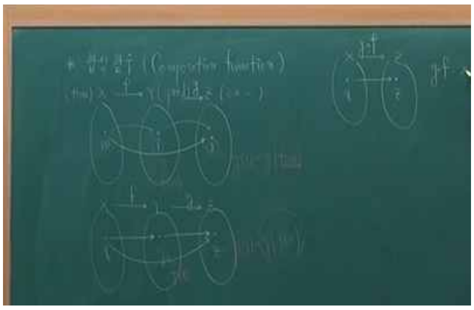
에피소드 3은 앞에서 교사가 합성함수의 개념을 도입하기 위해 사용한 묘사 표상에서 획득한 내용을 함숫값으로 표현하는 장면이다. 함숫값의 표현은 서술 표상이다. 그러나 앞의 대응을 표현한 묘사 표상과 마찬가지로 이는 한 점에 대한 대응을 단지 함숫값으로 표현한 것에 불과하다. 이에 에피소드 3에서 제시된 서술 표상도 합성함수의 개념에 대해서는 불투명 표상이다.

3. 합성함수를 나타내는 묘사 표상과 서술 표상

고등학교 교과서에 제시된 합성함수의 정의는 서술 표상이고 합성함수의 설명은 일반화된 함수의 벤다이어그램인 묘사 표상으로 제시되어 있다. 본 연구의 교사는 CAS를 사용하여 알아낸 결과를 바탕으로 교과서에 제시된 합성함수의 정의인 서술 표상과 합성함수를 설명의 묘사 표상을 만들어내는 것을 관찰할 수 있었다.

에피소드 4 - 합성함수를 나타내는 묘사 표상과 서술 표상

교사 : 이제 일반적인 함수를 가지고 합성함수를 표현해 봅시다. 집합 X, Y, Z 두 함수를 f, g라고 합시다. 이 두 함수로 새로운 함수를 만드는데 그것은 어디에서 어디로 가는 함수인가요?
학생 : X에서 Z로요.
교사 : 함숫값으로 표현해봅시다.
교사 : 새로 만든 함수는 X에서 Z로 가는 함수입니다. 새로 만든 함수의 이름을 붙이는데 그때 사용하는 기호가 $g \circ f$입니다. 읽는 방법은 g dot f입니다. 이 함수는 두 함수 f, g로 만든 합성함수라고 합니다. 그리고 Z는 g(f(x))로 표현될 수 있었습니다. 그러므로 $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$라 고 쓸 수 있습니다. 그리고 이것은 두 함수로 만들어지긴 하였지만 하나의 함수입니다. (2012/8/27 녹취록)

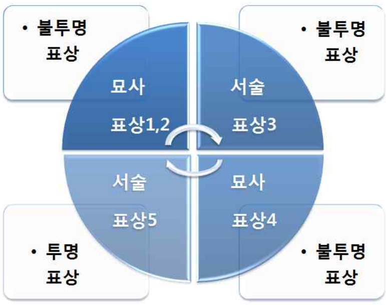


[그림 Ⅳ-3] 합성함수를 표현한 묘사 표상과 서술 표상

에피소드 4는 일반적인 함수로 합성함수의 개념을 설명하기 위해 교사는 앞의 예의 대응을 참고하여 일반적인 함수의 대응을 벤다이어그램으로 나타내고 있다. 이러한 일반적인 함수의 함숫값의 대응을 나타낸 표상은 묘사 표상이다. 그리고 이 묘사 표상은 교과서에서 제시된 묘사 표상과 일치한다. 마지막으로 교사는 이 대응을 함숫값으로 표현한다. 그리고 이 함숫값의 서술 표상을 사용하여 일반적인 함수의 합성함수의 개념을 설명하였다. 이는 교과서에 제시된 합성함수의 정의의 서술 표상과 동일하다. 교사는 이 두 가지 표상을 사용하여 특정한 예를 벗어나 합성함수에 대한 개념을 설명하고 있다. 특히 마지막에 제시된 서술 표상을 통해 교사는 함수를 하나의 수학적 대상으로 간주하고 합성함수를 함수의 관계로 설명한다. 이에 마지막에 제시된 서술 표상은 합성함수 개념에 대해 투명 표상이다.

