Journal of the Korean Data & Information Science Society
2015, **26**(2), 323–334
http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2015.26.2.323
한국데이터정보과학회지

원-팩터 모형을 이용한 KOSPI200지수 구성종목의 최적 포트폴리오 구성 및 VaR 측정†

고광이[1] · 손영숙[2]

[12]전남대학교 통계학과

접수 2014년 12월 30일, 수정 2015년 1월 20일, 게재확정 2015년 2월 6일

요 약

J. P. Morgan의 RiskMetrics을 기반으로 하는 현행 VaR 모형은 구조적으로 예측된 미래의 경기상황을 반영할 수가 없다. 본 연구에서는 주가의 변동요인인 워너 확률과정을 기업의 고유요인과 경기변동요인으로 구분한 원-팩터 (One-factor) 모형을 제안하여 미래 경기변동 공통요인을 미리 예측하여 반영함에 따라 장기적인 주식 보유기간에도 선제적인 리스크관리를 실시할 수 있도록 한다. 또한 미래 경기변동요인이 예측값으로 고정됨에 따라 포트폴리오를 구성하는 주가들이 서로 독립성을 만족하게 되여 포트폴리오의 분산을 최소화하는 각 주식의 투자금액을 결정하는 것은 물론 포트폴리오 VaR가 개별 VaR의 합으로 분해되어 목표로 하는 최대손실금액에 따른 포트폴리오의 구성을 효율적으로 실시할 수가 있다.

주요용어: 경기변동요인, 원-팩터모형, 위너확률과정, 지수가중이동평균법, 포트폴리오, 확률미분방정식.

1. 서론

시장위험을 관리하기 위한 VaR (value at risk) 기법은 1994년에 J. P. Morgan사의 RiskMetrics 모형에서 소개된 이후에 바젤위원회에서 VaR에 근거한 내부모형법 (internal model approach)을 이용하여 소요자기자본을 산출할 것을 권고함에 따라 그의 중요성이 더욱 증가되었다 (BCBS 1995, 2005, Jorion 2007, Bessis 2002). VaR은 정상적인 시장상황 하에서 보유하고 있는 금융자산의 목표 보유기간 (target horizon) 동안 금리, 주가 및 환율이 불리한 방향으로 변동하여 특정한 신뢰수준으로 가격이 하락하여 발생하는 손실을 의미한다. 기업의 주가는 해당 기업의 고유요인은 물론 모든 기업의 주가에 공통적으로 영향을 미치는 경기변동요인에 의해 결정되지만, J. P. Morgan의 RiskMetrics을 기반으로 하는 현행 VaR 모형은 원래 주식 보유기간이 1일의 가격변동에 따른 리스크 (DEAR; daily earnings at risk)을 측정하기 위해 개발하였기 때문에 예측된 미래의 경기상황을 구조적으로 반영할 수가 없다. 그러나 주식의 목표 보유기간이 길어질수록 개별 기업의 고유요인은 물론 경기변동요인의 변동성이 증가하여 VaR를 초과하는 손실사례가 발생할 수 있다 (Neftci, 2000; Johansson 등, 1999; Park 등, 2013; Byun 등, 2013).

---

† 이 논문은 2011년도 정부 (교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임 (NRF-2011-0022864).

[1] (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300, 전남대학교 통계학과, 산학중점교수.
[2] 교신저자: (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300, 전남대학교 통계학과, 교수. E-mail: ysson@jnu.ac.kr

본 연구에서는 주가의 변동요인을 기업의 고유요인과 경기변동요인으로 구분한 원-팩터 (One-factor) 모형을 제안한다. 이와 같은 원-팩터 모형으로부터 현재 시점에서 미래 경기변동 공통요인을 예측하여 반영함으로써 선제적인 리스크관리가 가능하도록 하기 위해서다. 미래 시점의 주가의 분포에서 분포의 중심위치가 변하지 않는 현행 VaR 모형과는 달리 원-팩터 VaR 모형은 미래 예측되는 경기상황에 따라 분포의 중심위치가 이동한다. 따라서 미래 경기상황이 악화되어질 것으로 예상되는 경우에는 분포의 중심위치가 해당 경기상황으로 이동하므로 현행 VaR 모형에 비해 VaR을 초과하는 손실사례에 대한 문제점을 개선할 수 있을 것으로 판단된다.

