대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 1, 1 ~ 19. Feb 2015

학업성취도 평가에서 답지 반응률 분포 그래프를 활용한 중학생의 수학과 학업 특성 분석[1)]

조 윤 동[*] · 이 광 상[**]

이 글은 국가수준 학업성취도 평가에 출제된 선다형 문항을 분석하여 교육과정이나 교수·학습, 평가에 개선할 여지가 있는지를 탐색하는 것에 목적을 두고 있다. 이를 위해 답지 반응률 분포 그래프를 이용하여 문항 전체뿐만 아니라 특정 답지가 담고 있는 내용에 대하여 학생들이 어떠한 특성을 보이는지를 분석할 것이다. 이러한 분석은 전체 집단의 평균 정답률과 변별도, 부분 집단별 평균 답지 반응률과 같은 기술통계치보다 많은 정보를 제공해 준다. 왜냐하면 학생들의 능력에 따른 반응의 변화가 잘 드러나기 때문이다. 이러한 방식의 문항 분석으로부터 소인수 개념이나 소인수분해, 속도와 같은 비, 일차함수의 개념, 원뿔의 부피, 입체도형의 성질, 공사건과 전사건의 확률 등에 대해서 시사점을 얻고 있다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구 필요성, 내용, 목적

국가수준 학업성취도 평가(이하 학업성취도 평가)는 학생들이 교육과정에 제시된 교육 목표에 도달한 정도를 파악하여 교육과정을 개선하고, 성취도에 영향을 미치는 변인을 분석하여 교수·학습 방법을 개선하는 자료를 제공하기 위하여 시행되고 있다(김동영 외, 2013). 이러한 자료는 문항 분석, 즉 문항에서 평가하고자 하는 ‘내용이나 개념에 대한 이해 수준’과 ‘학습한 지식을 활용하는 행동 수준’을 평가 결과와 연계하여 분석함으로써 얻을 수 있다.

문항은 검사에서 학생들에게 주어지는 개별 과제로서, 학생들은 각 과제를 해결할 수 있는지 여부로 자신의 전체 능력을 평가받게 된다. 따라서 문항 분석은 일종의 학습 과제를 분석하는 행위로서 해당 학습 과제가 학생의 수준에 맞는지, 어느 성취수준[2)]의 학생에게 무엇 때문에 어려운지, 문항의 구성에 모호함은 없는지 등을 판단하는 일련의 과정이다. 이러한 문항 분석은 학생들이 문항에 반응한 결과를 바탕으로 수행된다. 문항에 반응한 양상은 일차로 답지 반응률과 변별도로 나타나는데, 답지 반응률은 정답지 반응률과 오답지 반응률

* 한국교육과정평가원, jydong05@kice.re.kr (제1 저자)
** 한국교육과정평가원, leeks@kice.re.kr (교신저자)

1) 이 연구는 이인호 외(2014)의『한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2014-5-2』에서 본 연구자들이 다룬 부분을 수정, 보완한 것임.

2) 학업성취도 평가에서 사용하는 성취수준은 Angoff 방법을 수정하여 적용한 준거(criterion)를 토대로 성취수준을 구분하는 분할 점수를 산정하였고, 이를 바탕으로 우수학력, 보통학력, 기초학력, 기초학력 미달의 4단계로 구분하고 있다(김경희 외, 2012, pp. 17-18).

로 나뉜다. 문항의 내용, 구성과 함께 답지 반응률, 변별도를 분석함으로써 학생들이 가지고 있는 선개념(先槪念)이나 오개념, 문제 해결 과정에서 겪는 어려움, 문항에 내재된 혼동 요인을 알아낼 수 있다. 이러한 문항 분석 결과는 교육과정의 구성과 위계를 조정하거나 학업 특성을 고려한 교수·학습 방안을 마련하는 데 기초 자료로 활용될 수 있다. 또한 학생들이 취약한 부분을 효과적으로 발견할 수 있는 평가 문항을 개발하는 데도 활용될 수 있다. 하지만 이전에는 성취수준별 평균 정답률을 중심으로 문항을 분석했기 때문에 성취도 점수에 따른 정답지와 오답지 반응률 분포를 세밀하게 파악할 수 없어, 해당 문항이 다루고 있는 내용에 대한 학생들의 학업 특성을 면밀하게 파악하는 데는 어려움이 있었다. 이 때문에 기존의 문항 분석 방법을 보완하기 위하여 성취도 점수에 대해서 답지 반응률 분포를 정교하게 파악할 수 있는 도구가 필요하다는 요구가 제기되었다.

이에 본 연구에서는 기존의 집단별 분석의 한계를 넘어서는 방법으로 성취도 점수에 대한 답지 반응률 불포 그래프를 활용(2장에서 상세히 기술할 것임)하여 기술 통계치를 이용하는 것보다 문항을 내용면이나 형식면에서 심층적으로 분석함으로써 학생들의 학업 특성을 더욱 상세하게 파악하고 이를 통해서 교육과정의 내용과 구성, 교수·학습적 처치 방안, 평가를 개선하기 위한 시사점을 도출하고자 한다.

2. 연구 방법

본 연구에서 사용한 답지 반응률 분포 그래프는 성취도 점수에 대응하는 정오답지 반응률 관찰치를 사용하여 연결한 곡선([그림 1]의 아래쪽 그래프)이다. 먼저 2010~2013년에 출제된 116개의 선다형 문항마다 정답지와 오답지의 반응률 분포 그래프를 하나의 좌표평면에 그림으로써, 학생들이 각 문항에 대해 반응한 양상을 파악한다. 이것들을 정답률 분포 그래프를 기준으로 유형별로 분류하여 문항에 대한 반응을 전체적으로 개관한다. 둘째로 그래프에 성취수준을 표시하여 그래프의 변화를 성취수준별로 파악한다. 셋째로 변별력이 높게 나타나는 지점(또는 구간)을 상중하의 소구간으로 나눈 성취수준 구간3)에서 살펴보아 정답지의 특성을 탐색한다. 넷째로 특정 오답지 반응률 분포가 특이하게 나타나는 지점(또는 구간)을 바탕으로 오답지의 특성을 살펴본다. 이상의 사항들과 문항과 답지의 내용으로부터 그러한 현상이 나타나게 된 원인을 살펴볼 것이다. 116개의 모든 선다형 문항에 대한 그래프를 정답률 분포 그래프를 몇 가지 기준으로 분류한 현황을 <표 Ⅰ-1>에 나타내었다.

<표 Ⅰ-1> 정답지 반응률 분포 그래프의 유형에 따른 문항 분류

그래프 유형	변별력 형성 구간	내용 영역별 문항 수					계(%)
		수와 연산	문자와 식	함수	기하	확률 통계	
S형	기초	10	12	3	11	2	81 (69.8)
	기초-보통	5	4	3	5	3	
	보통	4	6	2	6	2	
직선-S형	기초-보통	1	2	2			17 (14.7)
	보통		1	3	2		
	보통-우수	1		1	2		
	우수			1	1		
직선형		2		2	2	2	8 (6.9)
직선-J형	보통-우수				2		6 (5.2)
	우수	1	2	1			
F형		1	1	2			4 (3.4)
계		25	28	20	31	12	116

3) 이것은 성취수준 구간을 수치로 3등분한 것은 아니다. 이를테면 보통학력 상 수준은 보통학력 구간에서 척도 점수가 높은 구간, 중 수준은 가운데 구간, 하 수준은 낮은 구간을 일컫는다.

정답지와 오답지의 반응률 분포 그래프가 나타내는 일반적인 특징을 기술하면 다음과 같다. 일반적으로 정답률은 성취도 점수가 증가함에 따라 높아지는 양상을 띤다. 이러한 정답률 분포 그래프의 개형을 다섯 가지로 구분하였다 첫 번째로 S형. 이른바 전형적인 생장 곡선의 하나인 로지스틱 곡선(logistic curve)의 형태를 띠는 것으로 81문항(69.8%)이 해당된다. 이 형태는 하위 성취도 점수 구간에서는 정답률이 전반적으로 낮은 상태를 유지하면서 차츰 높아지다가, 중간 정도의 구간에서 정답률이 빠르게 높아지고, 상위 구간에서는 높은 정답률을 유지하면서 최대 정답률을 향해 차츰 높아지는 양상을 보인다. 기초학력 구간에서 높은 변별력을 보인 문항이 38문항(32.8%)로 가장 많았고 다음으로 기초학력과 보통학력이 걸치는 구간이었다. 두 번째로 직선-S형. 이 유형은 정답률이 기초학력 미달부터 기초학력의 하(중) 수준까지 선형적으로 높아지다가 이후로 로지스틱 그래프의 형태를 띠는 것으로 17문항(14.7%)이 해당된다. 보통학력 구간에서 높은 변별력을 보인 문항이 6문항(5.2%)으로 가장 많았다. 세 번째로 직선형. 이 경우는 배운 만큼 성취기준을 숙달하는 경우로 8문항(6.9%)이 있다. 이 경우는 학습 초기에 겪는 어려움도 적지만 완전히 숙달하기도 쉽지 않는 내용이 해당한다고 할 수 있다. 네 번째로 직선-J형. 정답률이 기초학력 미달부터 기초학력의 하(중) 수준까지 선형적으로 높아지다가 이후로 아래로 볼록한 포물선의 형태를 띠는 것으로 6문항(5.2%)이 해당된다, 우수학력 구간에서 높은 변별력을 보인 문항이 많았다. 다섯 번째로 F형. 학습 초기에 어렵지 않게 내용을 익힐 수 있는 경우로 모두 4문항(3.4%)이 있다.

