

# 얇은 플라즈마 층의 전자기 해석을 위한 Subcell 맥스웰-볼츠만 유한 차분 시간 영역 기법

## Subcell Maxwell-Boltzmann FDTD Method for Analyzing Thin Plasma Layer

정인균 · 김유나 · 홍용준\* · 육종관

Inkyun Jung · Yuna Kim · Yongjun Hong\* · Jong-Gwan Yook

### 요 약

플라즈마의 전자기적 특성을 해석하는 데 전기적으로 얇은 플라즈마는 수치 해석하기 어렵다. 본 논문은 플라즈마를 해석할 수 있는 맥스웰-볼츠만 유한 차분 시간 영역(Finite-Difference Time-Domain: FDTD) 기법과 얇은 구조를 해석할 수 있는 subcell FDTD 기법을 결합한 subcell 맥스웰-볼츠만 FDTD 기법을 제안하였다. 제안한 기법의 정확성을 확인하기 위해 1차원 FDTD 기법을 이용하여 자유 공간-플라즈마-완전 도체에서 반사계수 및 흡수량 오차를 계산하였다. 제안한 기법을 이용했을 때 광대역에서 정확한 것을 확인하였고, 플라즈마가  $3\Delta y$ 일 때 기존 기법보다 흡수량 오차가 1/10로 감소하는 것을 확인하였다.

### Abstract

Analyzing electromagnetic properties in plasma medium, it is difficult to numerically solve electromagnetic problem with thin plasma. In this paper, subcell Maxwell-Boltzmann FDTD method was proposed which is combined with Maxwell-Boltzmann FDTD and subcell FDTD method for analyzing plasma and electrically thin materials, respectively. Calculations of reflection coefficient and absorption rate error were performed by using 1D FDTD method. Reflection coefficient computed by applying the proposed method is in agreement with analytic solution. Absorption rate error analyzed by employing the proposed method is 1/10 times less than one by using conventional method.

Key words: Boltzmann Equation, Finite-Difference Time-Domain Method, Maxwell-Boltzmann FDTD, Plasma, Subcell FDTD

### I. 서 론

플라즈마는 이온, 자유전자, 중성 입자로 구성된 이온화된 가스로 전자기적으로 분산 물질(dispersive material)이다. 일반적으로 플라즈마는 외부 환경과 그 상태에 따

라 다양하게 모사할 수 있다. 약이온화 저온 플라즈마의 움직임은 자유전자에 대한 볼츠만 방정식(Boltzmann equation)을 이용하여 플라즈마 전류로 표현할 수 있으며, 플라즈마 전류와 맥스웰 방정식(Maxwell's equations)을 결합하여 플라즈마와 전자기학의 상호작용을 모사할 수 있다<sup>[1]</sup>.

「본 연구는 방위사업청과 국방과학연구소가 지원하는 국방 피탐지 감소기술 특화연구센터 사업의 일환으로 수행되었습니다. 연세대학교 전기전자공학과(Department of Electrical and Electronics Engineering, Yonsei University)

\*국방과학연구소(Agency for Defense Development)

· Manuscript received January 5, 2015 ; Revised January 23, 2015 ; Accepted February 12, 2015. (ID No. 20150105-07S)

· Corresponding Author: Jong-Gwan Yook (e-mail: jgyook@yonsei.ac.kr)

수치 해석적으로 플라즈마의 전자기적 특성을 확인하기 위하여 유한 차분 시간 영역(Finite-Difference Time-Domain: FDTD) 기법이 이용되며, 맥스웰-볼츠만 FDTD 기법으로 부른다<sup>[2]-[4]</sup>. 소개된 기법을 사용하면 한 번의 계산으로 광대역 플라즈마 해석을 할 수 있는 장점이 있다<sup>[5]</sup>.