일반적으로 기업 고유요인은 다른 기업의 주가 변화에 영향을 미치지 않고 서로 독립이지만 경기변동요인은 모든 기업의 주가에 공통적으로 영향을 미치기 때문에 서로 상관되어 있다. 따라서 개의 주식으로 구성된 포트폴리오에 대해서 현행 모형은 $n(n-1)/2$개의 상관계수를 추정하여야 하며, 만일 주식 수 이 증가하는 경우에는 상관계수를 추정하는 부담도 크게 증가하기 마련이다. 그러나 원-팩터 모형에서는 미래 시점의 경기변동요인이 예측값으로 고정되기 때문에 포트폴리오 내의 주식들의 주가는 서로 독립이어서 상관관계가 존재하지 않는다. 이와 같이 포트폴리오를 구성하는 주식의 주가들이 서로 독립성을 만족하는 경우에는 상관계수를 추정하는 부담을 제거하는 효과 이외에도 포트폴리오의 분산을 최소화하는 각 주식의 투자금액을 쉽게 결정할 수가 있으며 또한 전체 포트폴리오 VaR가 각 개별 기업의 VaR의 합으로 분해된다. 따라서 개별 VaR의 기여도를 정확하게 검출하여 목표로 하는 최대손실금액에 따른 포트폴리오의 구성을 효율적으로 실시할 수가 있다. 이와 같이 본 연구에서 제안하는 원-팩터 모형은 특히 장기적으로 주식을 보유하는 경우에도 미래의 경기상황을 미리 예측하여 반영함으로써 선제적으로 정확한 리스크량을 측정하며, 목표로 하는 최대손실금액에 대해 효율적으로 포트폴리오를 구성할 수가 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2절에서는 단일 주식에 대한 원-팩터 모형의 이론적 내용을 설명하고 포트폴리오에 대한 원-팩터 VaR 모형의 성질을 살펴본다. 제3절에서는 원-팩터 모형의 이론적 사실에 대한 실증분석으로 국내 S사의 사례를 통해서 선제적인 리스크관리 여부를 살펴보고, 또한 KOSPI200지수의 편입종목을 사례로 포트폴리오의 효율성을 알아본다. 원-팩터 모형에 대한 종합적인 결론은 제4절에서 제시한다.

2. 본론

2.1. 원-팩터 모형

어느 t시점의 주가 $S(t)$에 대해 무한히 작은 시간증분 dt에 따른 주가 $S(t+dt)$의 순간수익률이 다음과 같은 일반화 위너확률과정 (generalized Wiener stochastic process)을 따른다고 가정하자.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t). \tag{2.1}$$

여기서 μ와 σ는 각각 주가 수익률의 평균 (drift)과 변동성 (volatility)을 나타내는 모수이고, $dW(t)$은 시간증분 dt에 따른 위너확률과정 (Wiener stochastic process)을 만족하는 확률변수이다. 식 (2.1)에서 $S(t)$을 로그주가 $lnS(t)$로 변환하면, Ito정리에 의해 다음과 같은 확률미분방정식을 따른다.

$$dlnS(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW(t).$$

이와 같은 확률미분방정식으로부터 현재 0시점의 주가 $S(0)$에 대한 미래 t시점의 주가 $S(t)$의 로그수익

률 $r(t)$은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} r(t) &= \ln \frac{S(t)}{S(0)} \\ &= \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \int_0^t \sigma dW \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t). \end{aligned}$$

여기서 $W(t)$는 정규분포 $N(0,t)$를 따르는 확률변수로써 표준정규분포를 따르는 확률변수 $Z(t)$에 의해 로그수익률 $r(t)$를 다음과 같이 표현하기로 하자.

$$r(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma\sqrt{t}Z(t). \tag{2.2}$$

기업의 주가 수익률은 기업 내부의 고유요인은 물론 모든 기업의 주가에 영향을 미치는 외부 경기변동요인에 의해 결정된다. 따라서 본 연구에서는 표준정규분포를 따르는 확률변수 $Z(t)$을 모든 기업의 주가에 공통적으로 영향을 미치는 경기변동요인 또는 체계적요인 (systematic risk factor) $X(t)$와 해당 기업의 주가에 대해서만 영향을 미치는 고유요인 (idiosyncratic risk factor) $Y(t)$로 구분하기로 한다 (Gordy 2003).

$$Z(t) = \sqrt{\rho}X(t) + \sqrt{1-\rho}Y(t).$$

여기서 ρ은 주가 수익률에 대한 경기변동요인 $X(t)$의 영향력을 의미한다. 또한 표준정규분포를 따르는 경기변동요인 $X(t)$와 고유요인 $Y(t)$은 서로 독립이고, 기업의 고유요인 $Y(t)$은 해당 기업의 주가 수익률에 대해서만 영향을 미치고 다른 기업의 고유요인과는 서로 독립이라고 가정한다. 이와 같이 경기변동요인 $X(t)$와 고유요인 $Y(t)$에 의한 현재 0시점 주가 $S(0)$에 대해서 미래 t시점의 주가 $S(t)$에 관한 다음과 같은 확률모형을 원-팩터 모형이라 하자.

$$S(t) = S(0)exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma\sqrt{t}\left(\sqrt{\rho}X(t) + \sqrt{1-\rho}Y(t)\right)\right]. \tag{2.3}$$

이와 같은 원-팩터 모형으로부터 현재 0시점에서 미래 t시점의 경기변동요인 $X(t)$를 미리 예측하여 향후 예측되는 경기상황에 따라 선제적으로 리스크관리를 실시하고자 하는 것이 본 연구의 목적이다. 따라서 현재 0시점에서 미래 t시점의 경기변동요인 $X(t)$가 예측값 x으로 주어진 경우에 미래 t시점의 로그수익률을 $r(t)|x$라 하자.