오답지에 대한 반응률 분포를 보면 일반적으로 기초학력 미달에서는 성취도 점수에 따라 반응률이 불규칙하게 나타나지만 기초학력부터는 그러한 변화가 매우 적다([그림 1] 참조). 이것은 기초학력 미달 수준의 학생들이 답지에 임의로 반응하는 경향이 강하고 기초학력부터는 그러한 경향이 줄어들기 때문이라고 할 수 있다. 어쨌든 오답지에 대한 반응률은 성취도 점수가 높아짐에 따라 낮아지는 양상을 보이는 것이 전형이다. 그렇지만 특정 오답지의 경우에는 어떤 성취도 점수까지는 반응률이 오른 다음 그 반응률이 한동안 유지되다가 이후에 낮아지는 고원(高原) 형태의 양상을 띠기도 한다. 그리고 어떤 성취도 점수까지 오답지의 반응률이 지속적으로 높아지다가 이후에 낮아지는 산지(山地) 형태의 양상을 띠는 경우도 있다. 그밖에도 여러 형태가 있으나 오답지에 대해서는 굳이 유형을 분류하지 않는다. 이는 개별 문항을 분석할 때 살펴볼 것이다.

여기서 분석 대상으로 삼은 문항에서는 정답지와 오답지에 대하여 위에서 기술한 전형적인 반응을 보였다고 판단되는 문항은 제외하였다. 그 까닭은 첫째로 정답지에 대하여 전형적인 반응을 보이는 경우는 정답률이 낮더라도 학력에 따른 학력차를 분명하게 보여주기 때문이다. 둘째로 오답지에 대하여 이상 반응을 보이지 않은 경우는 그 오답지에 학생들이 선택할만한 요인이 없기 때문이다. 그리고 2009 개정 교육과정에서 제외된 성취기준을 다룬 문항도 모두 제외하였다. 이러한 조건과 함께 이 글에서는 이인호 외(2014)와 달리 학생들의 답지 반응에 대한 판단의 객관성을 더욱 확보하기 위하여, 같은 성취기준에서 출제된 문항 가운데 같은 내용을 다룬 문항이 복수로 있는 경우를 문항 선정의 중심 요건으로 두었다. 이러한 조건들을 고려하여 문항을 선정하였기 때문에 직선형이나 F형은 다루지 않게 되었다. 선정한 문항들의 유형에 따른 개략적인 특징은 다음과 같다. 정답률 분포 그래프가 특정 성취도 점수 구간에서 급격히 올라가는 직선-S형, 직선-J형과 같은 형태를 띠거나 S형에서 특정 오답지의 반응률 그래프가 고원

형이나 산지형과 같이 특이한 형태를 보인 문항 가운데서 선정하였다. 그러나 직선-S형, 직선-J형 일지라도 선다형 문항의 특성상 오답지에 반응한 근거를 확보하기 어려운 문항은 이글에서는 다루지 않았다. 선정한 문항은 <표 Ⅰ-2>와 같다. 밑줄을 그은 문항은 분석 자료가 직접 제시된 것이고 그 밖의 문항은 다른 문항과 결부시켜 다룬 것이다.

<표 Ⅰ-2> 중학교 3학년 수학과 분석 대상 문항 번호

연도	2010	2011	2012	2013
수와 연산	13			5
문자와 식	7			
함수	12		7, 12	10
기하	16	24	22	26
확률과 통계		13		17

이 문항들 가운데서 연구진이 오답에 대한 근거를 찾기 어려운 문항에 대해서는 중학교(고등학교 1개교 포함) 교사의 도움을 받아 학생들에게 문제를 풀게 하고 그것으로부터 오답지를 선택하게 된 근거를 찾았다. 이 문항들은 계산 절차가 많은 비중을 차지하는 것들이다. 대상 학교를 선정하고 오답지에 대한 반응을 정리하기까지의 절차는 다음과 같다. 먼저 1차(2014.8.)에서는 여섯 개의 학교, 2차(2014.9.)에서는 여덟 개의 학교를 선정하고, 한 학교에 두 문항씩 할당하였다(<표 Ⅰ-3> 참조). 학교 선정(서울 5개교, 경기, 충남, 충북 각 1개교)과 문항 할당은 연구자가 임의로 하였다. 왜냐하면 이미 시험이 치러져 모든 문항에서 각 답지에 대한 결과(반응률 분포)가 나와 있는 상태에서 특정 오답지를 선택한 근거만 확보하면 되었기 때문이다. 그리고 고등학교 1학년을 피험자 집단에 포함하였는데 이는 앞선 이유와 마찬가지로 학생의 사고 과정만 확보하면 되었기 때문이다. 실제로 고등학교 1학년의 반응에 나타난 근거도 중학교 3학년과 그다지 다르지 않았다. 둘째로 학생들의 반응을 확보하기 위해 각 학교에서 세 학급 이상에서 학생들에게 풀이 과정을 쓰면서 문제를 풀게 하고 답지를 선택하게 하였다. 결과를 수합하여 오답지별로 반응 결과를 정리하였다. 셋째로 학생의 반응 조사를 의뢰했던 학교 교사들의 협의회를 거쳐 반응 근거로 삼았다.

학생들의 반응을 조사한 문항은 모두 14개이다. 이 가운데 3개 문항에 대해서 학생들의 반응 결과를 반영한 문항 분석을 시행하였다. <표 4>에서 밑줄을 그은 문항(2010년 16번, 2011년 24번, 2012년 22번)이 이에 해당된다. 11개 문항을 분석 대상에 포함하지 않은 까닭은 학생들이 제시한 풀이가 그 오답지를 선택한 근거로는 타당성이 떨어지거나 본 연구에서 다루고 있는 다른 문항과 분석의 연계성이 떨어진다고 판단하였기 때문이다.

<표 Ⅰ-3> 분석 의뢰 문항

1차	학교	ㅅ중 ㅂ1중	ㄷ중 ㅈ1중	ㅈ2중 ㅅ여고	
	문항	1123 1129	1124 1127	1304 1321	
2차	학교	ㅅ중 ㅅ여고	ㅂ1중 ㅈ1중	ㄷ중 ㅈ2중	ㅇ중 ㅂ2중
	문항	1106 1329	1029 1229	1318 1324	1016 1222

※ 앞의 두 자리는 연도, 뒤의 두 자리는 문항 번호임. 이를테면 1123은 2011년도 23번 문항임.

Ⅱ. 문항 분석 결과

1. 문항 분석 도구의 개관

이전의 문항 분석에서는 전체 검사와 개별 문항에 대해서 평가 대상 전체 학생의 평균 정답률과 변별도 그리고 성별, 지역별, 성취수준별 학생들의 평균 정답률을 주요 근거로 사용하였다(<표 Ⅱ-1> 참조). 이러한 요소들로도 학생들의 학업 특성에 대해서 많은 정보를 추출할 수 있다. 그러나 학업 성취 수준(성취도 점수)에 따른 답지 반응 양상을 정확히 알 수 없기 때문에 정답지나 오

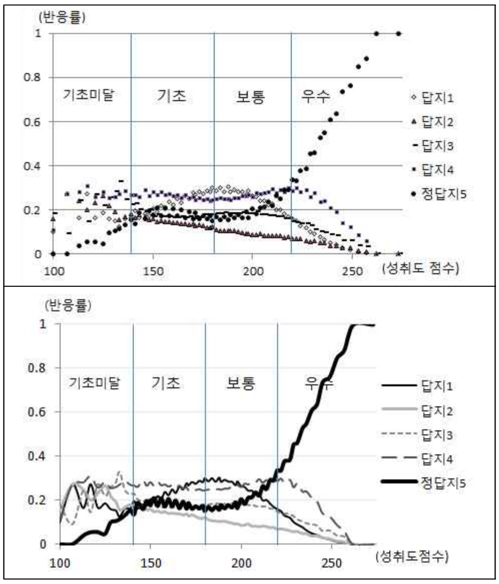
답지의 어떤 특성이 어떠한 영향을 끼치고 있는지를 개략적으로 알 수밖에 없었다. 전체 학생의 50% 가량(2012, 2013년 기준, 이인호 외, 2014)을 차지하는 보통학력의 비율을 고려할 때, 성취수준별 평균 정답률만으로는 학생들의 학업 특성을 상세하게 분석하기 어렵다.

<표 Ⅱ-1> 기존의 문항 분석 자료(2010년 13번)

성취기준	소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해 할 수 있다.					
정답률	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
	28.09	60.62	20.66	18.79	11.94	0.26
	남	여	대도시		중소도시	읍면지역
	29.49	26.54	29.51		27.76	24.55
답지반응 분포(%)	①	②	③	④	⑤	무응답
	19.93	10.46	16.35	24.94	28.09	0.22

※ 우수: 우수학력, 보통: 보통학력, 기초: 기초학력, 기미: 기초학력 미달

본 연구에서는 2010-2013년의 중학교 수학과 학업성취도 평가에서 출제된 선다형 116개 문항에 대해서 답지 반응률 분포 그래프(이하 그래프, [그림 Ⅱ-1]의 아래쪽)를 산출하여 분석의 기본 도구로 삼았다. 물론 기존에 사용하던 전체 학생의 답지별 반응률과 변별도, 성취수준별 평균 정답률도 이용한다. 이 자료들과 문항 내용, 구성, 유형을 바탕으로 답지 반응에 대하여 정성적으로 분석하여 성취도 점수에 따른 반응 특성을 이끌어냄으로써 학업 특성을 상세하게 다룰 것이다. 그래프에서 가로축은 학업성취도 평가에서 사용하는 성취도 점수, 세로축은 답지 반응률을 표시한 것이다. 그리고 3개의 세로선은 기초학력 미달, 기초학력, 보통학력, 우수학력을 구분하고 있다. 학업성취도 평가에서는 2010년을 기준으로 하여 원점수를 척도화된 성취도 점수로 변환하여 사용하고 있다. 성취도 점수는 평균 200점, 표준편차 30점, 범위 100~300점, 증분 1점이다.