플라즈마는 아크 방전(arc discharge), 코로나 방전(corona discharge), 유전체 방벽 방전(dielectric barrier discharge, DBD), 전기 용량 방전(capacitive discharge)과 같이 다양한 상태로 방전된다. 그림 1은 DBD 플라즈마 발생기의 구조를 나타낸 그림이며, 두 전극 사이에 유전체를 놓아 플라즈마를 발생시킨다<sup>[6],[7]</sup>. DBD 플라즈마 발생기는 대기압 환경에서 대면적 플라즈마의 생성이 가능하다<sup>[7]</sup>. 대기압 환경에서 DBD 플라즈마 발생기는 플라즈마를 전기적으로 얇게 생성시킨다.

이는 수치 해석적으로 기하학적 복잡성을 증가시키며, 많은 격자를 요구한다. 많은 격자는 수치 해석하는데 있어 계산량에 치명적인 영향을 준다. 예를 들어, 본 논문에서 계산한 1차원 FDTD 기법에서 격자의 크기를 반으로 감소시켰을 때, 하나의 시간 격자에서 계산량은 2배, 전체 계산량은 4배 증가한다<sup>[8]</sup>.

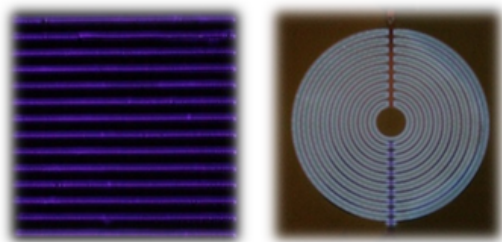
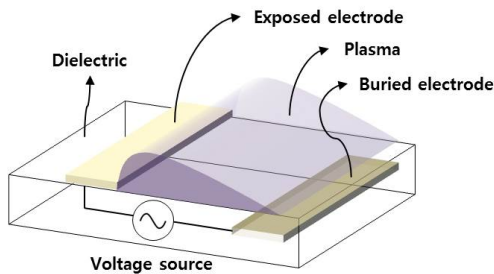


그림 1. 유전 방벽 방전 플라즈마 발생기 구조  
Fig. 1. The structure of dielectric barrier discharge plasma actuator.

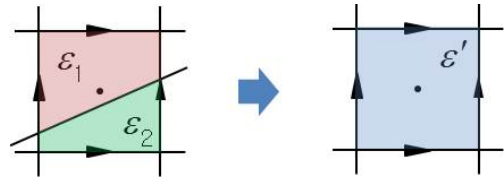


그림 2. Locally subcell 유한 차분 시간 영역 기법에서 물질 경계에서 물질 정보 변조  
Fig. 2. Modification of material properties at boundary in using locally subcell FDTD method.

격자 개수를 유지하면서 전기적으로 얇은 물체를 해석하기 위해 표면 임피던스 경계 조건(Surface Impedance Boundary Condition: SIBC)을 이용한 FDTD 기법과 subcell FDTD 기법이 소개되었다<sup>[10],[11]</sup>. 완전 도체(Perfect Electric Conductor: PEC)에 유전성 혹은 도전성 코팅을 했을 때, SIBC를 이용한 FDTD 기법이 처음 소개되었다. 또한, 일반적인 분산 매질에 대한 SIBC를 FDTD 기법에 적용하려면 알고리즘의 복잡성이 증가된다.

Subcell FDTD 기법은 복잡한 기하학적 물체에 대해 변형된 물질 정보를 이용한 기법이다. 그림 2와 같이 2차원 Yee 격자에 두 개의 물질 정보( $\epsilon_1, \epsilon_2$ )가 있을 때 subcell FDTD 기법은 새로운 물질 정보( $\epsilon'$ )를 이용한 업데이트 방정식을 이용한다.  $\epsilon'$ 는 적분형 맥스웰 방정식으로부터 계산할 수 있다. Yee 격자의 물질 정보를 변형은 전처리 과정에서 계산할 수 있기 때문에 기존 FDTD 기법의 계산 복잡성을 증가시키지 않는 장점이 있다.

FDTD 기법에 플라즈마를 해석하려면 플라즈마 전류 밀도가 요구된다. 제안한 기법은 Yee 격자 당 플라즈마 전류 밀도의 비율을 계산하여 보정 계수(correction factor)를 찾고, 보정 계수를 맥스웰 방정식에 적용하여 전기적으로 얇은 플라즈마를 해석한 기법이다. 본 연구에서는 1차원 맥스웰-볼츠만 FDTD 기법과 subcell FDTD 기법을 결합하여 전기적으로 얇은 플라즈마의 전자기적 특성을 해석할 수 있는 가능성을 확인하는데 목적이 있다.

