

## 일정 간격의 돌출부를 갖는 마이크로채널 내의 스톱스 유동 해석

손 정 수\* · 정 재 택\*\*  
\* 전남대학교 기계공학부

### Stokes Flow Through a Microchannel with Projections of Constant Spacing

JeongSu Son\* and Jae-Tack Jeong\*\*

\* Dept. of Mechanical Engineering, Chonnam Nat'l Univ.

(Received October 13, 2014 ; Revised December 10, 2014 ; Accepted December 16, 2014)

**Key Words:** Incompressible Flow(비압축성 유동), Microchannel(마이크로채널), Periodic Flow(주기 유동), Projection(돌출물), Stokes Flow(스톱스유동), Two-Dimensional Flow(이차원 유동)

**초록:** 본 연구에서는 채널 벽면에 돌출물이 일정 간격으로 부착되어 있는 마이크로채널을 통과하는 2차원 스톱스 유동을 이론적으로 고찰한다. 상하 벽면에 부착된 돌출물들은 모두 반원 형상이고 서로 동일한 위상에 위치한다. 채널 내 유동의 주기성과 대칭성을 고려한 고유함수 전개법과 오차의 최소제곱법을 사용하여 유동장을 해석하여 유동함수 및 압력분포를 구하였다. 돌출물의 반경과 간격의 몇 가지 값들에 대하여 유동장 내의 유선 및 압력분포도를 보이고, 경계벽면에서의 전단응력 분포 등을 도시하였다. 또한, 돌출물의 반경과 돌출물 사이의 간격 변화에 따른 마이크로채널 내 평균 압력강하율의 변화를 계산하여 그림으로 나타내었다. 특히 상하 돌출물 사이의 틈새가 매우 작은 경우, 그 계산결과는 윤활이론의 결과와 아주 잘 일치함을 확인하였다.

**Abstract:** In this study, we analyzed a two-dimensional Stokes flow through a microchannel containing projections with constant spacing attached to each wall. The projections on the top and bottom walls were semi-circular in shape, with in-phase locations. By considering the periodicity and symmetry of the flow, the eigenfunction expansion and least squared error method were applied to determine the stream function and pressure distribution. For some typical radius and spacing values, the streamline patterns and pressure distributions in the flow field are shown, and the shear stress distributions on the boundary walls are plotted. In addition, the average pressure gradients in the microchannel are also calculated and shown with the radius and spacing of the projections. In particular, the results for the case of extremely small gaps between the projections on the top and bottom walls are in good agreement with the lubrication results.

- 기호설명 -

$a$  : 반원형 돌출물의 반경  
 $A_0, B_0, A_n, B_n$  : 계수  
 $b$  : 돌출물 사이의 간격의 절반  
 $H$  : 채널의 높이의 절반  
 $p$  : 압력  
 $u, v$  : 속도  $\vec{v}$ 의  $x, y$  성분

$\vec{v}$  : 유동속도  
 $x, y$  : Cartesian 좌표계  
 $\mu$  : 유체의 점성계수  
 $\psi$  : 유동함수

#### 1. 서 론

최근 열교환기, 마이크로 로봇, 마이크로 칩 등의 활용에 있어 마이크로 유동 해석에 대한 연구가 많이 진행되고 있다.<sup>(1,2)</sup>

† Corresponding Author, jtjeong@chonnam.ac.kr  
 © 2015 The Korean Society of Mechanical Engineers

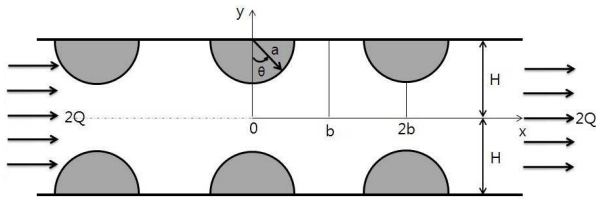


Fig. 1 The shape of the microchannel

Wang<sup>(3)</sup>은 긴 원형 튜브가 주기적으로 존재하는 채널 내의 유동을 고려하여 튜브에 의해 초래되는 유동감소 현상에 흥미를 가졌으며, Jeong<sup>(4)</sup>은 채널 내부에 상하 대칭으로 슬릿이 있는 경우에 스톡스 유동을 이론적으로 해석하였다.