[그림 Ⅱ-1] 2010년 13번 문항의 답지 반응률 관측치 분포(위)와 연결 그래프(아래)

문항의 답지에 대한 반응 결과를 [그림 Ⅱ-1]과 같은 성취도 점수에 대한 답지 반응률 분포 그래프로 나타내 보면 <표 Ⅱ-1>의 자료로 문항을 분석하던 방법에 비하여 학생들의 성취수준별 성취 특성에 관한 추가 정보를 얻을 수 있다. 이것은 위에 제시한 문항과 같이 다소 특이한 답지 반응률 분포를 보이는 문항을 사례로 하여 기존의 문항 분석 방법과 비교해 보면 쉽게 드러난다. 우선 굵은 실선으로 나타낸 정답률 분포 그래프로부터는 이 문항은 우수학력과 보통학력 이하를 구별하고 있을 뿐만 아니라 우수학력 하 수준에서 높은 변별력을 나타내고 있으며, 기초학력과 보통학력 중 수준까지는 거의 같은 숙달도를 보이고 있음을 볼 수 있다. 그리고 오답지 중에서 가장 높은 반응률을 나타낸 ④번은 기초학력 미달부터 우수학력 하 수준에 이르기까지 매우 매력적인 오답으로 작용했음을 알 수 있다. 오답지 ①은 기초학력과 보통학력에 걸치는 구간에서 가장 매력적인 오답으로 작용했는데, 특히 이 구간에서 오답지 ④보다 더 높은 반응률을

나타냈다. 이와 같은 정오답지 그래프를 바탕으로 각 답지의 내용을 분석하면 교육과정, 교수 · 학습, 평가와 관련된 시사점을 이끌어낼 수 있을 것이다.

2. 문항 분석 결과

이 절에서는 먼저 선정한 문항마다 전체 정답률, 변별도, 성취수준별 평균 정답률 등이 보여주는 현상과 그래프가 보여주는 현상 사이의 차이에 대해 언급한다. 다음으로 특이한 현상을 나타내는 오답지가 보여주는 경향을 기술할 것이다. 마지막으로 그러한 오답지를 선택한 까닭을 분석하고자 한다. 한 문항 안에서 오답지를 분석하는 순서는 기본적으로 반응률이 높은 것부터 낮은 순으로 진행한다. 그리고 각 문항에서 도출되는 시사점은 주로 3장에서 주로 기술할 것이다.

가. 2010년 13번 문항: 직선-J형

성취기준 : 소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해 할 수 있다.

13. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 49 의 소인수는 1, 7, 7^2 이다.

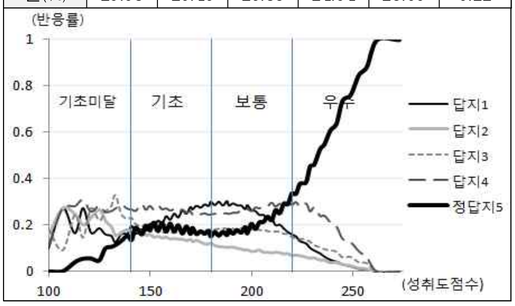
ㄴ. 15 와 28 은 서로소이다.

ㄷ. $2^3 \times 5^2$ 의 약수는 모두 12 개이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

정답률	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
	28.09	60.62	20.66	18.79	11.94	0.26
답지반응률(%)	①	②	③	④	⑤	무응답
	19.93	10.46	16.35	24.94	28.09	0.22



이 문항의 전체 정답률은 28.09%로 매우 낮은 결과를 나타냈으며 변별도는 0.26으로 낮은 변별력을 보였다. 이는 모든 오답지에 반응한 비율이 낮지 않은 것, 특히 오답지 ④에 대한 반응률이 정답률과 큰 차이 없이 높게 나온 것과 맞물려 있다. 성취수준별 정답률에서는 우수학력과 보통학력 이하를 변별하는 것으로 보이나 그래프를 보면 정답률은 기초학력과 보통학력의 중 수준 이하에서 20% 정도를 유지하다가 보통학력의 상 수준부터 높아지면서 우수학력에서 매우 빠르게 높아지고 있다. 이는 이 문항이 우수학력 구간에서 변별하는 역할을 하고 있음을 보여준다. 더욱이 기초학력에서 보통학력으로 이어지는 구간에서는 정답률이 약간 떨어지는 현상까지 나타나고 있다. 이는 오답지 ①의 영향이라 할 수 있다. 여기에 오답지 ④와 ③도 영향을 끼친 것으로 보이는데, 특히 ④는 보통학력과 우수학력의 경계 부근에서 다소 높은 반응률을 나타냈기 때문이다. 이런 사실로부터 <보기>의 ㄱ과 ㄷ이 정답지를 선택하는 데 영향을 끼쳤다고 할 수 있다.

성취도 점수에 따른 정답률에 많은 영향을 끼친 오답지 ①과 ④에 공통으로 들어 있는 <보기>의 ㄱ에서 다뤄지고 있는 개념은 소인수이다. 오답지 ①의 반응률 분포는 보통학력 하 수준에서 30%에 이르는 산지형이다. 오답지 ④의 반응률 분포는 기초학력과 보통학력에서 모두 높은 고원형인데 특히 보통학력 중, 상 수준에서 높다. 소인수는 소수인 인수를 말하는데, 인수는 약수를 일컬으므로 소인수는 소수인 약수를 말한다. 그런데 교육과정에서는 인수라는 말이 이때 처음으로 나오지만 약수와 동의어로 쓰인다는 정도로만 언급하면서 사용하고 있다. 이런 점에서 많은 학생들이 인수에 대해서 명확히 인식하지 못한 결과로 <보기>의 ㄱ을 옳다고 판단한 듯하다. 이를테면 소수의 거듭제곱을 모두 소인수로 간주하였기 때

문일 것이다. 답지 ④와 ⑤에 공통으로 들어 있는 서로소의 개념은 많은 학생들(답지 ②를 포함한다면 대부분의 학생들)이 잘 이해하고 있는 것으로 보인다. 용어가 개념의 의미를 잘 표현해주고 있기 때문이다. 이와 반대로 <보기>의 ㄱ과 ㄷ에 쓰인 두 용어는 혼동을 일으켰기 때문에 보통학력 상, 우수학력 하 수준에서 오답지 ④에 높은 반응률을 보인 것으로 판단된다. 이상에서 볼 때 이름(용어)은 대상의 특징을 잘 드러내야 하는데 소인수는 그런 역할에 미흡한 면이 있다.

나. 2013년 5번 문항: S형

성취기준 : 소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해 할 수 있다.

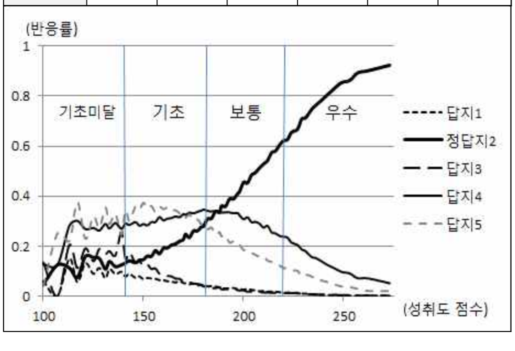
5. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 12 이하의 소수는 6 개이다.
ㄴ. 24 의 약수는 8 개이다.
ㄷ. 48 을 소인수분해하면 3×16 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
정답률	41.93	85.97	46.43	18.59	13.22	0.47
답지반응률(%)	①	②	③	④	⑤	무응답
	3.94	41.93	5.36	26.80	21.80	0.17



내용면에서 2010년 13번과 연계되어 있는 이 문항의 전체 정답률은 41.93%로 낮았고, 변별도는 0.47로 변별력이 있는 것으로 나타났다. 이는 소수 개념을 다루는 <보기>의 ㄱ, ㄴ이 있는 오답지 ④, ⑤의 반응률이 높게 나온 것과 관련이 있다. 성취수준별 정답률로는 어느 성취수준 사이에서 변별력을 나타냈다고 보기 어렵지만 그래프에서는 보통학력 구간에서 변별력을 나타냈다고 할 수 있다. 그리고 우수학력도 정답률이 100%에 많이 미치지 못하는 것으로 나타나 우수학력에서도 이 문항이 다루고 있는 성취기준을 완전히 숙달하지 못했다고 할 수 있다.