V. 결 론

본 연구는 CAS 환경에서 고등학교 합성함수 수업에서 나타나는 표상 전환을 살펴보았다. 특히 표상 전환에서는 불투명 표상에서 투명 표상으로, 서술 표상과 묘사 표상 사이의 전환을 중심으로 살펴보았다. 본 연구의 결과를 요약하면 다음 [그림 5]와 같다.



[그림 V-1] CAS를 사용한 수업에서 표상 전환의 과정

본 연구에 참여한 교사는 [그림 5]처럼 모두 다섯 가지의 표상을 사용하여 합성함수의 개념을 학생들에게 설명하였다. 우선 수업의 도입에서는 CAS를 사용하여 수학 교과서에서 볼 수 없는 역동적이고 시각적인 묘사 표상을 제공하였다. 그리고 이 묘사 표상으로부터 얻은 결과를 바탕으로 교사는 칠판에 새로운 묘사 표상을 제시하고 이를 서술 표상으로 나타내었다. 그리고 마지막으로 교과서에 제시된 일반화된 합성함수의 정의를 제시하기 위해 묘사 표상과 서술 표상을 사용하여 학생들에게 설명하였다. 하지만 이 다섯 가지 표상들 중 합성함수 개념의 투명 표상은 교과서에 제시된 합성함수의 정의를 제시하기 위해 사용한 서술 표상에서만 나타남을 알 수 있었다.

이러한 표상 전환의 결과로부터 얻은 결론과 수학 교육에 대한 시사점은 다음 네 가지로 제시될 수 있다.

첫째, 수업의 도입에서 CAS는 교과서에서는 볼 수 없는 역동적이고 시각적인 유용한 묘사 표상을 제공해준다. 이러한 CAS의 묘사 표상의 제공 장점은 여러 연구자들의 주장에서도 볼 수 있다. 이들에 따르면 묘사 표상은 수학적 개념 학습에 유용한 인지적 도구이자 수학적 구조의 이해와 수학적 추론을 경험할 수 있게 한다고 한다. Verschaffel, Corte, Jong, & Elen(2010)은 묘사 표상은 학생들이 새로운 수학적 개념을 배우는데 있어 유용한 인지적 도구가 된다고 하였다. 또 Diezmann & English(2001)는 다이어그램과 같은 묘사 표상의 중요성을 언급하면서 다이어그램은 수학적 구조를 이해하는데 도움이 되며 다이어그램에서의 위치나 움직임을 통해 학생들은 수학적 추론을 경험할 수 있다고 하였다. Mesquita(1998)는 지필 환경에서 제시될 수 있는 수학적 표상은 제한적이고 이렇게 제한된 표상을 통한 학생들의 수학적 개념의 이해는 오류를

생성하거나, 이런 제한된 표상이 오히려 학생들에게 개념에 대한 인지적 편견의 출처가 되기도 한다고 한다. 이에 CAS는 지필 환경에서 발생할 수 있는 표상 제한을 극복하고 학생들의 수학의 개념 이해에 중요한 묘사 표상을 제공하는 유용한 도구가 됨을 본 연구를 통해 알 수 있다.