Inasawa 등<sup>(5)</sup>은 상류와 하류에서의 마이크로채널의 높낮이가 상하 비대칭인 경우에 대하여 유동을 반 해석적 방법과 수치해석, 그리고 실험적인 방법으로 해석을 하였으며, Pozrikidis<sup>(6)</sup>는 투과성이 있는 원형 튜브를 통과하는 스톡스 유동을 혈관을 통과하는 혈류의 모델로 가정을 하여 표면전단응력의 변화를 나타내었다.

Meftah 과 Mossa<sup>(7)</sup>는 사각 배열로 존재하는 실린더를 통과하는 채널 유동의 특성을 예측하였고, Jeong 과 Yoon<sup>(8)</sup>은 마이크로채널 내부에 원형 실린더 주위의 이차원 스톡스 유동을 해석하였다.

이처럼 배열에 따른 유동, 채널 내부에 장애물이 있는 경우에 대한 해석들이 많이 진행되어 왔다.

본 논문에서는, 마이크로채널 내부의 2차원 포아죄유동(Poiseuille flow)에서 채널 벽면에 반원형상의 돌출 장애물이 일정 간격으로 부착되어 있는 경우에 대한 유동을 해석하고자 한다.

## 2. 문제의 설명 및 해석 방법

### 2.1 해석 모델 및 지배방정식

Fig. 1과 같이 높이가 2H인 마이크로채널 벽면에 반원형상의 돌출물들이 상하 및 좌우 대칭적으로 부착되어 있고, 채널 내부에 유량 2Q인 점성유동이 지나는 경우를 고려한다. 여기서 유동은 Reynolds수가 매우 작은 2차원 비압축성, 정상 유동으로 가정한다.

채널 벽면에 부착된 돌출물들은 반경이  $a$ 인 반원형으로 가정하고 인접한 돌출물들 사이의 간격은  $2b$ 이다(Fig. 1). 채널 내의 유동이 존재하기 위해서는  $a$ 의 범위가  $0 \leq a < H$  이어야 하지만,  $a \leq b$ 로 제한하지는 않는다.

Reynolds수가 매우 작은 점성유동을 고려하기 위하여, 유동의 지배방정식은 연속방정식과 함께 Navier-Stokes 방정식<sup>(9)</sup>에서 관성항을 무시한 Stokes 방정식으로 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (2)$$

여기서,  $\vec{v}$ 는  $\vec{v} = (u, v)$ 로 표현되므로, 계산의 편리성을 위해 하나의 미지함수인  $\psi$ (유동함수)를 도입하는데, 유동함수와 속도는 다음과 같은 관계에 있다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

식 (3)으로부터 식 (2)에  $u, v$ 를 대입하고,  $p$ 를 소거하면 유동함수는 다음과 같은 biharmonic equation을 만족하게 된다.

$$\nabla^4 \psi = \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \psi = 0 \quad (4)$$

유동장을 무차원화하기 위하여 길이  $H=1$ , 유량  $Q=1$ 로 놓는다. 돌출물들 사이의 간격이  $2b$ 이므로 유동 또한  $x$ 방향으로 주기  $2b$ 인 주기유동이 된다. 따라서, 유동함수  $\psi(x, y)$ 를  $x$ 에 대하여 주기가  $2b$ 인 Fourier 급수<sup>(10)</sup>로 전개할 수 있으며,  $x=0$ 과  $y=0$ 에 대한 유동의 대칭성을 각각 고려하면 유동함수를 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\psi(x, y) = A_0 y + B_0 y^3 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \cos \frac{n\pi x}{b} \quad (5)$$