오답지 ④의 반응률을 보면 보통학력 중 수준까지 30%가 넘고 우수학력 하 수준까지 20%를 넘기다가 이후 낮아지는 고원형인데 최상위 구간에서 0%에 이르지 못하고 있다. 오답지 ⑤의 반응률도 기초학력까지 30%를 넘기고 보통학력에서 낮아지기는 하지만 최상위 구간에서 0%에 이르지 못하고 있다. 오답지 ②, ④, ⑤의 반응률을 더하면 90.53%이다. 크지 않은 수의 약수는 소인수분해를 이용하지 않고 직접 하나하나 구할 수도 있기 때문에 거의 대부분의 학생들이 바르게 구한 것으로 보인다. <보기>의 ㄱ을 옳다고 판단한 학생들은 소수와 약수를 헷갈렸거나 같다고 생각한 듯하다. <보기>의 ㄷ을 옳다고 판단한 학생들은 소인수분해에서 2^4(2×2×2×2)과 16은 의미가 다르다는 점을 이해하고 있지 못했다고 할 수 있다. 이것으로부터 거의 대부분의 학생들이 소수와 관련된 개념과 약수 개념을 명확히 구별하지 못하고 있다고 하겠다. 우수학력에서조차 정답률이 100%에 많이 이르지 못한 것은 우수학력의 적지 않은 학생들도 소수와 약수를 명확하게 구별하여 이해하지 못하고 있음을 반증하는 것이다.

다. 2010년 7번 문항: 직선-S형

성취기준 : 문자를 사용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

7. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

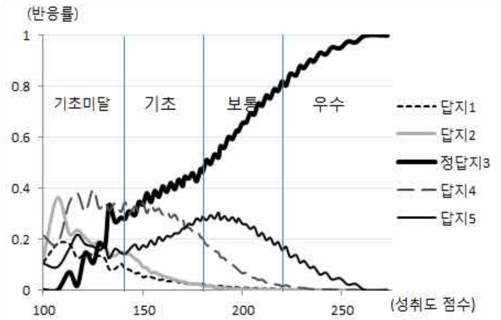
ㄱ. 시속 a km 로 2시간 동안 이동한 거리는 $2a$ km 이다.

ㄴ. 한 장에 2000 원인 CD 를 b% 할인하여 판매하는 가격은 $\left(2000-\frac{b}{100}\right)$ 원이다.

ㄷ. y 원으로 한 권에 x 원인 공책 5권을 사고 돈이 남았다면 남은 돈은 $(y-5x)$ 원이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답률	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
	59.36	90.80	64.20	40.27	26.63	0.37
답지반응률(%)	①	②	③	④	⑤	무응답
	2.60	3.35	59.36	15.14	19.40	0.15



이 문항의 전체 정답률은 59.36%로 낮은 편이었으며, 변별도는 0.37로 변별력이 있기는 하였으나 다른 문항에 비해서는 낮았다. 성취수준별 정답률로부터는 기초학력 미달의 정답률이 높은 것을 반영하듯이 어느 성취수준 사이에서도 특별히 변별력을 나타내지 않았다. 전체 정답률이 낮은 것은 오답지 ④와 ⑤의 영향 때문이다. 그래프를 보면 기초학력에서 덜 가파른 선형적인 증가 형태를 띠다가 보통학력이 시작되는 부분에서 정답률이 빠르게 높아지고 있다. 그러므로 이 문항은 기초학력과 보통학력의 경계 부근에서 변별력을 보인다고 할 수 있다.

정답률 분포 그래프의 양상은 다음 두 가지 요인에 기인한다. 첫째로 오답지 ⑤에 대한 반응률이 기초학력에서 천천히 높아지다가 보통학력 하 수준에서 30% 정도까지 높아졌다가 중 수준부터 낮아지는 산지형을 나타내고 있다. 둘째로 오답지 ④에 대한 반응률이 기초학력 미달에서 기초학력 중 수준까지 30%가 넘는 일정한 비율을 유지하다가 이후에 빠른 하락세를 나타내고 있다. 특히 오답지 ⑤가 기초학력과 보통학력의 경계에서 정답률에 큰 변화를 준 요인이라 할 수 있다. 오답지 ④를 선택한 학생들, 곧 <보기>의 ㄱ을 옳지 않다고 판단한 많은 학생들은 우리가 일상생활에서 자주 듣거나 경험하게 되는 속도(또는 속력)를 수학적(또는 과학적)인 개념으로 이해하지 못하고 있다. 오답지 ④, ⑤를 선택한 34.54%의 학생들은 공통적으로 <보기>의 ㄴ을 옳다고 판단하였다. 비율(백분율)로부터 구한 감소하는 값을 주어진 값(초깃값)에서 빼지 않고, 비 자체를 빼고 있는 것을 옳다고 판단한 것은 비율 개념에 대해 취약하기 때문이다. 또한 이는 덧셈이나 뺄셈은 단위가 같은 값(수)에 대해서 시행된다는 것을 이해하지 못한 것이기도 하다. 백분율을 비로 바꾸어야 하는 것은 알고 있으나 그것을 금액에서 바로 뺀 것이 이 두 가지를 뒷받침한다. 연산에 사용되는 것은 비가 아니라 비가 곱해지거나 하여 산출된 값이다. <보기>의 ㄴ을 옳다고 판단한 학생이 38% 가량 된다는 것은 비나 비율로부터 필요한 값을 구하는 교육을 강화해야 함을 의미한다고 볼 수 있다.

라. 2012년 7번 문항: 직선-J형

성취기준: 함수의 개념을 이해하고, 함수를 표, 식, 그래프로 나타낼 수 있다.

7. <보기>에서 y가 x의 함수인 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

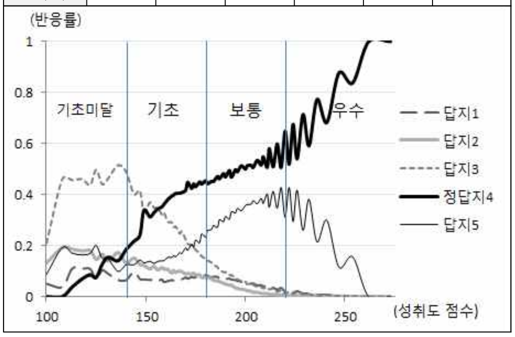
ㄱ. 자연수 x의 배수가 되는 수 y

ㄴ. 시속 80km로 x시간 동안 이동한 거리 $y$km

ㄷ. 밑변의 길이가 5cm, 높이가 $x$cm인 삼각형의 넓이 $y\text{cm}^2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답률	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
	48.54	68.63	50.40	38.29	13.27	0.19
답지반응	①	②	③	④	⑤	무응답
률(%)	5.46	5.39	13.38	48.54	27.06	0.17



이 문항은 함수 영역의 문항이기는 하지만 문자를 사용하여 주어진 상황을 일차식으로 나타내는 '문자와 식' 영역의 2010년 7번과 내용면에서 연계되어 있다. 전체 정답률은 48.54%로 낮게 나타났고 변별도는 0.19로 변별력이 없는 것으로 나왔다. 이는 학력의 수준과 관계없이 많은 학생들이 함수 개념을 제대로 이해하고 있지 못하고 있음을 보여주는 것이라 하겠다. 그래프에서도 특별히 변별력이 있는 구간이 있다고 보기 어렵다.

오답지 ③의 그래프를 보면 기초학력 미달과 기초학력 중, 하 수준에서 반응률이 높다. 이 수준에 있는 많은 학생들은 하나의 자연수(x)에는 수많은 배수(y)가 대응되기 때문에 함수 관계를 만족시키지 못한다거나, 이동한 거리(y)는 시간에 대해서 하나의 값으로만 주어짐을 이해하지 못하고 있다고 할 것이다. <보기> ㄴ의 속도에 관련된 내용은 2010년 7번 문항에서도 다루어졌는데 이 때에도 기초학력 미달 상, 기초학력 하 수준에서 높은 비율로 그릇된 판단을 하였다. 속도의 개념은 과학과의 교과 내용과 관련지어 함수 관계로 포괄하여 다루는 것이 필요하다. ㄱ을 함수 관계라고 판단한 학생이 ①, ③, ⑤를 합쳐서 45.90%에 이르렀다. 두 변수 x와 y에 대하여 하나의 x의 값에 여러 개의 y의 값이 나오는(대응되는) 경우는 함수가 아님을 좀 더 명확히 지도할 필요가 있다. 이를테면 x의 배수는 kx(k는 자연수)로 표현되므로 $y=kx$와 같이 표현할 수 있다고 해서 함수가 되는 것은 아님을 이해시켜야 할 것이다. 다시 말해서 독립변수 x에 하나의 값을 대입하면 하나의 결과만 나오는 것이 함수 관계임을 정확하게 이해시켜야 한다. 특히 오답지 ⑤의 반응률이 27.06%로 높게 나왔는데 이에 해당되는 학생들이 주로 보통학력의 중, 상 수준과 우수학력의 하 수준에 분포되어 있다. 그리고 보통학력 상 수준과 우수학력 전체에 걸쳐서 정답지 ④와 오답지 ⑤에 대한 반응률의 등락이 심하게 나타나고 있다. 이는 보통학력 이상에서도 함수 관계를 명확하게 알고 있지 못한 학생들이 많음을 뜻한다. 함수 관계인 것과 아닌 것을 많은 예를 들어 지도할 필요가 있음을 보여준다고 하겠다.

마. 2010년 12번 문항: 직선-S형

성취기준 : 일차함수의 뜻을 알고, 그래프를 그릴 수 있다.

12. 다음 중 주어진 조건을 모두 만족하는 일차함수의 식은?