2장에서는 플라즈마를 해석하기 위한 맥스웰-볼츠만 FDTD 기법과 제안한 subcell 맥스웰-볼츠만 FDTD 기법에 대해 제안하며, 3장에서는 수치 실험을 통해 정확성을 검증했다.

## II. 방 법

### 2-1 맥스웰-볼츠만 시스템

플라즈마와 전자기파의 상호작용은 맥스웰 방정식(Maxwell's equations)과 볼츠만 방정식(Boltzmann's equation)으로 표현할 수 있다. 전자기파에 의하여 대전된 입자가 가속되고, 가속된 입자는 전자기파를 방출한다. 플라즈마에서 전자기파의 지배 방정식(governing equations)은 식 (1)~(4)에 나타나 있다<sup>[1]</sup>.

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_p \quad (2)$$

$$\vec{J}_p = -eN_e \vec{u} \quad (3)$$

$$m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -e\vec{E} - m\nu_c \vec{u} \quad (4)$$

여기서  $\vec{J}_p$ 는 전자의 움직임에 의해 발생한 전류 밀도이고,  $e$ 는 전자 전하량,  $N_e$ 는 전자 밀도(electron density),  $\vec{u}$ 는 전자의 평균 속도,  $\nu_c$ 는 충돌 주파수(collision frequency),  $m$ 은 전자 질량이다. 식 (1), (2)는 맥스웰 방정식이고, 식 (3)은 전자의 평균 속도에 의해 발생하는 전류 밀도를 나타내는 식이다. 식 (4)는 전자의 모멘텀(momentum) 방정식이다. 식 (3)과 (4)를 결합하면 전류 밀도에 대한 간단한 미분 방정식,

$$\frac{\partial \vec{J}_p}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_p^2 \vec{E} - \nu_c \vec{J}_p \quad (5)$$

을 만들 수 있다. 여기서  $\omega_p^2$ 는 플라즈마 각주파수(plasma angular frequency)로

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 N_e}{m\epsilon_0} \quad (6)$$

로 정의된다. 식 (1), (2)와 (5)를 이용하여 플라즈마와 전자기파간 상호작용을 해석할 수 있다.

### 2-2 맥스웰-볼츠만 시간 영역 유한 차분 기법

본 논문에서는 보조의 미분방정식을 추가하여 플라즈마 전류 밀도와 맥스웰 방정식을 결합하였다. 식 (7)~(9)는 플라즈마가 있을 때, y-방향으로 진행되는 1차원 FD-TD 기법의 업데이트 방정식이다.

$$E_z|_j^{n+1} = E_z|_j^n + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} (H_x|_{j+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{j-1/2}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_z|_j^{n+1/2} \quad (7)$$

$$H_x|_{j+1/2}^{n+1/2} = H_x|_{j+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} (E_z|_{j+1}^n - E_z|_j^n) \quad (8)$$

$$J_z|_j^{n+1/2} = \frac{2 - \nu_c \Delta t}{2 + \nu_c \Delta t} J_z|_j^{n-1/2} + \frac{2\epsilon_0 \omega_p^2 \Delta t}{2 + \nu_c \Delta t} E_z|_j^n \quad (9)$$

$\Delta y$ 와  $\Delta t$ 는 각각 공간 및 시간 증분이며, 시공간 함수  $u|_j^n$ 은  $u(j\Delta y, n\Delta t)$ 의 차분화 함수 표기법이다. 식 (7), (8)는 맥스웰 방정식에 대한 차분화 방정식이며, 식 (9)는 식 (5)의 차분화 방정식이다.

식 (7)~(9)가 수렴하려면 수치해석 기법이 안정적(stable)이어야 한다. 유한 차분법이 수렴하려면 Courant-Friedrich-Lewy(CFL) 조건을 만족하는 시간 증분을 결정해야 한다<sup>[11]</sup>. CFL 조건은 식 (10)처럼 표현할 수 있다.