여기서,  $\frac{n\pi}{b} = \lambda_n$ 로 두고 식 (5)를 식 (4)에 대입하면, 다음과 같이  $F_n(y)$ 에 대한 상미분방정식이 얻어진다.

$$F_n^{(4)}(y) - 2\lambda_n^2 F_n''(y) + \lambda_n^4 F_n(y) = 0 \quad (6)$$

식 (6)의 해  $F_n(y)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$F_n(y) = C_1 \cosh \lambda_n y + C_2 \sinh \lambda_n y + C_3 y \cosh \lambda_n y + C_4 y \sinh \lambda_n y \quad (7)$$

유동함수  $\psi(x, y)$ 는  $y=0$ 에 대하여 반대칭이므로 다음의 기함수 조건을 만족한다.

$$F_n(y) = -F_n(-y) \quad (8)$$

식 (7)에 식 (8)의 조건을 적용하면  $C_1 = C_4 = 0$

이 되고,  $C_2, C_3$ 를 각각  $A_n, B_n$ 으로 놓으면 식 (7)은 다음과 같이 된다.

$$F_n(y) = A_n \sinh \lambda_n y + B_n y \cosh \lambda_n y \quad (9)$$

식 (9)를 식 (5)에 대입하면 유동함수는 다음과 같은 형태의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & A_0 y + B_0 y^3 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh \lambda_n y + B_n y \cosh \lambda_n y) \cos \lambda_n x \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$ 이고  $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 은 경계조건으로부터 구해야 할 미지상수이다.

### 2.2 경계조건 적용 및 수치계산

돌출물의 주기성과 대칭성을 고려하면 해석영역을  $0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq 1$ 와 같이 두어도 충분하다.

경계조건으로 돌출물 표면과 채널 내부의 벽면에서의 점착조건(no-slip condition)을 적용하면 다음과 같다.

i) 반원형 돌출물의 표면  $x^2 + (y-1)^2 = a^2$ 에서

$$\psi(x, y) = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = 0 \quad (11a)$$

ii) 채널 벽면  $y = 1$ 에서

$$\psi(x, 1) = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 1) = 0 \quad (11b)$$

(10)식에 경계조건 (11a,b)를 적용하면 무한급수의 형태로 식이 나타나는데, 이를  $n = 1$ 부터  $N$ 까지의 유한한 식으로 절단(truncation)하여 유한급수로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_0 y + B_0 y^3 \\ + \sum_{n=1}^N (A_n \sinh \lambda_n y + B_n y \cosh \lambda_n y) \cos \lambda_n x = 1, \end{aligned}$$

for  $x^2 + (y-1)^2 = a^2$ , (12a)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \lambda_n (A_n \sinh \lambda_n y + B_n y \cosh \lambda_n y) \sin \lambda_n x = 0, \end{aligned}$$

for  $x^2 + (y-1)^2 = a^2$ , (12b)

$$\begin{aligned} A_0 + B_0^3 \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh \lambda_n + B_n \cosh \lambda_n) \cos \lambda_n x = 1, \end{aligned}$$

for  $a \leq x \leq b$ , (12c)

$$\begin{aligned} A_0 + 3B_0^2 + \sum_{n=1}^N [A_n \lambda_n \cosh \lambda_n \\ + B_n (\cosh \lambda_n + \lambda_n \sinh \lambda_n)] \sin \lambda_n x = 0, \end{aligned}$$

for  $a \leq x \leq b$ . (12d)

여기서  $a, b$ 의 크기( $a$ 는 반원형 돌출물의 반경,  $2b$ 는 돌출물의 간격)에 따른 마이크로채널의 형상을 고려해 보면,  $a \geq b$ 인 경우에는 (12c,d)의 조건이 필요하지 않게 된다. 경계조건식(12)에는  $(2N+2)$ 개의 미지상수  $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots, N)$ 가 포함되어 있다. 이 미지상수들을 구하기 위하여 경계조건식(12)는 경계의 무한히 많은 점에 대하여 적용될 수 있지만, 계산을 위하여 유한한  $M$ 개의 점만을 취하면  $(2M)$ 개의 방정식이 도출된다.