$$r(t)|x = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma\sqrt{t}\left(\sqrt{\rho}x + \sqrt{1-\rho}Y(t)\right).$$

그러면 로그주가 $lnS(t)|x$는 평균과 분산이 각각 m과 w인 정규분포를 따른다.

$$\begin{aligned} m &= E[r(t)|x] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma\sqrt{t}\sqrt{\rho}x, \\ w &= Var[r(t)|x] = \sigma^2 t(1-\rho). \end{aligned}$$

따라서 미래 t시점의 경기변동요인 $X(t)$의 예측값이 x으로 주어진 경우에 미래 t시점 주가 $S(t)|x$는

$$S(t)|x = S(0)exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\left(\sqrt{\rho}x + \sqrt{1-\rho}Y(t)\right)\right] \tag{2.4}$$

평균과 분산이 각각 다음과 같은 로그정규분포를 따른다.

$$E[S(t)|x] = S(0)e^{\left(m+\frac{w}{2}\right)},$$
$$Var[S(t)|x] = S(0)^2\left(e^w - 1\right)e^{2m+w}.$$

이와 같이 로그정규분포를 따르는 원-팩터 모형 $S(t)|x$으로부터 t시점 평균수익률 $E[r(t)|x]$에 대해 수익률이 확률 $1-\alpha$을 만족하는 임계값 $r_\alpha(t)|x$으로 주가가 하락하여 발생한 손실을 원-팩터 $VaR(t)$로 정의하기로 하자.

$$VaR(t) = S(0)\left(e^{E[r(t)|x]} - e^{r_\alpha(t)|x}\right). \tag{2.5}$$

여기서 표준정규분포를 따르는 확률변수 $Y(t)$에 대하여 확률 $1-\alpha$을 만족하는 임계값을 y_α라 하면

$$1-\alpha = P(Y(t) \geq y_\alpha)$$

원-팩터 모형으로부터 확률 $1-\alpha$을 만족하는 수익률 임계값 $r_\alpha(t)|x$은 다음과 같이 주어진다.

$$r_\alpha(t)|x = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\left(\sqrt{\rho}x + \sqrt{1-\rho}y_\alpha\right).$$

2.2. 원-팩터 포트폴리오 모형

어느 n개의 주식으로 구성된 포트폴리오에 대해 각 주식의 주가변화를 가장 잘 설명하는 l개의 경기변동요인 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_l(t)$가 선택되었다고 가정하고, 선택된 l개의 경기변동요인에 따라 각 그룹의 주식 수는 $n_1, n_2, \cdots, n_l$으로 분류되었다고 하자. 또한 현재 0시점에서 전체 n개 주식 포트폴리오에 대한 총투자금액 $P(0)$에 대해 어느 k그룹 내 주식 i의 투자금액 $P_i^k(0)$의 투자비율을 w_i^k라 하자.

$$w_i^k = \frac{P_i^k(0)}{P(0)}.$$

이와 같이 이미 고정되어 있는 투자비율에 의해 어느 t시점 포트폴리오의 가치 $P(t)$를 다음과 같이 나타내기로 하자.

$$P(t) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} P_i^k(t) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k P(t).$$

그러면 t시점에서 무한히 작은 시간증분 dt에 따른 포트폴리오의 가치 $P(t+dt)$를 각 주식에 대한 투자비율로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P(t+dt) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k P(t+dt). \tag{2.6}$$

또한 식 (2.6)은 다음과 같은 형태로 변환할 수 있으므로

$$\begin{aligned}
P(t+dt) &= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k P(t+dt) \\
&= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k P(t)\frac{w_i^k P(t+dt)}{w_i^k P(t)} \\
&= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k P(t)\left(1+\frac{w_i^k P(t+dt)-w_i^k P(t)}{w_i^k P(t)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k P(t) + \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k P(t)\frac{P_i^k(t+dt)-P_i^k(t)}{P_i^k(t)} \\
&= P(t) + P(t)\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k \frac{dP_i^k(t)}{P_i^k(t)}
\end{aligned}$$

t시점 총투자금액 $P(t)$에 관한 확률미분방정식은 전체 n개 주식의 각 투자금액에 대한 확률미분방정식의 투자비율 가중합으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{dP(t)}{P(t)} &= \frac{P(t+dt)-P(t)}{P(t)} \\
&= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k \frac{dP_i^k(t)}{P_i^k(t)} \\
&= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k \left(\mu_i^k dt + \sigma_i^k dW_i^k(t)\right).
\end{aligned}$$

여기서 μ_i^k와 σ_i^k는 각 주식 수익률의 평균과 변동성이고, 또한 $dW_i^k(t)$은 각 주식의 시간증분 dt에 따른 위너확률과정을 만족하는 확률변수이다. 따라서 총투자금액 $P(t)$을 로그변환하면, Ito정리에 의해 시간증분 dt에 따른 순간 로그수익률 $d\ln P(t)$은 각 주식의 순간 로그수익률에 대한 투자비율 가중합이 된다.