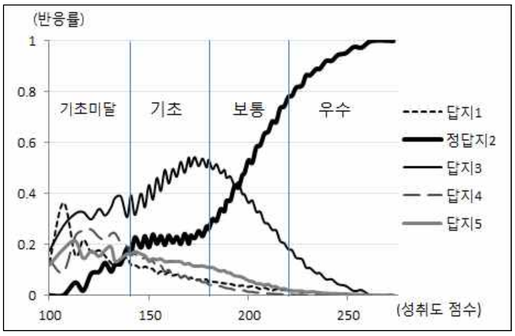
- ○ 그래프가 점 $(0, 1)$을 지난다.
- ○ 그래프가 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.
- ○ $x=1$일 때의 함숫값은 양수이다.

① $y=-3x+1$ ② $y=-\frac{1}{2}x+1$

③ $y=2x+1$ ④ $y=-x$

⑤ $y=-x+2$

정답률	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
	47.32	89.87	50.48	23.24	14.00	0.46
답지반응	①	②	③	④	⑤	무응답
률(%)	5.34	47.32	33.52	5.42	8.25	0.14



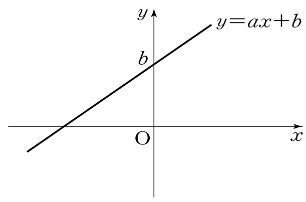
이 문항의 전체 정답률은 47.32%로 낮았으며 변별도는 0.46으로 변별력은 높은 것으로 나타났다. 전체 정답률이 낮은 것은 함수와 그래프의 관계를 정확하게 알고 있지 못하기 때문인 것으로 보인다. 성취수준별 정답률에서는 우수학력과 보통학력을 변별하는 것으로 보이지만 그래프에서는 보통학력 중 수준에서 높은 변별력을 나타내고 있다.

기초학력 집단에서 정답률은 성취도 점수의 높낮이에 관계없이 20%가 넘게 유지되고 있으며 오답지 ③에서는 다른 오답지의 반응률보다 높을 뿐만 아니라 정답률보다 매우 높게 나타났다. 기초학력 미달과 기초학력에서 성취도 점수가 높아질수록 오답지 ③의 반응률이 높게 나타나다가 보통학력에서 낮아지기는 하지만 기초학력 미달, 기초학력, 보통학력 집단에 걸쳐서 높은 반응률을 나타내고 있다. 이러한 상황이 기초학력에서 정답률의 정체 현상을 나타냈다고 할 수 있다. 정답지 ②와 오답지 ③은 모두 그래프가 점 (0, 1)을 지난다는 조건과 $x=1$ 일 때의 함숫값은 양수라는 조건을 만족한다. 그런데 ②의 그래프는 오른쪽 아래로 향하고 ③의 그래프는 오른쪽 위를 향한다는 점이 다르다. 이것으로부터 대부분의 학생들이 특정한 독립변수 x의 값에 대응하는 함숫값을 구할 수 있으나 50% 남짓한 학생들이 일차함수에서 일차항의 계수(기울기)의 부호와 그래프의 방향성을 관련지어 이해하지 못하고 있음을 알 수 있다. 1학년 때 문자를 사용한 식에서 문자에 어떤 수를 대입하여 '식의 값'을 구하는 것을 배우는데, 사실 문자를 사용하지는 않더라도 미지수에 값(수)을 대입하여 계산하는 것은 초등학교 때부터 줄곧 다루어 오고 있다. 그런데 함수식과 그래프를 관련지어 해석하는 것은 중학교에 들어와서 비로소 다루고, 상수항이 있는 일차함수와 그래프는 2학년 때 배운다. 이러한 상황이 영향을 끼쳤을 것이다. 그러나 이것보다 계산하여 값을 구하는 것은 능숙하지만 등식이나 함수의 그래프를 해석하는 능력이 떨어진다고 판단하는 것이 더 적절하다고 생각된다.

바. 2012년 12번 문항: 직선-S형

성취기준: 일차함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그래프의 성질을 이해한다.

12. 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 다음과 같을 때, 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?



① $ab<0$

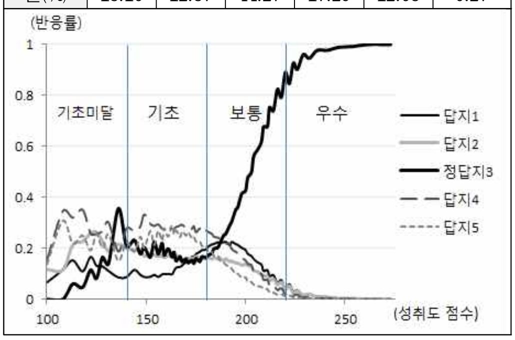
② x 절편은 $\frac{b}{a}$ 이다.

③ 점 $(-1,\ b-a)$ 를 지난다.

④ $y=ax$ 의 그래프와 한 점에서 만난다.

⑤ x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

정답률	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
	44.27	94.65	44.69	17.73	24.71	0.47
답지반응률(%)	①	②	③	④	⑤	무응답
	13.16	12.37	44.27	17.29	12.63	0.27



이 문항의 전체 정답률은 44.27%로 상당히 낮고 변별도는 0.47로 높게 나타났다. 이는 일차함수 식과 그래프로부터 계수의 부호를 판정하기, 절편을 구하기, 증가나 감소를 판단하기에 대해 학력 수준에 따라 이해의 정도가 매우 다르다는 것을 보여준다. 성취수준별 정답률로부터는 우수학력과 보통학력을 잘 변별하는 것으로 나타났지만 그래프를 보면 정답률이 기초학력에서 조금씩 낮아지다가 보통학력의 중 수준에서 매우 빠르게 높아지고 있다. 이런 현상은 기초학력 중 수준까지 10% 정도에 머물던 오답지 ①의 반응률이 보통학력 하 수준에서 20% 남짓까지 오르다 이후에 내려가는 양상을 보인 데 따른 것이다.

정답지 ③의 경우는 점의 좌표를 일차함수에 대입하여 등식을 만족하는지를 묻고 있다. 그런데 다항식에서 문자에 수를 대입하여 값을 구하는 것과 달리, 두 문자에 각각 수를 대입하여 등식이 성립하는지를 판단하는 이와 같은 경우에는 이해의 수준이 다소 낮아 바르게 응답하지 못한 것으로 보인다. 오답지 ①의 경우에는 기초학력 상 수준과 보통학력 중, 하 수준의 학생들이 그래프의 형태와 일차항의 계수(기울기), 상수항의 부호를 제대로 연결하지 못하는 것으로 나타났다. 특히 직선의 방향을 나타내는 일차항의 계수에 대해서 제대로 이해하지 못하고 있다. 이는 앞서 분석한 2010년 12번에서도 나타났던 현상이다. 또한 일차함수 $y=-2x-4$의 그래프를 옳게 나타낸 답지를 선택하는 2013년 10번에서도 y절편은 바르게 나타냈으나 직선의 방향(기울기의 부호)이 반대로 나타난 오답지 ①의 반응률이 기초학력 미달에서 보통학력까지 10%정도로 유지되면서 오답지 중에서 가장 높은 8.55%를 나타냈다. 오답지 ④의 경우에는 기초학력 미달과 기초학력에서 성취도 점수와 관계없이 30% 가량의 반응률을 보이고 있다. 이는 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이라는 것과 평행한 직선은 만나지 않는다는 것을 연계하여 생각하지 못하기 때문이다. 즉 일차함수 $y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프를 제대로 그리지 못하기 때문이다. 그래프를 바르게 그릴 줄 아는 것, 이때 그래프의 형태를 함수의 각 항의 계수와 관련지어 파악하는 것은 함수를 이해하는 데에 매우 중요한 부분이다.

사. 2010년 16번 문항: 직선-S형

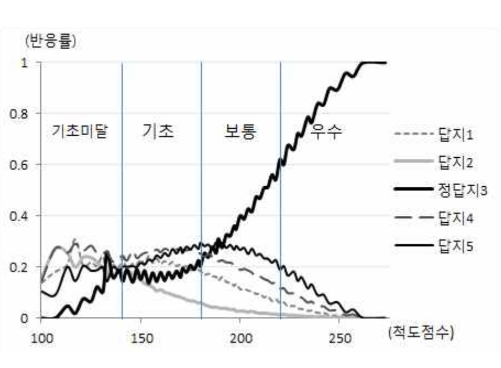
성취기준 : 다면체와 회전체의 뜻과 그 성질을 이해한다.

16. 다음 다면체에 대한 설명으로 옳은 것은?

(가) 삼각기둥 (나) 삼각뿔 (다) 삼각뿔대

① (다)의 옆면은 삼각형이다.
② (나)의 꼭짓점의 개수가 가장 많다.
③ (나)와 정사면체는 면의 개수가 같다.
④ (가)의 면의 개수는 (다)의 면의 개수보다 많다.
⑤ (가)를 밑면에 평행한 평면으로 자르면 (다)를 얻을 수 있다.

	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
정답률	39.24	79.91	38.44	18.41	18.67	0.40
답지반응률(%)	①	②	③	④	⑤	무응답
	13.53	6.25	39.24	19.07	21.66	0.25



이 문항의 전체 정답률은 39.24%로 매우 낮게 나왔는데, 이는 입체도형과 관련된 기본 성질과 관련된 개념을 모르기 때문이라 할 수 있다. 변별

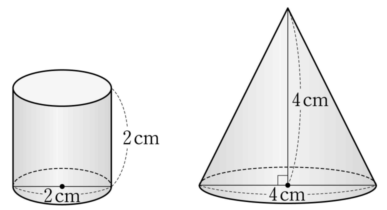
도는 0.40으로 나타나, 변별력은 높았다. 성취수준별 평균 정답률과 그래프에서 모두 우수학력과 보통학력의 경계 구간에 변별력이 있음을 보였다.