$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta y} \leq C_{\max} \quad (10)$$

여기서  $u$ 는 속도이고,  $C$ 는 Courant 수를 나타내며, 일반적으로  $C_{\max}$ 는 1이다. 맥스웰-볼츠만 FDTD 기법에서  $C_{\max}$ 는 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다<sup>[12]</sup>.

$$C_{\max} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p \Delta t}{2}\right)^2} \quad (11)$$

일반적으로 플라즈마 주파수보다 시간 증분이 매우 작아서 Courant 수는 1에 근사되며 이는 맥스웰-볼츠만 FD-TD 기법에서 전류 밀도를 추가함으로 인해 수치 해석적 안정성이 악화되지 않음을 의미한다.

### 2-3 Subcell 맥스웰-볼츠만 시간 영역 유한 차분 기법

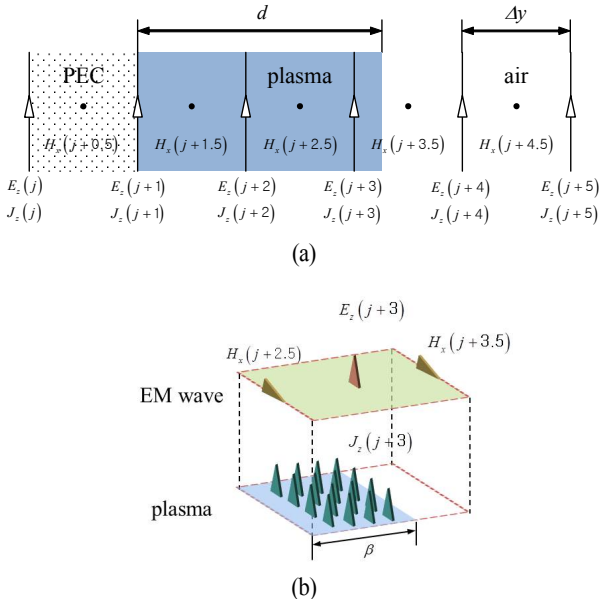


그림 3. 1차원 맥스웰-볼츠만 시간 영역 유한 차분 기법에서 (a) 완전 도체-플라즈마-공기의 계산 상황과 (b) 플라즈마와 공기 간의 경계

Fig. 3. In 1-D Maxwell-Boltzmann FDTD method, (a) structure of PEC-plasma-air and (b) the boundary of plasma layer and air.

2-1절에서 소개한 것처럼 플라즈마는 플라즈마 전류 밀도를 이용하여 계산한다. 이 때문에 Subcell FDTD 기법을 적용시키려면 식 (7)을 변형하여야 한다. 식 (12)는 제안한 기법의 전기장에 대한 업데이트 방정식이다.

$$E_z|_j^{n+1} = E_z|_j^n + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} (H_x|_{j+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{j-1/2}^{n+1/2}) - \alpha \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_z|_j^{n+1/2} \quad (12)$$

여기서  $\alpha$ 는 보정 계수이다.

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (13)$$

보정 계수는 식 (13)과 같이 적분형 암페르 법칙에서 구할 수 있다. 그림 3(a)는 1차원 FDTD 기법을 이용하여 플라즈마와 전자기파의 상호작용을 해석할 때 일반적인 예시를 나타낸 그림이다. 플라즈마 층의 두께( $d$ )는 얇게 생성되며, 그 두께가 수  $\Delta y$ 일 경우 정확한 해석이 어

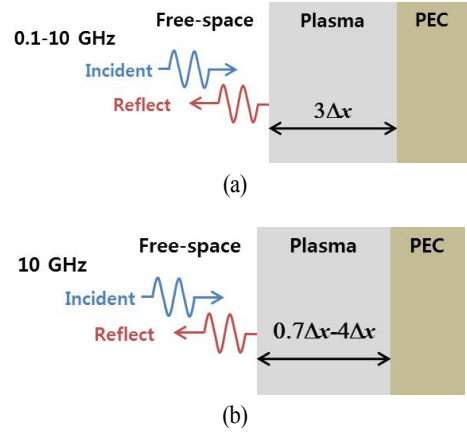


그림 4. (a) 3개의 공간 증분으로 구성된 플라즈마의 반사 계수 계산 상황과 (b) 플라즈마 층의 두께를 변화하면서 흡수량 오차 계산 상황

Fig. 4. The calculation structure of (a) wide-band analysis with 3-cell-depth plasma and (b) absorption rate error analysis with multi-depth plasma.