여기서 방정식의 수  $(2M)$ 을 미지수의 수  $(2N+1)$ 보다 많이 취하고, 오차의 제곱을 최소화하는 방법(method of least error squared)<sup>(11)</sup>을 적용하여  $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots, N)$ 을 계산한다. 실제 수치계산에서  $M=100, N=100$  이상으로 두면 충분하였다.

## 3. 결 과

### 3.1 유동 함수

유동함수에 대한 표현식 (10)에서  $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots, N)$ 을 구하였으며, 유동함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & A_0 y + B_0 y^3 \\ & + \sum_{n=1}^N (A_n \sinh \lambda_n y + B_n y \cosh \lambda_n y) \cos \lambda_n x \end{aligned} \quad (13)$$

임의의  $a, b$  값에 대하여 유동함수식 (13)을 계산하면 유선을 도출할 수 있다. 주기성과 대칭성에

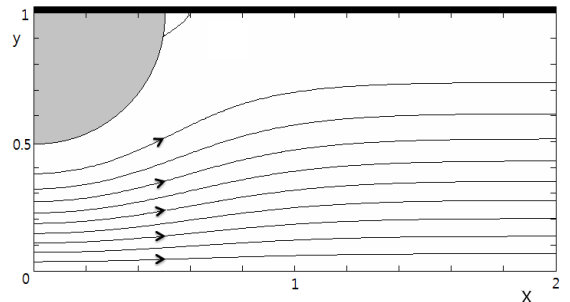


Fig. 2 Streamline pattern for  $a = 0.5, b = 2$   
( $\nabla \psi = 0.1, 0.0001$  in eddy)

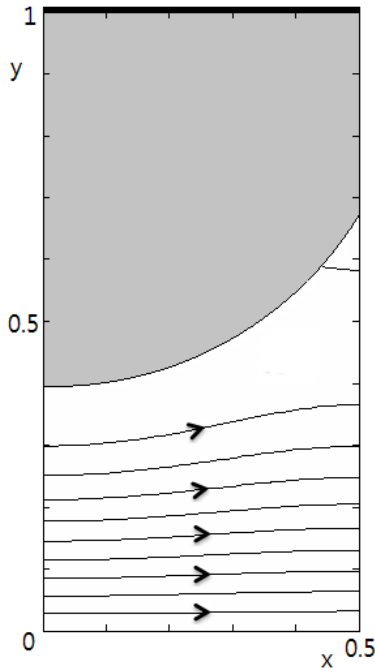


Fig. 3 Streamline pattern for  $a = 0.6, b = 0.5$  ( $\nabla\psi = 0.1$ )

의해 전체 유동장 중 ( $0 < x < b, 0 \leq y \leq 1$ )인 영역만 표시하여도 충분하다. 참고로 돌출물이 없는 경우 ( $a = 0$ )에는  $A_0 = 1.5, B_0 = -0.5, A_n = B_n = 0$ 이 되며, 이는 매끈한 마이크로채널 내를 통과하는 Poiseuille 유동에 해당된다.

Fig. 2는  $a = 0.5, b = 2$ 인 경우에 대한 유선을 보여준다. 돌출물과 채널 벽면 사이의 코너 부근에서 점성 에디(viscous eddy)<sup>(12)</sup>가 존재함을 알 수 있다.

$a > b$  인 경우의 예로서  $a = 0.6, b = 0.5$ 에 대하여 계산하고 Fig. 3에 유선의 모양을 도시하였으며, 인접한 돌출물 사이의 코너 부근에서 역시 점성 에디<sup>(12)</sup>가 존재함을 알 수 있다.