$$\begin{aligned}
d\ln P(t) &= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k d\ln P_i^k(t) \\
&= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k \left(\left(\mu_i^k - \frac{(\sigma_i^k)^2}{2}\right)dt + \sigma_i^k dW_i^k(t)\right).
\end{aligned}$$

따라서 현재 0시점 총투자금액 $P(0)$에 대한 t시점 금액 $P(t)$의 원-팩터 포트폴리오 로그수익률 $r_p(t)$는 n개 주식 로그수익률의 투자비율 가중합으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
r_p(t) &= \ln\frac{P(t)}{P(0)} \\
&= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} w_i^k r_i^k(t).
\end{aligned}$$

여기서 $r_i^k(t)$는 원-팩터 모형으로부터 k그룹 내 주식 i의 로그수익률이다.

$$
\begin{aligned}
r_i^k(t) &= \ln \frac{P_i^k(t)}{P_i^k(0)} \\
&= \left(\mu_i^k - \frac{\sigma_i^{k^2}}{2}\right) t + \sigma_i^k \sqrt{t} \left(\sqrt{\rho_i^k} X_k(t) + \sqrt{1-\rho_i^k} Y_i^k(t)\right).
\end{aligned}
$$

이와 같은 원-팩터 포트폴리오 로그수익률에 대한 공분산행렬을 고려하기로 하자. 만일 그룹이 동일한 경우에는 경기변동요인이 $X_a(t)$로 동일하므로, 동일 그룹 a내의 주식 i와 주식 j의 수익률의 공분산은 다음과 같고

$$
Cov(r_i^a(t), r_j^a(t)) = \sigma_i^a \sigma_j^a \sqrt{\rho_i^a} \sqrt{\rho_j^a} t
$$

동일 그룹 a내의 수익률에 대한 공분산 행렬 Σ^{aa}은 다음과 같다.

$$
\Sigma^{aa} = \begin{bmatrix}
(\sigma_1^a)^2 & \sigma_1^a \sigma_2^a \sqrt{\rho_1^a}\sqrt{\rho_2^a} & \cdots & \sigma_1^a \sigma_{n_a}^a \sqrt{\rho_1^a}\sqrt{\rho_{n_a}^a} \\
\sigma_2^a \sigma_1^a \sqrt{\rho_2^a}\sqrt{\rho_1^a} & (\sigma_2^a)^2 & \cdots & \sigma_2^a \sigma_{n_a}^a \sqrt{\rho_2^a}\sqrt{\rho_{n_a}^a} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\sigma_{n_a}^a \sigma_1^a \sqrt{\rho_{n_a}^a}\sqrt{\rho_1^a} & \sigma_{n_a}^a \sigma_2^a \sqrt{\rho_{n_a}^a}\sqrt{\rho_2^a} & \cdots & (\sigma_{n_a}^a)^2
\end{bmatrix} t.
$$

만일 그룹이 서로 다른 a그룹과 b그룹의 경기변동요인 $X_a(t)$와 $X_b(t)$에 대한 공분산을 σ_{ab}라 하면,

$$
Cov(X_a(t), X_b(t)) = \sigma_{ab}
$$

a그룹 내의 주식 i와 b그룹 내의 주식 j에 대한 수익률의 공분산은 다음과 같다.

$$
Cov(r_i^a(t), r_j^b(t)) = \sigma_i^a \sigma_j^b \sqrt{\rho_i^a} \sqrt{\rho_j^b} \sigma_{ab} t.
$$

따라서 a그룹과 b그룹 내의 수익률에 대한 공분산 행렬 Σ^{ab}은 다음과 같다.

$$
\Sigma^{ab} = \begin{bmatrix}
\sigma_1^a \sigma_1^b \sqrt{\rho_1^a}\sqrt{\rho_1^b} & \sigma_1^a \sigma_2^b \sqrt{\rho_1^a}\sqrt{\rho_2^b} & \cdots & \sigma_1^a \sigma_{n_b}^b \sqrt{\rho_1^a}\sqrt{\rho_{n_b}^b} \\
\sigma_2^a \sigma_1^b \sqrt{\rho_2^a}\sqrt{\rho_1^b} & \sigma_2^a \sigma_2^b \sqrt{\rho_2^a}\sqrt{\rho_2^b} & \cdots & \sigma_2^a \sigma_{n_b}^b \sqrt{\rho_2^a}\sqrt{\rho_{n_b}^b} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\sigma_{n_a}^a \sigma_1^b \sqrt{\rho_{n_a}^a}\sqrt{\rho_1^b} & \sigma_{n_a}^a \sigma_2^b \sqrt{\rho_{n_a}^a}\sqrt{\rho_2^b} & \cdots & \sigma_{n_a}^a \sigma_{n_b}^b \sqrt{\rho_{n_a}^a}\sqrt{\rho_{n_b}^b}
\end{bmatrix} \sigma_{ab} t.
$$

본 연구에서는 선제적 리스크관리를 위해서 현재 0시점에서 l개 그룹의 미래 t시점 경기변동요인 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_l(t)$에 대한 예측값이 $x_1, x_2, \cdots, x_l$으로 주어진 것으로 가정한다. 그러면 포트폴리오 내의 수익률들은 서로 독립성을 만족하게 되어 원-팩터 포트폴리오 수익률의 공분산행렬 Σ_p은 다음과 같이 각 수익률의 분산에 대한 제곱가중합 형태로 유도된다.