렵다.

그림 3(b)는 그림 3(a)에서 플라즈마 층과 공기의 경계가 되는 Yee 격자를 나타낸 그림이다. 여기서  $\beta$ 는 플라즈마 층의 두께이다. 그림 3(b)에 해당하는 폐경로에 식 (13)을 적용하면 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$H_x(j+2.5) - H_x(j+3.5) = \frac{\partial}{\partial t} \Delta y E_z(j+3) + \beta J_z(j+3) \quad (14)$$

식 (14)를 시간 영역에서 중심 차분을 하고, 식 (12)와 비교하면

$$\alpha = \beta / \Delta y \quad (15)$$

로 정리할 수 있다. 보정 계수는 한 격자에서 플라즈마가 차지하는 비율임을 알 수 있다. 다음 장에서는 수치 실험을 통하여 subcell 맥스웰-볼츠만 FDTD 기법의 정확성을 확인하겠다.

### III. 수치 실험

3장에서 제안한 기법을 검증하기 위해 두 가지 상황에 대한 수치실험을 진행하였다. 그림 3과 같이 하나는 3개의 공간 증분으로 구성된 플라즈마의 광대역 반사 계수

계산이고, 나머지는 플라즈마 층의 두께를 변화하면서 흡수율 오차를 계산하였다.

플라즈마 층의 두께가  $d$ 인 자유공간-플라즈마-PEC 구조의 반사 계수는

$$\Gamma_{ana} = \frac{\eta_p + \eta_0 - e^{j2k_p d}(\eta_p - \eta_0)}{\eta_p - \eta_0 - e^{j2k_p d}(\eta_p + \eta_0)} \quad (16)$$

이며, 여기서  $\eta_p, \eta_0$ 는 플라즈마 고유 임피던스(intrinsic impedance)와 자유공간 고유 임피던스이다. 그리고  $k_p$ 는 플라즈마에서 파수(wave number),

$$k_p = k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\omega\nu_c}}, \quad (17)$$

이다.

그림 5는 제안한 기법과 Yee 기법(기존 FDTD 기법)을 이용하여 그림 4(a)의 구조에서 반사 계수를 계산한 그래프이다. 변조된 가우시안(modulated Gaussian) 입력 파형을 이용하여 광대역 해석을 계산하였으며, 수치 실험 변수는 표 1과 같다. 이 경우, 보정계수  $\alpha$ 는 0.5가 되며, 참고문헌 [13]에서 사용한 Spatial averaging method와 일치한다. 제안한 기법이 해석해와 부합하며, Yee 기법은 오차가 발생한다. 이는 Yee 기법의 staggered 격자 특성에 의한 플라즈마 층의 두께를  $3\Delta y$ 가 아닌  $3.5\Delta y$ 로 모사

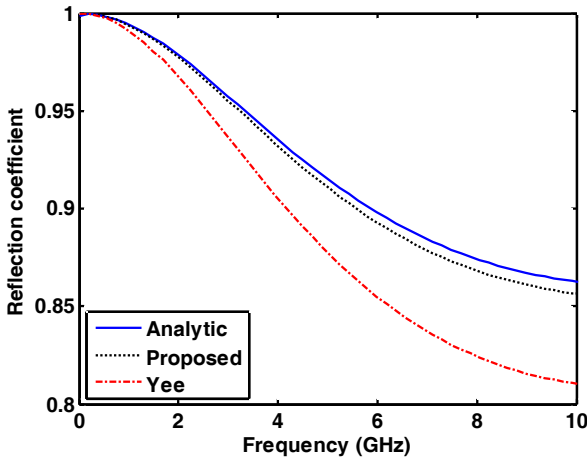


그림 5. 3 셀의 플라즈마에서 주파수 대비 반사 계수  
Fig. 5. Reflection coefficient of 3-cell-depth plasma.