특히 Fig. 4에서는  $b = 1$ 일 때  $a$ 의 증가에 따라 돌출물과 돌출물 사이의 두 점성 에디(Fig. 4(a))가 하나의 점성 에디(Fig. 4(b),(c),(d))로 합쳐지는 과정을 보여준다.  $a \approx 0.65$  일 때, 인접한 두 에디(eddy)가 하나로 합쳐짐을 알 수 있다. 하나로 합쳐진 직후의 에디에는 새들 정체점(saddle stagnation point)가 나타난다.(Fig. 4(c))

### 3.2 압력 분포 및 전단응력

#### 3.2.1 압력분포

식 (2)와 식 (3) 및 식 (13)을 이용하여 압력분

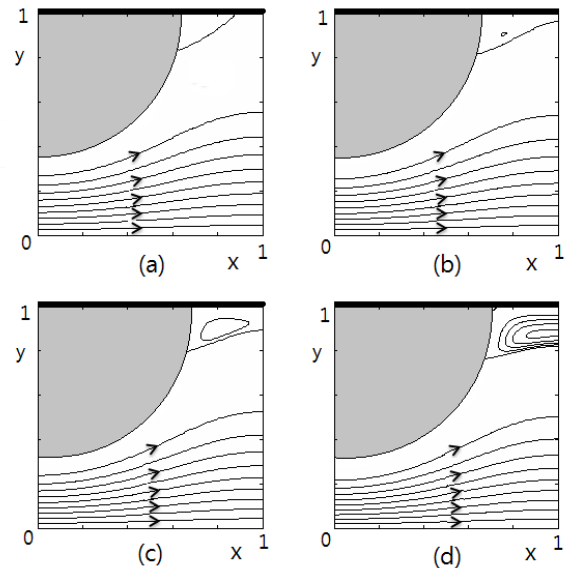


Fig. 4 Merging of two adjacent eddies as  $a$  increases with  $b = 1$ . (a)  $a = 0.64$  (b)  $a = 0.66$  (c)  $a = 0.68$  (d)  $a = 0.71$  ( $\nabla\psi = 0.1$  in main stream and  $\nabla\psi = 0.0002$  in viscous eddy)

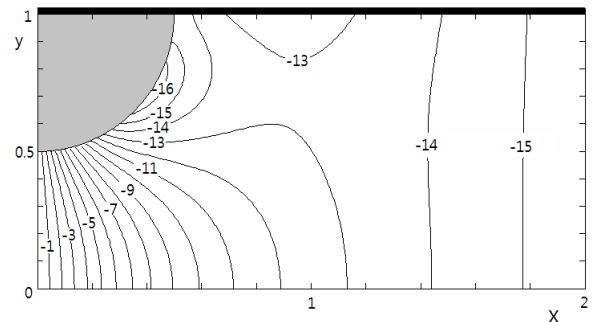


Fig. 5 The pressure distribution for  $a = 0.5, b = 2$

포를 구하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p(x, y) = 6\mu B_0 x + 2\mu \sum_{n=1}^N B_n \lambda_n \cosh \lambda_n y \sin \lambda_n x \tag{14}$$

Fig. 5는 대표적인 경우( $a = 0.5, b = 2$ )에 대한 압력분포를 나타낸다. Fig. 6은  $a > b$  인 경우로서  $a = 0.6, b = 0.5$  인 경우의 압력분포를 나타낸 것이다. 반원형 돌출물의 중앙부분( $x = 0$ )에서 압력이 급격하게 감소함을 알 수 있고, 돌출물의 영향력이 가장 작은 부분( $x = b$ )에서 압력 강하가 가장 적게 발생함을 알 수 있다. 그리고 반원형 돌출물의 후방 표면에서는 국부적으로 압력이 최소로 되는 지점이 존재함을 알 수 있다.