$$
\begin{aligned}
Var(r_p(t)|\boldsymbol{x}) &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n_k} (w_i^k)^2 Var(r_i^k(t)|x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n_k} (w_i^k)^2 (\sigma_i^k)^2 t (1-\rho_i^k).
\end{aligned}
$$

이와 같이 포트폴리오를 구성하는 n개 수익률들이 서로 독립인 경우에 포트폴리오의 수익률 분산에 관한 Laglange함수에 대해

$$\Lambda(\boldsymbol{w},\lambda)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}(w_i^k)^2Var(r_i^k(t)|x_k)+\lambda\left(\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}w_i^k-1\right)$$

가중치의 합이 1을 만족하는 조건에서 원-팩터 포트폴리오 수익률의 분산 $Var(r_p(t)|\boldsymbol{x})$을 최소화하는 최적 가중치는 다음과 같이 유도된다.

$$w_i^k=\frac{\tau\left(r_i^k(t)|x_k\right)}{\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}\tau\left(r_i^k(t)|x_k\right)}.$$

여기서 $\tau\left(r_i^k(t)|x_k\right)=\frac{1}{Var\left(r_i^k(t)|x_k\right)}=\frac{1}{(\sigma_i^k)^2t(1-\rho_i^k)}$이다. 한편 원-팩터 포트폴리오 기대수익률은 다음과 같고

$$E[r_p(t)|\boldsymbol{x}]=\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}w_i^k\left[\left(\mu_i^k-\frac{(\sigma_i^k)^2}{2}\right)t+\sigma_i^k\sqrt{t}\sqrt{\rho_i^k}x_k\right]$$

포트폴리오 내의 모든 수익률들의 독립성을 만족하게 되어 확률 $1-\alpha$을 만족하는 원-팩터 포트폴리오 수익률의 임계값 $r_p^{1-\alpha}(t)|\boldsymbol{x}$은 각 수익률의 확률 $1-\alpha$을 만족하는 임계값의 가중합으로 다음과 같이 주어진다.

$$r_p^{1-\alpha}(t)|\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_l}w_i^k\left[\left(\mu_i^k-\frac{(\sigma_i^k)^2}{2}\right)t+\sigma_i^k\sqrt{t}\left(\sqrt{\rho_i^k}x_k+\sqrt{1-\rho_i^k}y_\alpha\right)\right].$$

여기서 y_α는 표준정규분포를 따르는 각 주식의 고유요인 $Y_i^k(t)$가 확률 $1-\alpha$을 만족하는 임계값을 나타낸다.

$$1-\alpha=P(Y_i^k(t)\geq y_\alpha).$$

따라서 n개의 주식으로 구성된 포트폴리오에 대해 현재 0시점에서 l개 그룹의 미래 t시점 경기변동요인 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_l(t)$에 대한 예측값으로 $x_1,x_2,\cdots,x_l$이 주어진 경우에 현재 0시점 총투자금액 $P(0)$에 대한 미래 t시점 원-팩터 포트폴리오 기대수익률 $E[r_p(t)|\boldsymbol{x}]$로부터 포트폴리오 수익률이 확률 $1-\alpha$을 만족하는 임계값 $r_p^{1-\alpha}(t)|\boldsymbol{x}$으로 주가가 하락하여 발생한 손실을 의미하는 원-팩터 포트폴리오 $VaR_p(t)$는 다음과 같이 정의된다.

$$VaR_p(t)=P(0)\left(e^{E[r_p(t)|\boldsymbol{x}]}-e^{r_p^{1-\alpha}(t)|\boldsymbol{x}}\right). \tag{2.7}$$

이와 같은 원-팩터 포트폴리오 $VaR_p(t)$는 개별 수익률들이 서로 독립성을 만족하므로 개별 원-팩터 VaR의 합으로 분해된다.

$$VaR_p(t)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k}VaR_i^k(t).$$

여기서 $VaR_i^k(t)$는 k그룹 내의 i주식에 대한 투자금액 $P_i^k(0)$에 대한 신뢰수준 $1-\alpha$의 개별 원-팩터 VaR를 나타낸다.

$$VaR_i^k(t)=P_i^k(0)\left(e^{E[r_i^k(t)|x_k]}-e^{r_{i(\alpha)}^k(t)|x_k}\right).$$

3. 실증분석

원-팩터 모형으로부터 미래의 경기변동요인을 예측하여 선제적인 리스크관리가 가능한지를 살펴보기 위해 수익률의 평균을 0으로 가정한 다음과 같은 현행 모형과

$$S(t)=S(0)exp(\sqrt{t}Z(t))$$

미래 t시점 경기변동요인이 x로 주어진 다음과 같은 원-팩터 모형을 적용하여 비교하기로 한다.

$$S(t)|x = S(0)exp\left[\sigma\sqrt{t}\left(\sqrt{\rho}x + \sqrt{1-\rho}Y(t)\right)\right].$$

국내 S사의 주가는 2014년 8월말 1,234,000원이고, 소멸계수 0.94를 이용한 지수가중이동평균법 (EWMA : exponentially weighted moving average)으로 월별 주가 변동성은 0.00441로 추정되었다.