둘째, 수학 수업에서 CAS를 사용하는 교사의 표상 전환은 여전히 교과서에 제시된 표상 중심으로 일어난다. 수학 교실과 CAS의 통합에 대해 연구한 Heid, Thomas, & Zbiek(2013)에 따르면 CAS가 가진 긴 역사에도 불구하고 학교 수학에 주는 미흡한 CAS 영향력의 원인은 지필 사용 중심의 교과서에 제시된 표상을 사용하여 수학적 개념을 전달하는 학교 수학의 본질에 있다고 한다. 그리고 이러한 학교 수학의 본질에서는 CAS를 통한 수학 교실의 근본적인 변화를 만드는 것이 어렵다고 하였다. 본 연구의 참여한 교사의 경우에도 CAS 공학과 수학 교실에서의 통합에 대해 연구해 온 기간에 비해 여전히 CAS 공학의 영향력은 미흡하며 수업은 여전히 수학 교과서를 벗어나지 못하고 있음을 알 수 있었다. 따라서 CAS 공학과 같은 수학 교실 환경의 변화를 반영한 학교 수학의 본질에 대한 변화가 필요함을 본 연구를 통해 알 수 있다.

셋째, 수학 교실에서 CAS를 사용한 모든 표상이 항상 수학적 개념의 불투명 표상에서 투명 표상으로 전환이 되는 것은 아니다. 본 연구에서 다룬 수학적 개념은 합성함수인데, 이 개념은 함수를 하나의 수학적 대상으로 보고 이들 사이의 연산을 의미한다. CAS 공학이 대상을 통한 수학적 개념의 이해에 중요한 역할을 한다고 주장하는 Heid(2003)에 따르면 CAS 공학의 수학 교실에서 학생들은 CAS 공학을 사용하여 함수와 관련된 기호조작의 과정을 손으로 해야 한다는 의무감과 부담감에서 벗어나 과정을 대상으로 발전시킬 수 있다고 하였다. 그러나 학교 수학에서 CAS가 통합되기 위해서는 CAS 도구 자체의 본성과 학교 수학에서 도구의 잠재성을 반영한 교사의 사용이 필요하다(Heid, Thomas, & Zbiek, 2013). 본 연구에 참여한 교사의 경우 CAS를 사용하여 합성함수를 점의 좌표, 대응, 함숫값으로 설명하므로 함수를 대상으로 발전할 기회가 부족하였다. 따라서 교사는 CAS 공학 도구에 대한 이해를 충분히 하고 있어야하며 도구가 가진 잠재성을 활용한 교수-학습 방법에 대한 교사의 이해가 필요함을 본 연구를 통해 알 수 있다.

넷째, CAS를 사용한 수학 수업에서 수학적 개념의 불투명 표상과 투명 표상 사이의 표상 전환은 교사의 사용에 따라 이루어진다. 투명 표상과 불투명 표상은 교수학적 도구이므로 이 두 표상의 구분은 표상 자체로 구분될 수 있는 것이 아니라 교수-학습 과정에서 교사의 사용 방법으로 구분된다(Meira, 1998). 이러한 Meira의 의견은 본 연구에서 서술 표상과 묘사 표상이 교사의 설명에 의해 서술 표상만이 투명 표상이 되는 것을 봄으로 알 수 있다. 따라서 투명 표상과 불투명 표상은 교수-학습 과정에서 구분이 되므로 표상을 투명과 불투명이라고 하는 외적 형식으로만 이분법적으로 구분해서는 안 된다. 수학적 개념에 대한 투명한 표상의 부족은 학생들에게 수학적 개념의 이해와 개념 형성에 장애(Zazkis & Gadowsky, 2001)가 되고 수학 문제해결에서 불투명 표상에서 투명 표상으로 표상을 변환하는 과정은 수학 문제를 해결하는 과정이다(Lesh, Behr, & Post, 1987). 따라서 교사들은 교수학적 도구인 투명 표상에 대한 중요성을 인식하고 교수-학습 과정에서 투명 표상의 생성과 사용에 대한 고민과 노력이 필요함을 본 연구를 통해 알 수 있다.

참 고 문 헌

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정[별책8].** 교육인적자원부.