식 (14)에서  $\Delta p \equiv p(0, 0) - p(b, 0) = -6\mu B_0 b$  는 유동이 채널의 길이방향으로  $b$ 만큼 진행한 동안

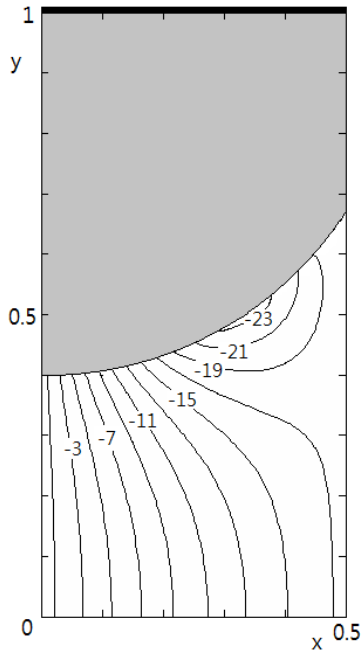


Fig. 6 The pressure distribution for  $a = 0.6, b = 0.5$

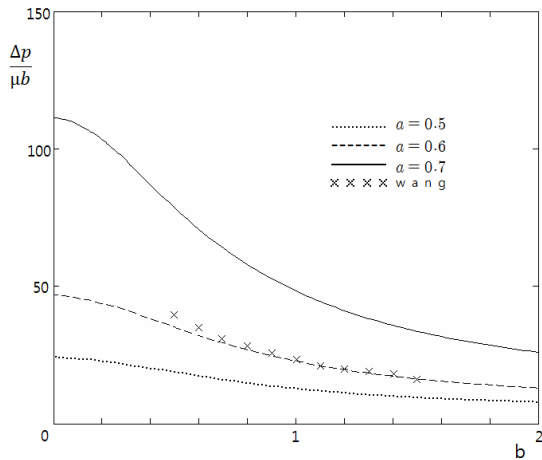


Fig. 7 Average pressure drop per unit length of the microchannel for  $a = 0.5, 0.6, 0.7$ . The marks (x) represent the results for fins of height 0.7 from Wang<sup>(13)</sup>

발생되는 압력강하 값이다. 따라서 채널길이 방향의 단위길이 당 평균 압력강하율은  $\Delta p/b = -6\mu B_0$ 이다. 돌출물이 없는 경우( $a = 0$ )에  $B_0 = -0.5$ 이므로  $\Delta p/(\mu b) = 3$ 이고, 이는 Poiseuille 유동의 경우 압력구배에 해당한다.

Fig. 7은 반경  $a$ 의 몇 가지 값( $a = 0.5, 0.6, 0.7$ )에 대하여  $b$ 의 변화에 따른 압력강하율의 변화를 보이고 있다. 반경  $a$ 가 클수록, 그리고 반주기  $b$ 값이 작을수록 압력강하율이 증가함을 확인할 수 있다. 반원형 돌출물 대신 같은 높이의 Fin이 부착된

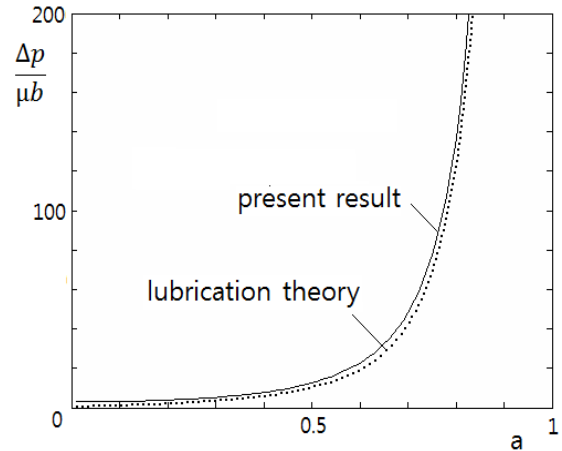


Fig. 8 The comparison between the results of lubrication theory and present results for  $b = 1$

경우<sup>(13)</sup>와 비교하기 위하여 Fin 높이가 0.7인 경우의 압력강하율도 Fig. 7에 함께 나타내었다.  $b \rightarrow 0$ 인 경우에는 채널의 높이가  $(1 - a)$ 일 때의 압력강하율로 접근하게 된다. 즉,  $b \rightarrow 0$  일 때

$$\frac{\Delta p}{\mu b} \rightarrow \frac{3}{(1 - a)^3} \quad (15)$$

이다.