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2.$$

여기서 λ는 소멸계수이고, $r_t - 1$은 $t-1$시점 로그수익률이다.

S사의 주가변동에 대한 경기변동요인은 경제심리지수 (ESI; economic sentiment index)를 이용하였으며, 월별 주가변동에 대한 경제심리지수의 회귀 결정계수은 0.232274로써 ESI에 의한 S사의 주가변동은 약 23% 정도를 설명하는 것으로 비교적 높게 나타났다. 이와 같은 추정치를 이용하여 현행 모형에 의한 3개월 이후 신뢰수준 95%의 VaR는 경기변동과는 관계없이 항상 15,411원이다. 그러나 원-팩터 모형에서는 3개월 이후 경제심리지수에 대한 예측값에 따라 95% VaR는 서로 다르게 나타난다.

Table 3.1 Comparison of VaR for the predicted value of ESI

ESI(x)	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5
95% VaR	20,236	17,999	15,759	13,514	11,265	9,012	6,754

즉 3개월 이후 표준화 경제심리지수가 0.0보다 작아 경기가 악화되어질 것으로 예상되는 경우에는 원-팩터 모형의 VaR는 현행 모형의 VaR보다 크게 나타나고, 반대로 3개월 이후 표준화 경제심리지수가 0.0보다 커서 경기가 좋아질 것으로 예상되는 경우에는 원-팩터 모형의 VaR는 현행 모형의 VaR보다 작게 나타난다. 이와 같이 현행 모형은 경기변동과 관계없이 항상 동일한 VaR을 갖지만, 원-팩터 모형은 향후 예상되는 경기상황에 따라서 분포의 중심위치가 이동하여 서로 다른 VaR를 산출한다. 따라서 현행 모형은 3개월 이후에 경기가 실제로 악화되어지는 경우에는 실제 손실금액이 VaR를 초과할 수도 있지만, 원-팩터 모형은 향후 예상되는 경기상황을 선제적으로 반영하기 때문에 실제 손실금액이 VaR를 초과하는 사례가 작을 것으로 기대된다.

KOSPI200지수는 한국거래소 (KRX)에 상장된 주식 중에서 시장대표성, 유동성 및 업종대표성을 고려하여 선정된 200개 종목에 대한 시가총액의 증감을 나타내는 지표이다.

$$\text{KOSPI지수} = \frac{\text{현재시점 \ 시가총액}}{\text{기준시점 (1990.1.3) 시가총액}} \times 100.$$

원-팩터 모형을 이용한 실증분석을 위해 KOSPI200지수의 편입종목으로 포트폴리오를 구성하기로 한다. KOSPI200지수의 편입종목을 KRX에서 정한 8개 산업으로 다음 Table 3.2와 같이 분류하였다.

Table 3.2 KOSPI200 portfolio (2014.08.29.) (unit : billion won)

	Stocks		Aggregate value of listed Stock (%)	
	Number	Proportion	Amount	Proportion
Constructions & Machinery	13	6.5%	36,531.91	3.5%
Shipbuilding & Transportation	12	6.0%	48,479.09	4.6%
Steels & Materials	18	9.0%	59,235.69	5.6%
Energy & Chemicals	31	15.5%	83,718.82	7.9%
IT	23	11.5%	316,046.86	30.0%
Financials	17	8.5%	142,915.75	13.6%
Consumer Staples	44	22.0%	165,034.70	15.7%
Consumer Discretionary	42	21.0%	201,735.33	19.1%

한국은행 경제통계시스템 100대 통계지표 중에서 2008년 1월부터 2014년 8월까지 산업별 월말기준 시가총액의 변화를 가장 잘 설명하는 일부의 경제지표를 Table 3.3에 나열하였다 (Choi 등, 2012). 건설/기계와 필수소비재의 경우에는 수출물가지수가 가장 높은 설명력을 나타냈으며, 나머지 모든 산업에서 ESI가 높은 설명력을 나타냈다. 본 연구에서는 모든 기업의 경기변동을 나타내는 지표로 단지 경제심리지수만을 이용하기로 한다. ESI는 현재 경기상황에 대한 기업인의 설문조사에 의한 기업경기실사지수와 소비자들의 설문조사에 의한 소비자동향지수를 이용하여 종합적인 경기상황을 파악하기 위한 지수로써 100을 기준으로 지수가 100보다 크면 향후 경기상황이 좋아질 것으로 예상하고, 반대로 100보다 작으로 향후 경기상황이 나빠질 것으로 예상한다.