교육과학기술부(2011). **2009 개정 수학과 교육과정[별책8].** 교육과학기술부.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Diezmann, C. & English, L. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 77-89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17*, 105-122.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics 2001 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 173-184). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldenberg, E. P. (2003). Algebra and computer algebra. In T. F. James, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin, & R. M. Zbiek (Eds.), *Computer Algebra systems in secondary school mathematics education* (pp. 9-30). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Heid, M. K. (2003). Theories for thinking about the use of CAS in teaching and learning mathematics. In T. F. James, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin, & R. M. Zbiek (Eds.), *Computer Algebra systems in secondary school mathematics education* (pp. 33-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Heid, M. K., Thomas, M. O. J., & Zbiek, R. M. (2013). How might computer algebra systems change the role of algebra in the school curriculum. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 597-641). New York: Springer.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of funtion as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problem of representation in the teaching and learning mathematics* (pp. 67-72). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problem of representation in the teaching and learning mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kosslyn, S. M. (1994). *Image and brain.* Cambridge, MA: MIT Press.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Behr, M., & Post, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mandler, J. (1983). Representation. In P. Mussen (Ed.), *Handbook of child psychology, Vol. 3, Cognitive development* (pp. 420-494). New York: John Wiley & Sons.

McCallum, W. G. (2003). Thinking out of the box. In T. F. James, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin, & R. M. Zbiek (Eds.), *Computer Algebra systems in secondary school mathematics education* (pp. 73-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 121-142.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 183-195.

Muis M. A., Stephen J. H., & James J. K. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 99-111.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The Author.

Núria G. & Guida de A. (2009). Social representation as mediators of practice in mathematics classrooms with immigrant students. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 61-76.

Olson, D. & Campbell, R. (1993). Constructing representations. In C. Pratt & A. F. Garton (Eds.), *Systems of representation in children* (pp. 11-26). New York: John Wiley & Sons.

Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach.* New York: Oxford University Press.

Piaget, J. (1962). *Play, dreams, and imitation in children.* New York: Norton.

Pierce, R., Stacey, K., & Wander, R. (2010). Examining the didactic contract when handheld technology is permitted in mathematics classroom. *ZDM-International Journal of Mathematics Education, 42*, 683-695.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of funtion: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Washington DC: MAA.

Skemp, R. (1986). *The psychology of learning mathematics.* New York: Penguin Books.

Verschaffel, L., Corte, E. D., Jong, T. D., & Elen, J. (2010). *Use of representations in reasoning and problem solving.* London and New York: Routledge.

Werner, H. & Kaplan, B. (1964). *Symbol formation.*

New York: John Wiley & Sons.

Zazkis, R. & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *The role of representation in school mathematics. 2001 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 146-165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zbiek, R. M. & Heid, M. K. (2001). Dynamic aspects of funtion representations. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI on the future of the teaching and learning of algebra* (pp. 682-689). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Analysis of Transforming Mathematical Representation Shown in the Class of Composite Function Using the CAS

Lee, Yu Bin (Graduate School, Yeungnam University)
Cho, Cheong Soo (Yeungnam University)

This study examined mathematics class using the CAS(Computer Algebra Systems, CAS) targeted for high school first grade students. We examined what kind of transforming of representations got up according to mathematics subject contents at this classroom. This study analyzed 15 math lessons during one month and the focus of analysis was on the classroom teacher. In particular, for transformations among representations this study mainly investigated from theoretical frameworks such as transparent and opaque representation of Lesh, Behr & Post(1987), descriptive and depictive representation of Kosslyn(1994). According to the results of this study, CAS technology affected the transforming of representations in high school math class and this transforming of representations improved the students' thinking and understanding of mathematical concepts and provided the opportunity to create the representation of individual student. Such results of this study suggest the importance of CAS technology's role in transforming of representations. and they offer the chance to reconsider the fact that CAS technology could be used to improve students' ability of transforming representations at the mathematics class.

* Key Words : Representation Transformation (표상 전환), CAS (컴퓨터 대수시스템), Composite Function (합성함수)

논문접수 : 2015. 1. 28
논문수정 : 2015. 3. 2
심사완료 : 2015. 3. 4