정답률은 기초학력 미달 상 수준과 기초학력 구간에서 20% 정도를 보이면서 그래프가 아래로 조금 볼록한 형태를 띠다가 보통학력 하 수준에서 우수학력 상 수준까지 선형적으로 높아지고 있다. 이로부터 이 성취기준에 포함된 요소인 삼각뿔에 대해서 우수학력의 많은 학생들조차 완전히 숙달하지 못하고 있음을 알 수 있다. 이는 삼각뿔대가 관련되어 있는 오답지 ⑤, ④에 대한 반응률의 분포를 보면 알 수 있다. 특히 오답지 ⑤의 경우는 기초학력과 보통학력에서 30%에 육박하는 정답률을 보이면서 산지형 그래프를 띠고 있다. 이것은 수학에서는 뿔대가 뿔로부터 정의된다는 것을 제대로 알지 못하여 삼각뿔대와 삼각기둥을 구별하지 못한 때문으로 판단된다. 일상생활에서는 윗면보다 아랫면이 넓은 것도 기둥이라고 하는 것도 영향을 끼쳤을 것이다. 그리고 학생들의 반응 조사에서 정사면체는 정사각형을 면으로 가진 입체라고 하는 식으로 추론하는 경우도 많았고 꼭짓점보다 면의 개수를 구하는 것을 어려워하였다. 다면체를 가리키는 이름으로부터 그 다면체의 생김새와 성질을 바르게 이끌어내지 못하고 있음은 2013년 22번에서도 확인할 수 있다. 이 문항에서는 정답지와 오답지의 반응률 분포가 전형적인 모습을 보이고 있으나 삼각기둥의 옆면을 삼각형으로(①번 8.68%), 사각뿔의 옆면을 사각형으로(③번 5,47%), 오각뿔의 옆면을 오각형으로(⑤번 5.41%) 판단하고 있다.(이인호 외, 2014)

아. 2012년 22번 문항: 직선-S형

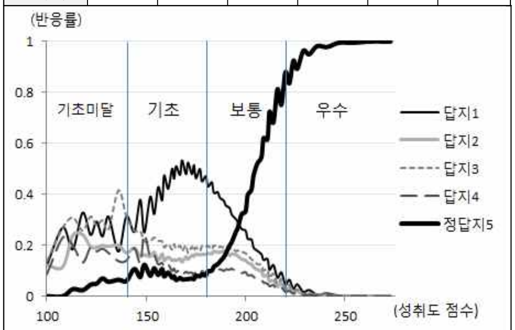
성취기준 : 기둥, 뿔, 구의 겉넓이와 부피를 구할 수 있다.

22. 밑면의 지름과 높이가 모두 2㎝인 원기둥의 부피를 Acm^3, 밑면의 지름과 높이가 모두 4㎝인 원뿔의 부피를 Bcm^3라고 할 때, 부피의 비 A : B는?



① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 2 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 3 : 8

	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
정답률	37.21	94.55	37.40	8.49	6.11	0.56
답지반응률(%)	①	②	③	④	⑤	무응답
	27.23	11.99	15.05	8.30	37.21	0.22



이 문항의 전체 정답률은 37.21%로 매우 낮았고 변별도는 0.56으로 변별력이 높았는데, 이는 보통학력 이하의 정답률이 매우 낮은 데서 확인할 수 있다. 성취수준별 정답률을 보면 우수학력과 보통학력 이하를 변별하는 것으로 보이지만 그래프에서는 보통학력 중 수준에서 변별력이 아주 높다.

기초학력과 보통학력의 경계 지점까지 10%를 밑돌던 정답률이 보통학력과 우수학력의 경계에서는 80%를 훌쩍 넘기고 있다. 이는 오답지 ①에 대해서 정답률이 기초학력 하 수준부터 보통학력 중 수준까지 30%를 넘는데다 기초학력 상 수준에서는 50% 가량이 나왔기 때문이다. 두 입체도형의 부피의 비를 제대로 구하지 못한 것은 뿔의 부피를 구하지 못한, 곧 뿔의 부피는 기둥의 부피의

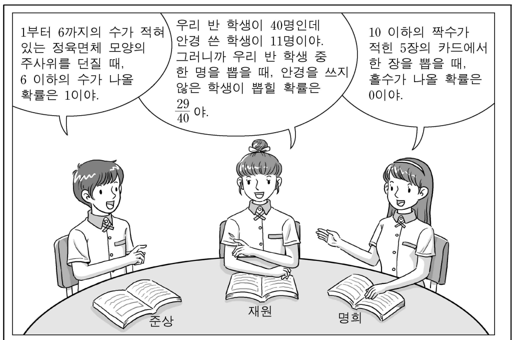
$\frac{1}{3}$ 이라는 것을 알지 못한 데에 있는 것으로 나타났다. 실제로 뿔의 부피를 공식을 적용한 경우에 잘못된 공식을 사용한 경우가 많았다. 이를테면 원뿔의 부피를 (밑넓이)×(높이)×$\frac{1}{4}$로 구하여 선택한 경우(①), 원뿔의 부피를 구할 때 높이를 곱하지 않고 $\mathrm{A}=1\pi\times2=2\pi$, $\mathrm{B}=\frac{1}{3}\pi\times2^2=\frac{4}{3}\pi$로 구한 다음 3 : 2로 생각하여 순서를 고려하지 않고 선택한 경우(③), 부피는 제대로 구하여 비로 나타냈으나 약분하는 과정을 거치지 않고 $\mathrm{A}:\mathrm{B}=2:5.333\cdots$로 계산하고 근삿값으로 선택한 경우(④)가 많이 있는 것으로 나타났다. 그리고 도형에 주어진 수(길이)로 비를 표현된 답지를 선택한 경우도 있었다.

원뿔의 부피를 구하는 것은 2013년 26번에서도 다루어졌다. 이 문항의 전체 정답률은 38.51%로 2012년 문항보다 조금 높게 나왔고, 이러한 현상은 모든 성취수준별 정답률에서도 마찬가지였다. 두 문항의 정답률 분포 그래프도 같은 형태를 띠었다. 오답지 그래프는 2012년 문항과 달리 2013년 문항에서는 모든 오답지에 대해서 기초학력 미달부터 보통학력 하 수준까지 20%를 유지하는 양상을 보였다. 두 문항에 대한 분석 결과로부터 많은 학생들이 원뿔의 부피를 원기둥의 부피와 정확히 관련지어 구하지 못하고 있음을 알 수 있다.

자. 2011년 13번 문항: S형

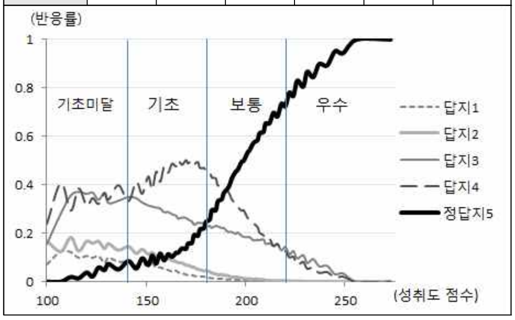
성취기준 : 확률의 뜻과 기본 성질을 이해하고 간단한 확률 계산을 할 수 있다.

13. 준상, 재원, 명희가 수학 시간에 배운 확률에 대하여 이야기하고 있다. 옳게 말한 학생을 모두 고른 것은?



① 준상 ② 명희
③ 준상, 재원 ④ 재원, 명희
⑤ 준상, 재원, 명희

정답률	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
	44.22	87.10	50.10	12.85	5.68	0.53
답지반응률(%)	①	②	③	④	⑤	무응답
	2.25	4.29	20.09	29.02	44.22	0.13



이 문항의 전체 정답률은 44.22%로 낮게, 변별도는 0.53으로 매우 높게 나타났다. 이는 이른바 공사건과 전사건에 대한 이해도에 관련된 것으로 생각된다. 성취수준별 정답률로부터는 우수학력과 보통학력을 변별하는 것으로 보이지만 그래프에서는 정답률이 기초학력 중 수준까지 10% 아래에 머물다가 보통학력 하-중 수준에서 빠르게 오르는 모습이 나타나고 있다. 이것은 오답지 ④의 반응률이 기초학력에서 40% 이상을 보이다가 보통학력에서 빠르게 감소하는 것과 관련이 있다. 그리고 오답지 ③에서는 기초학력 미달에서 40% 가까운 반응률을 보이다가 기초학력부터 완만하게 기우는 직선 형태로 감소하고 있다. 이런 현상이 보통학력 중-상 수준에서 정답률의 상승 속도

가 줄어드는 것과 관련된다.