$a \rightarrow 1$ 일 때에는 상하 돌출물이 서로 근접하게 된다. 이 경우 마이크로채널 내 압력강하의 대부분은 상하 돌출 장애물 사이의 좁은 틈새를 지나 는 동안 발생되며 이는 윤희이론<sup>(14)</sup>을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다. 즉,  $a \rightarrow 1$ 일 때,

$$\frac{\Delta p}{\mu b} \rightarrow \frac{9\pi\sqrt{2a}}{16b(1 - a)^{5/2}} \quad (16)$$

Fig. 8에  $b = 1$ 에 대하여 윤희 이론의 결과와 본 연구 계산 결과를 비교하였으며  $a \rightarrow 1$ 일 때 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

### 3.2.2 전단응력 분포

반원형 돌출물 표면에서의 전단응력은 (0,1)을 중심으로 한 극좌표계로 나타내면 다음과 같다.

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) = -\mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (17)$$

Fig. 9에 반원형 돌출물의 표면 위치  $\theta$ 에 따른 돌출물 표면에서의 전단응력 분포를 나타낸다. 여기서  $\theta$ 는 반원형 돌출물 표면의 위치를 나타내는 각도로서 Fig. 1에서 표시되어 있다. 돌출물 중앙부( $\theta = 0$ )에서 전단응력은 최대이고 돌출물

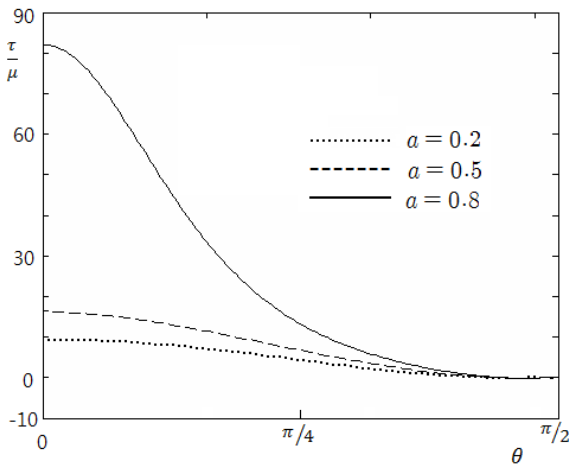


Fig. 9 The shear stress distribution of the obstacle surface for  $a = 0.2, 0.5, 0.8$  with  $b = 2$

후방으로 갈수록 전단응력이 감소한다. 최대전단응력은 돌출물의 크기  $a$ 에 따라 증가함을 알 수 있으며, 돌출물의 후방  $\theta = \pi/2$  근처에서 전단응력이 음의 값이 나타나는데 이는 Fig. 2에서 돌출물 후방에서 유동의 박리(separation)가 일어나고, 점성 에디가 생기는 현상과 부합된다.

#### 4. 결론

본 연구에서는, 벽면에 일정 간격으로 반원형 돌출물들이 배열되어 있는 마이크로채널 내를 통과하는 유동에 대하여 유동의 대칭성과 주기성을 고려한 Fourier 급수로 전개하고 경계조건을 만족하는 계수들을 결정하여 유동장을 해석하였다. 이에 따라 가능한 돌출물의 크기와 간격에 대하여 본 해석 방법이 잘 적용됨을 확인하고 결과를 제시하였다.

먼저 대표적인 경우의 유선형태 및 압력분포를 도시하였고, 돌출물 주위를 지날 때 압력 변화가 가장 심하고, 돌출물 뒤 쪽 부근에서 유동박리와 함께 점성 에디(viscous eddy)의 발생 및 변화 과정을 확인할 수 있었다.