Table 3.3 Coefficient of determination for the economic indicators

	ESI	Wholesale and retail sales index	CPI for living necessaries	Service Industry Activities Indexes	Consumer Price Indexes	Import Price Indexes	Export Price Indexes
Constructions & Machinery	**0.078**	0.053	0.032	0.023	0.033	0.029	0.101
Shipbuilding & Transportation	0.038	0.016	0.022	0.005	0.025	0.003	**0.039**
Steels & Materials	**0.110**	0.025	0.023	0.039	0.024	0.005	0.044
Energy & Chemicals	**0.048**	0.025	0.017	0.008	0.022	0.010	0.067
IT	**0.132**	0.066	0.017	0.051	0.005	0.021	0.006
Financials	**0.172**	0.026	0.014	0.018	0.002	0.045	0.102
Consumer Staples	0.022	0.028	0.011	0.030	0.012	0.045	**0.052**
Consumer Discretionary	**0.186**	0.088	0.027	0.062	0.013	0.002	0.034

원-팩터 모형에서 각 개별기업의 주가 수익률에 대한 ESI의 영향력은 회귀 결정계수로 추정하였으며, 또한 각 기업의 주가 수익률에 대한 평균과 변동성은 과거 약 60개월 이전 수익률에 대해서는 영향을 받지 않도록 소멸계수 0.94를 이용하여 EWMA 방법으로 추정하였다. 참고적으로 소멸계수는 과거 수익률의 영향의 정도를 반영하여 결정하지만 영향의 정도를 정확하게 검출하는 기준이 없이 주로 경험적 판단에 의존하여 결정되고 있다.

본 연구에서는 현재 시점으로부터 3개월 이후의 포트폴리오 VaR의 변화를 예측하고자 한다. 따라서 3개월 이후의 ESI에 대한 예측을 위해 현재 시점 표준화 ESI에 대해 3개월 이전 주요 경제지표를 설명변수로 이용하여 회귀모형을 도출하였다 (Table 3.4 참조). 이 회귀모형의 결정계수는 0.6202이다. 이와 같은 회귀모형에 의해 설명변수로 이용된 2014년 8월말 기준 현재 경제지표를 이용한 3개월 이후 표준화 ESI의 예측값은 -0.3234로 나타났다. 따라서 현재 8월말 표준화 ESI -0.27보다 예측값이 작아 3개월 이후의 경기상황은 현재보다 나빠질 것으로 예상된다.

Table 3.4 Regression model of standardized ESI

Variable	ParameterEstimate	Standard Error	t	p-value
Intercept	-142.51662	28.72	-4.93	<.001
Value of Domestic Construction Orders Received	4.4624E-8	2.8399E-8	1.57	0.121
log (Producer Price Indexes)	37.83423	8.255	4.58	<.001
Export Price Indexes	-0.03921	0.017	-2.34	0.022
log (Sale of Motor Vehicles Index)	1.88101	1.533	1.23	0.024
log(Manufacturing Production Capacity Index)	2.96588	1.708	1.74	0.087
Housing Purchase Price Index	-0.54424	0.081	-6.75	<.001

표준화 ESI 예측값 -0.3234을 이용하여 총투자금액 1조원을 KOSPI200지수 종목에 대한 투자비율을 다르게 하여 3개월 동안 투자하였을 경우에 신뢰수준 99%에 대한 포트폴리오 VaR를 살펴보았다 (Table 3.5 참조). 이 때, 평균금액은 3개월 이후 표준화 ESI가 현재시점 -0.27로 유지되는 조건에서 평균수익률에 해당하는 금액으로부터 포트폴리오 VaR를 계산하였다.

Table 3.5 Comparison of portfolio VaR (unit : million won)

	Same Investment rate	Proportional Stock prices	Optimal Portfolio
Expected Value	998,785	999,003	999,993
99% VaR	30,945	24,051	185
Loss ratio	3.10%	2.41%	0.0185%

만일 분산을 최소화하는 최적 가중치에 의해 포트폴리오를 구성하였을 경우에는 비록 경기가 급격히 악화되더라도 손실금액은 약 0.0185%에 해당하는 1.85억원으로 매우 작게 타났으나, 투자비율을 동일하게 하거나 주가에 비례하여 포트폴리오를 구성하였을 경우에는 최적 포트폴리오에 비해 상대적으로 많은 손실금액이 예측되었다. 따라서 투자금액에 대한 목표 최대손실금액이 결정되었을 경우에 목표 손실금액을 만족하는 포트폴리오 투자비율을 결정하는 방법은 매우 다양하며 복잡할 수 있다. 그러나 본 연구에서 제안한 원-팩터 모형에 의한 포트폴리오 VaR는 개별 VaR의 합으로 분해되기 때문에 최적 포트폴리오를 기준으로 목표 손실금액을 만족하는 포트폴리오 구성을 효율적으로 실시할 수 있다.