'재원'이 들어 있는 답지 ③, ④, ⑤의 반응률을 합치면 93.33%인 것으로부터 '어떤 사건 A가 일어날 확률을 p라 하면 사건 A가 일어나지 않을 확률은 $1-p$이다.'라는 이른바 여사건의 확률에 대해서는 거의 대부분의 학생들이 잘 이해하고 있음을 알 수 있다. 그러나 반드시 일어날 사건의 확률과 절대로 일어나지 않을 사건의 확률에 대해서는 50% 가량의 학생들이 제대로 이해하지 못하고 있다고 할 수 있다. 오답지 ③의 반응률 분포를 보면 학력이 높아지더라도 절대로 일어나지 않을 사건의 확률에 대한 이해도가 빠르게 높아지지 않고 있다. 오답지 ④의 반응률은 기초학력 상 수준까지 높아졌다가 낮아지기 시작하여 보통학력에서 빠르게 낮아지고 있는데, 보통학력 중 수준까지 오답지 ③의 반응률보다 높다. 이는 학력이 낮지 않은 학생들조차 반드시 일어날 사건의 확률에 대해서 명확하게 이해하고 있지 못하다는 것과 아울러 많은 학생들이 절대로 일어나지 않을 사건의 확률보다 이것을 더 이해하고 있지 못하다는 뜻이다. 전체로 보았을 때 거의 대부분의 학생들이 간단한 여사건의 확률에 대해서는 잘 이해하고 있다. 그러므로 반드시 일어날 사건의 확률을 가르칠 때, 여사건의 확률을 구할 때 나오는 1이라는 값이 반드시 일어날 사건의 확률이라는 것으로 연관시키는 방법이 필요하다고 생각된다. 어쨌든 이 문항에서 다룬 세 개념은 서로 관련되어 있으므로 이 관련성을 잘 부각시켜 지도할 필요가 있다. 교육과정과 관련해서는 3장에서 기술한다.

차. 2013년 17번 문항: S형

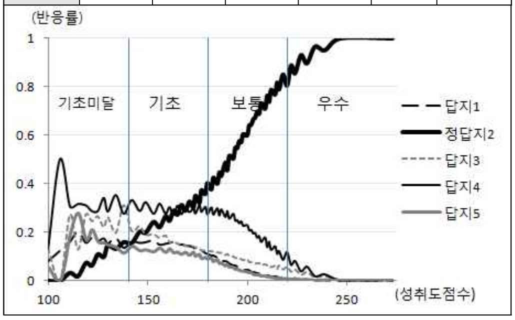
성취기준: 간단한 확률의 계산을 할 수 있다.

17. 크기가 다른 동전 2개와 주사위 1개를 동시에 던질 때, 동전은 모두 앞면이 나오고 주사위는 3의 배수의 눈이 나올 확률은?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

정답률	전체	우수	보통	기초	기미	변별도
	52.89	92.70	59.81	28.78	13.84	0.43
답지반응률(%)	①	②	③	④	⑤	무응답
	7.92	52.89	11.16	21.69	6.19	0.15



이 문항의 전체 정답률은 52.68%로 높지 않았는데, 이는 세 사건이 동시에 일어날 확률에 대한 이해도의 차이 때문인 것으로 보인다. 변별도는 0.43으로 높게 나왔는데 보통학력의 중 수준부터 높은 정답률을 보였기 때문이다. 성취수준별 정답률을 보면 이 문항은 우수학력과 보통학력을 변별하는 것으로 보이지만 그래프를 보면 보통학력의 하 수준까지 선형적으로 정답률이 높아지다가 이후로 빠르게 높아지고 있으므로 이 문항은 이 수준에서 변별력이 있다고 할 수 있다. 이는 반응률이 보통학력 하 수준까지 30% 정도를 유지하다가 이후에 빠르게 낮아지고 있는 오답지 ④의 영향일 것이다.

이 문항에서는 크기가 다른 동전 2개를 동시에 던져서 모두 앞면이 나오는 경우를 두 개의 사건이 동시에 일어나는 것으로 파악해야 하고, 여기에 주사위를 하나 던져서 3의 배수가 나오는 경우를 또 다른 사건이 동시에 일어나는 것으로 파악해야 한다. 그런데 오답지 ④에 반응한 학생들은 동전 2개를 던지는 것을 제대로 못 읽어 하나의 동전을 던지는 것으로 착각하였거나 세 사건이

동시에 일어나는 경우의 확률을 구하는 방법을 두 사건이 동시에 일어날 확률을 구하는 방법으로부터 올바르게 추론하지 못하였기 때문인 것으로 보인다. 그러므로 어떤 법칙의 확장, 곧 일반화의 방법에 대한 지도에 좀 더 주의를 기울여야 할 것이다.

Ⅲ. 결론 및 제언

이상에서 중학교 3학년 수학과 학업성취도 문항 중에서 특이 양상을 보인 분석 대상 문항의 답지 반응률 분포 그래프를 중심으로, 해당 문항이 다루고 있는 성취기준의 세부 내용이 얼마나 잘 이해되고 활용되고 있는지를 살펴보았다. 개별 문항을 분석한 곳에서 교육과정, 교수·학습, 평가에 관련된 시사점을 조금씩 제시하기는 하였으나, 여기서는 문항 분석의 내용으로부터 도출되는 시사점을 제언 형태로 먼저 제시하고, 그것을 뒷받침하는 근거를 관련된 문항 분석의 결과로부터 기술하고자 한다. 일부 문항의 경우에는 분석의 근거 자료를 제시하지 않았다. 이는 그 문항이 자료를 제시한 문항과 같은 내용을 다루고 있기 때문이다. 기술 순서는 국가 수준에서 문서 등을 바꿔야 시행이 되는 교육과정을 먼저 언급하고 다음으로 학교 수준에서 바로 시행할 수 있거나 제도 개정 등과 관계없이 실행할 수 있는 교수·학습과 교육 평가에 관한 것을 기술하기로 한다.

먼저 교육과정과 관련된 것을 두 가지로 기술한다.

첫째, 수학 용어의 경우 용어의 구성이나 표현 방식 때문에 의미가 제대로 전달되지 않는 경우가 있는데 이에 대한 대책을 마련해야 할 것이다. 소인수분해에 관한 내용을 다룬 2010년 13번과 2013년 5번을 분석한 결과로부터 소인수, 약수, 소인수분해의 개념을 분명하게 구분하여 이해하고 있지 못한 것으로 나타났다. 특히 약수(인수)와 소인수분해에서 표현되는 소인수의 거듭제곱을 혼동하는 경우가 많았다. 교과서에는 소인수는 소수인 인수이고, 인수는 약수를 일컫는다고 되어 있으므로 소인수는 소수인 약수를 말한다. 교육과정에서는 인수라는 말이 중학교 1학년에서 처음으로 나오는데, 이때 인수는 약수와 동의어로 쓰인다는 정도로만 언급하면서 사용하고 있다. 이런 까닭으로 인수와 소인수, 특히 소인수분해에서 소인수의 거듭제곱에 대해서 많은 학생들이 잘못 인식하게 된다고 할 수 있다. 개념의 의미를 낱말이 잘 표현해주도록 이름이 대상의 특징을 잘 들어내어야 하는데 ‘소인수’는 그런 역할에 미흡한 면이 있다. 그러므로 교육과정에서 ‘소인수’라는 용어를 ‘소수인 약수’라고 풀어 쓰거나 ‘소약수’라는 말로 사용하는 것을 고려해 봄직하다. 다른 방법으로는 수에서는 ‘약수’만을 쓰고, 문자로 표현된 식에서는 ‘인수’라는 말을 쓰거나 인수에는 수라는 말이 들어 있으므로 ‘수’에서는 ‘인수’를 사용하고 문자로 표현된 식에서는 ‘인자’라는 용어를 사용하는 것도 고려해봄직하다. 이에 덧붙여 ‘소인수분해’라는 용어도 함께 고려해야 한다. 어떠한 방식으로든 학생들에게 혼란을 줄여주는 쪽으로 용어를 정비하는 연구가 필요하다.

둘째, 확률과 통계 영역에서 반드시 일어날 사건의 확률, 절대로 일어나지 않을 사건의 확률에 대해서는 교육과정에서 위계의 조정을 고려할 필요가 있다. 2011년 3번 문항에 대한 반응 결과를 분석한 결과, 이 두 개념에 대해서 많은 학생들이 제대로 이해하고 있지 못한 것으로 나타났다. 반드시 일어날 사건의 확률에 대해서는 학력이 낮지 않은 학생들조차 명확하게 이해하지 못하고 있다. 더욱이 이것에 대해서는 많은 학생들이 절대로 일어나지 않을 사건의 확률보다 이해하지 못하고 있는 것으로 나타났다. 그렇기 때문에 이 두 개념에 대해서 근본적인 대책을 강구해야 할 것이라고 판

단된다. 하나의 방편으로는 중학교 교육과정에서 절대로 일어나지 않을 사건의 확률과 어떤 사건에 대해서 그 사건이 반드시 일어날 확률을 제외하고, 대신에 이것을 고등학교 교육과정으로 옮기는 것도 고려해 볼만하다. 실제로 이 두 개념은 실생활에서 그다지 적용(또는 사용)되지 않으므로, 수학적 엄밀함을 강조하지 않아도 되는 중학교 수준에서는 이해하기 어려운 개념을 굳이 가르칠 필요가 없기 때문이다.

다음으로 교수·학습에 관해서는 다섯 가지로 정리하고자 한다.