또한, 돌출물의 크기  $a$  및 간격의 변화  $b$ 에 따른 압력강하 값은, 돌출물 크기가 클수록 그리고 돌출물 사이의 간격이 작을수록 압력의 변화율이 커짐을 확인할 수 있었다.

$a \rightarrow 1$ 일 때, 돌출물의 크기가 커지면서 상하 돌출물이 근접하여 돌출물 사이의 틈새 유로가 매우 좁아지게 된다. 이 경우 유효이론을 적용한 압력강하식을 제시하여 본 연구의 결과와 매우

잘 일치함을 보였는데, 이로부터 본 연구의 해석 방법이  $a \rightarrow 1$ 일 때에도 잘 적용됨이 입증된다.

돌출물 표면에서의 전단응력은 돌출물의 크기가 클수록 급격한 변화를 보였으며, 돌출물의 뒤쪽 코너 부근에서 점성 에디의 발생과 부합하여 전단응력의 부호가 바뀔 수 있었다.

본 연구는 채널 벽면의 거칠기를 고려한 마이크로채널 유동에 대한 하나의 모델링으로서 그 결과를 제시하였다. 이러한 해석방법은, 마이크로채널 벽면이 다른 여러 가지 형상인 경우뿐만 아니라, 마이크로채널 내부에 다양한 형상의 유동 장애물이 놓인 경우의 연구에도 적용될 수 있을 것이다.

#### 참고문헌

##### (References)

- (1) Nguyen, N.-T., 2012, *Micromixers Fundamentals Design and Fabrication*, Second Ed. Elsevier, Waltham, pp. 321~342.
- (2) Berthier, J. and Silberzan P., 2010, *Microfluidics for Biotechnology*, Second Ed. Artech House, Norwood, pp. 17~72.
- (3) Wang, C. Y., 2001, "Flow in a Channel With Longitudinal Tubes," *J. Fluids Eng.-Trans. ASME*, Vol. 123, pp. 157~160.
- (4) Jeong, J.-T., 2006, "Two Dimensional Stokes Flow through a Slit in a Microchannel with Slip," *J. Phys. Soc Jpn.*, Vol. 75, No. 9, 094401.
- (5) Inasawa, A., Floryan, J. M. and Asai, M., 2014, "Flow Recovery Downstream from a Surface Protuberance," *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, Vol. 28, pp. 427~447.
- (6) Pozrikidis, C., 2010, "Stokes Flow Through a Permeable Tube," *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 80, pp. 323~333.
- (7) Meftah, M. B. and Mossa, M., 2013, "Prediction of Channel Flow Characteristics through Square Arrays of Emergent Cylinders," *Phys. Fluids*, Vol. 25, 045102.
- (8) Jeong, J.-T. and Yoon, S.-H., 2013, "Two-Dimensional Stokes Flow Around a Circular Cylinder in a Microchannel," *J. Mech. Sci. Technol.*, Vol. 28, pp. 573~579.
- (9) Cengel, Y. A. and Cimbala, J. M., 2010, *Fluid*

- Mechanics Fundamentals and Applications, McGraw-Hill, NewYork, pp. 419~475.
- (10) Kreyszig, E., 2011, Advanced Engineering Mathematics, Wiley, Hoboken, pp. 473~539.
- (11) Chapra, S. C., 2012, Numerical Methods for Engineers, McGraw-Hill, NewYork, pp. 336~344.
- (12) Moffatt, H. K., 1964, "Viscous and Resistive Eddies near a Sharp Corner," *J. Fluid Mech.*, Vol. 18, pp. 1~18.
- (13) Wang, C. Y., 1997, "Stokes Flow Through a Transversely Finned Channel," *J. Fluids Eng.-Trans. ASME*, Vol. 119, pp. 110~114.
- (14) Day, R. F. and Stone, H. A., 2000, "Lubrication Analysis and Boundary Integral Simulations of a Viscous Micropump," *J. Fluid Mech.*, Vol. 416, pp. 197~216.