4. 결론

현행 VaR 모형은 구조적으로 향후 경기상황을 반영할 수 없기 때문에 주로 주식 보유기간이 짧은 경우에 이용된다. 그러나 주식 보유기간이 1개월 이상 장기적인 경우에는 향후 경기상황에 따라 주가의 변화에 영향을 미치게 된다. 따라서 본 연구에서는 향후 경기변동요인을 구조적으로 반영하기 위하여 주가의 변화요인을 경기변동요인과 기업 고유요인으로 구분한 원-팩터 모형을 제안하였다. 향후 경기상황과는 관계없이 항상 동일한 VaR값을 산출하는 현행 모형과는 달리 원-팩터 모형은 3개월 이후 경기변동요인에 대한 예측에 따라 서로 다른 VaR값을 산출함으로써 비록 장기간 주식을 보유하는 경우에도 선제적인 리스크관리가 가능하다는 것을 살펴보았다. 원-팩터 모형에서 경기변동요인을 향후 예측값으로 고정시킨 결과로 포트폴리오 내의 모든 수익률들이 서로 독립성을 만족하게 되어 수익률들의 공분산을 추정하는 부담이 제거되고 또한 포트폴리오의 분산을 최소화하는 최적 가중치와 포트폴리오 VaR는 개별 VaR의 합으로 분해되어져 목표로 하는 최대손실금액에 따라 효율적으로 포트폴리오를 구성하는 효과를 얻을 수가 있다. 실제 KOSPI200지수 편입종목으로 포트폴리오를 구성하였을 경우에 포트폴리오를 구성하는 방법에 따라 손실금액에 해당하는 VaR값은 많은 차이가 발생한다는 사실로부터 최적 포트폴리오 구성의 중요성을 살펴보았고, 또한 포트폴리오 VaR는 개별 VaR의 합으로 분해되어짐에 따라 한계 (marginal) VaR, 증분 (incremental) VaR 및 구성 (component) VaR에 의한 목표 최대손실금액에 대한 효율적인 포트폴리오 구성이 가능하다.

이와 같이 원-팩터 모형으로부터 현재 시점에서 미래 시점의 경기변동요인을 예측하여 반영함으로써 선제적인 리스크관리가 가능하고 목표 최대손실금액에 대한 효율적인 포트폴리오 구성이 가능하기 때문에 비교적 목표보유기간이 긴 ELS와 ELF와 같은 주가연계상품에 대한 상품설계가 용이할 것으로 기대한다. 다만 본 연구와는 별도로 주가의 변화를 잘 설명하는 경기변동요인 발굴과 더불어 향후 경기변동요인에 대한 예측방법에 관한 지속적인 연구가 필요하다.

References

Basel Committee on Banking Supervision. (1995). *An internal model-based approach to market risk capital requirements*, BIS, Basel, Switzerland.

Basel Committee on Banking Supervision. (2005). *International convergence of capital measurement and capital standards*, BIS, Basel, Switzerland.

Bessis, J. (2002). *Risk management in bankin*, John Wiley & Sons, New York.

Byun, B. G., Yoo, D. S. and Lim, J. T. (2013). Validity assessment of VaR with Laplacian distribution. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 1263-1274.

Choi, I., Kang, D., Lee, J., Kang, M., Song, D., Shin, S. and Son, Y. S. (2012). Prediction of the industrial stock price index using domestic and foreign economic indices. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **23**, 271-283.

Gordy, M. (2003). A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules. *Journal of Financial Intermediation*, **12**, 199-232.

Johansson, F., Seiles, M. J. and Tjarnberg, M. (1999). Measuring Downside Portfolio Risks. *Journal of Portfolio Management*, Fall, 96-107.

Jorion, P. (2007). *Value at risk*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York.

J. P. Morgan, (1996). *RiskMetrics - Technical document*, 4th edition, New York.

Neftci, Salih F. (2000). Value at risk calculations, Extreme events and tail Estimations. *Journal of Derivatives*, Spring, 23-38.

Park, K. H., Ko, K. Y. and Beak, J. S. (2013). An One-factor VaR model for stock portfolio. *The Journal of the Applied Statistics*, **26**, 471-481.

Vasicek, O. (2002). The distribution of loan portfolio value. *Risk*, **15**, 160-162.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2015, **26**(2), 323–334

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2015.26.2.323
한국데이터정보과학회지

Optimal portfolio and VaR of KOSPI200 using One-factor model†

Kwang Yee Ko[1] · Young Sook Son[2]

[12]Department of Statistics, Chonnam National University

Received 30 December 2014, revised 20 January 2015, accepted 6 February 2015

Abstract

he current VaR model based on the J.P. Morgan's RiskMetrics structurally can not reflect the future economic situation. In this study, we propose a One-factor model resulting from the Wiener stochastic process decomposed into a systematic risk factor and an idiosyncratic risk factor. Therefore, we are able to perform a preemptive risk management by means of reflecting the predicted common risk factors in the model. Stocks in the portfolio are satisfied with the independence to each other because the common factors are fixed by the predicted value. Therefore, we can easily determine the investment in each stock to minimize the variance of the portfolio. In addition, the portfolio VaR is decomposed into the sum of the individual VaR. So we can effectively implement the constitution of the portfolio to meet the target maximum losses.

Keywords: EWMA, One-factor model, portfolio VaR, stochastic differential equation, systematic risk factor, Wiener stochastic process.

† This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (NRF-2011-0022864).

[1] Professor, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea.
[2] Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea. E-mail: ysson@jnu.ac.kr