첫째, 속도(또는 속력) 개념에 대해서 정확히 이해하고 적용할 수 있도록 하는 것이 필요하다. 이 개념은 일상생활에서 자주 듣거나 경험하지만 이것을 수학적(또는 과학적)인 개념으로 제대로 이해하지 못하고 있는 학생이 매우 많았다. 문자와 식에서 출제된 2010년 7번과 함수에서 출제된 2012년 7번 문항에 대한 반응을 분석한 결과로부터 속도나 시간 가운데 하나가 문자일 때 그 문자를 사용해서 거리를 나타내는 식을 제대로 표현하지 못하는 것으로 나타났다. 속도(또는 속력)과 이에 관련된 내용은 방정식이나 함수에서 비나 비율과 관련되면서 흔히 다루어진다. 그런데 비의 하나인 속도를 비 개념과 별개의 것으로 다루면서, 대부분 난도가 높은 응용문제의 소재로서만 활용하는 경향이 있다. 그러므로 이 개념을 다루는 초기에 일상개념으로서 속도와 과학개념으로서 속도 개념을 서로 보완하면서 통합하여 이해할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

둘째, 일차함수에서 일차항의 계수와 상수항의 의미를 그래프와 관련지어 정확히 이해할 수 있도록 해야 할 것이다. 2010년 12번과 2012년 12번 문항에 대한 반응을 분석한 결과로부터 일차항의 계수와 직선의 방향(함수의 증가와 감소), 직선의 평행이동 또는 두 직선의 위치와 교점의 관계, 그래프가 축과 만나는 점의 좌표와 상수항의 관계 등을 제대로 이해하고 있지 못함을 알 수 있었다. 이와 같은 것들은 대부분 그래프를 바르게 그릴 줄 알면 해결될 것이다. 이때 그래프의 형태를 일차함수의 계수(상수항을 포함)와 관련지어 파악하는 것이 열쇠이다. 그러므로 일차함수의 그래프를 함수 식과 관련지어 올바르게 해석하고 적용하는 능력을 키우기 위해서는 일차항의 계수(직선의 기울기)와 상수항(y 절편)이 갖는 의미를 명확히 이해할 수 있는 방안을 강구해야 할 것이다.

셋째, 약수와 소수, 소인수, 소인수분해라는 용어의 뜻을 바르게 구별하여 알 수 있도록 해야 할 것이다. 약수는 소수 또는 소수의 곱(합성수)으로 표현되는 것이고, 소인수는 소수인 인수(약수)이며 소인수분해는 소수의 거듭제곱의 곱으로 표현되는 것이다. 이 개념들을 다룬 2010년 13번과 2013년 5번 문항에 대한 반응을 분석한 결과를 보면 소수를 약수로 잘못 알고 있든지, 소인수에 1과 소수의 거듭제곱이 포함되는 것으로 알고 있든지, 소인수분해할 때 소수의 거듭제곱이 아닌 합성수도 인수가 된다고 잘못 알고 있는 경우가 매우 많은 것으로 나타났다. 그러므로 이러한 용어들의 차이점을 분명히 드러냄으로써 그것들을 구별하여 이해하고 적용할 수 있도록 해야 할 것이다.

넷째, 입체도형을 분류하는 기준과 용어 사이의 관계를 명확히 이해시키고, 용어로부터 해당 입체도형을 떠올릴 수 있도록 해야 할 것이다. 한 문항이기는 하지만 2010년 16번에 대한 반응을 보면 입체도형을 일컫는 여러 용어, 특히 다면체의 이름에서 학생들이 혼란을 겪고 있는 것으로 나타났다. 학생들은 각뿔대를 각기둥의 하나로 생각하고 있는 경우가 있는데 이것은 일상생활과 수학에서 사용하는 기둥을 명확하게 구별하지 못하여 나타난 현상일 수도 있다. 일상생활에서는 윗면보다 아랫면이 넓은 기둥도 있기 때문이다. 그러므로 닮음과 마찬가지로 일상어와 수학 용어

사이의 차이를 분명하게 이해시키는 것이 필요하다. 다른 한편 정사면체는 정사각형을 면으로 가진 입체이고, 정사각형이 면으로 된 입체는 정육면체라고 하는 식으로 추론하여 두 입체를 혼동하는 경우도 있었다. 그러므로 다면체의 이름에서 특징을 정확히 끌어낼 수 있도록 해야 할 것이다.

다섯째, 입체도형의 부피나 겉넓이를 단순히 기억하고 있는 공식으로 구하게 하지 않도록 해야 할 것이다. 2012년 22번과 2013년 26번 문항에 대한 학생들의 반응을 분석한 결과를 보면 공식을 잘못 알고 사용한다든지, 부피와 겉넓이를 혼용해서 구하여 사용한다든지, 문항에 제시된 수를 가공하지 않고 공식의 문자에 그대로 대입하거나 다른 수를 대입하고 계산한 경우가 많았다. 입체를 평면에 그려 놓은 것으로부터 유추하기 때문에 뿔의 부피가 기둥 부피의 1/3이 된다는 사실을 잘 이해하지 못하는 것으로 나타났다. 그러므로 입체에 관한 직관을 키우는 방안을 포함하여 기둥과 뿔의 관계를 정확히 이해시키는 방안을 강구함으로써 약간의 추론을 거쳐 뿔의 부피를 구할 수 있도록 해야 할 것이다.

마지막으로 교육평가 측면에서 한 가지 제언을 하고자 한다.

문항에 사용되는 표현을 좀 더 섬세하게 구성하여 학생들이 더욱 쉽게 이해하도록 해야 할 것이다. 이러한 의견이 문항 분석을 의뢰했던 교사들의 협의회와 김화경(2014: p. 215)에 의하여 함수에서 출제된 2012년 7번 문항에 대하여 개진되었다. 이 문항에서 <보기> ㄱ의 "자연수 x의 배수가 되는 수 y"가 무엇을 의미하는지가 명확하게 파악되지 않고, 이에 따라 y가 x에 관한 함수인지를 판단하는 데에 어려움이 많았다고 한다. <보기>의 ㄱ을 식으로 나타내면 $y=kx$와 같이 표현되기 때문에 y는 x의 함수라고 판단했을 가능성이 높았을 것이라고 한다. 그러나 이것은 여러 교과서에서도 다루어지는 것[4]으로서 "y가 x의 함수인 것을 찾으시오."라는 전제 아래 "자연수 x의 배수 y"가 함수인지를 묻고 있어, 본 문항과 다를 바 없다. 여러 교과에서 기술된 표현을 사용했음에도 x의 배수를 kx와 같이 나타내고서 $y=kx$라는 형태가 일차함수의 형태와 같으니까, 이것을 일차함수라고 판단한 것은 잘못되었다고 할 수 있다. 그렇다 하더라도 오해의 여지가 생기지 않도록 문장을 구상하는 데에 좀 더 노력을 기울여야 할 것이다.

참고 문헌

강옥기, 권연근, 이형주, 유희경, 윤성혁, 김태희, 김수철, 유승연, 윤혜미(2014). **중학교 수학1**. 두산동아.

고호경, 김응환, 양순열, 권세화, 권순학, 정낙연, 장인선, 임유원, 최수영, 이성재, 노솔, 백형윤, 홍창섭(2013). **중학교 수학1**. 교학사.

김경희, 최인봉, 김완수, 송미영, 신진아, 박인용, 김종훈, 김성훈(2012). **2011년 국가수준 학업성취도평가 결과: 중학교 학업성취도 변화 추이 분석**. 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2012-1-2.

김동영, 김도남, 김영란, 김현정, 이정우, 서민철, 조윤동, 이광상, 이인호, 심재호, 배주경, 정기문, 최원호, 박영신(2013c). **2013년 국가수준 학업성취도 평가 출제 연구**. 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2013-4.

김화경(2014). '수학과 학업성취도 정오답지 반응률 분포에 기반을 둔 학업성취도 특성 분석'에 대한 토론. **국가수준 학업성취도 평가 결과에 따른 학교교육의 진단과 과제**. 한국교육과정평가원 연구자료 ORM 2014-71.

4) 강옥기 외(2014), 고호경 외(2013), 류희찬 외(2014), 이강섭 외(2014) 등 참조

류희찬, 류성림, 이경화, 신보미, 강순모, 윤옥교, 김명수, 조성오, 천태선, 김철호(2014). **중학교 수학1**. 천재교과서.

이인호, 조윤동, 이광상(2014). **2013년 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석 - 수학 -**. 한국교육과정평가원 연구보고 ORM 2014-30-3.

이인호, 김경주, 이상일, 이정우, 서민철, 조윤동, 이광상, 김현경, 배주경, 황필아, 심재호, 이기영, 이봉우, 정기문(2014). **답지 반응률 분포 곡선을 활용한 중학교 3학년 교과별 학업성취 특성 심층 분석**. 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2014-5-2

An Analysis about the Features of Mathematical Learning of Middle School Students through the Distribution Graphs of the Responses Percentages in National Assessment of Educational Achievement

Jo, Yun Dong (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)
Lee, Kwang Sang (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)

This paper aims to explore what we can improve in the curriculum, teaching-learning, and evaluation on the bases of the analyses of multiple-choice items set in National Assessment of Educational Achievement. For this goal, by using the distribution curves of the responses percentages, we will grasp the features of educational achievement which appear to students through an in-depth analysis about not only item itself but also the contents included in particular distracters. These analyses provide more information than the descriptive statistical values such as the mean of correct answer percentage and the discrimination of whole group and the mean of responses percentages of replies of subgroups. Because the distribution curves of the responses percentages reveal the transition from the lowest to the highest educational achievement very well. From these analyses we acquire the implications about the concept of prime factor or prime factorization, ratio(proportion) such as velocity, linear function, volume of cone, properties of solid figure, and probabilities of empty event and total event.

* Key Words : Item analysis(문항 분석), distribution graphs of the responses percentages(답지 반응률 분포 그래프)

논문접수 : 2015. 1. 9
논문수정 : 2015. 2. 10
심사완료 : 2015. 2. 12