표 1. 광대역 반사계수 실험 변수

Table 1. Parameters of wide-band reflection coefficient calculation.

주파수 범위	0.1~10 GHz
$\Delta y$	$\lambda_{min}/15$
플라즈마 층의 두께	$3\Delta y$
플라즈마 주파수	6 GHz
충돌 주파수	50 GHz

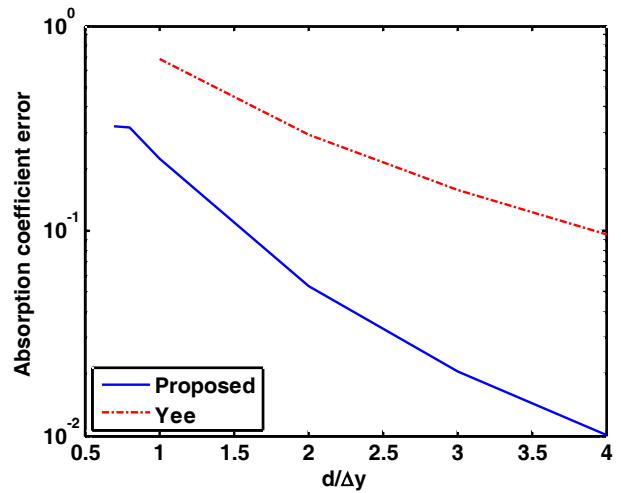


그림 6. 플라즈마 두께 대비 감쇠 상수 오차

Fig. 6. Absorption rate error versus the ratio of depth of plasma layer to spatial step size.

표 2. 흡수율 오차 계산 실험 변수

Table 2. Calculation parameters of absorption error.

주파수 범위	10 GHz
$\Delta y$	$\lambda/15$
플라즈마 층의 두께	$0.7\Delta y \sim 4\Delta y$
플라즈마 주파수	6 GHz
충돌 주파수	50 GHz

하기 때문이다.

제안한 기법의 오차를 정량적으로 확인하기 위해 흡수율 오차를 계산하였다. 계산 구조는 투과량(transmission)이 0이므로 흡수율(absorption rate)은

$$|A|^2 = 1 - |\Gamma|^2 \quad (18)$$

같이 정의할 수 있으며, 흡수량 오차는

$$error = \left| 1 - \frac{|A_{num}|}{|A_{ana}|} \right| \quad (19)$$

로 정의할 수 있다. 여기서  $A_{num}$ 은 수치 해석적 흡수량이고,  $A_{ana}$ 는 이론적 흡수량이다.

그림 6은 제안한 기법과 Yee 기법을 이용하여 그림 4(b)의 구조에서 흡수량 오차를 계산한 그래프이다. 수치 실험 변수는 표 2와 같다. 플라즈마 층의 두께가 얇을수록 오차가 크게 발생한다. 제안한 기법을 사용했을 때, 오차가 1/10 이상 감소하는 것을 알 수 있다.

#### IV. 결 론

본 논문은 전기적으로 얇은 플라즈마를 해석하기 위한 subcell 맥스웰-볼츠만 FDTD 기법을 제안하였다. Subcell FDTD 기법은 계산량을 증가시키지 않으면서 전기적으로 얇은 기하학적 구조를 해석할 수 있다. 본 논문에서 1차원 맥스웰-볼츠만 subcell FDTD 기법을 이용하여 전기적으로 얇은 플라즈마의 전자기 특성을 해석할 수 있는 가능성을 확인했다. 3장을 통하여 제안한 기법의 정확성을 확인했다. 제안한 기법을 이용했을 때 광대역에서 반사 계수가 정확한 것을 확인하였고, 플라즈마가  $3\Delta y$ 일 때 기존 기법보다 흡수량 오차가 1/10만큼 감소하는 것을 확인하였다. 제안한 기법을 통해 격자수를 유지한 채 정확한 전자기 해석이 가능하다.

#### References

[1] I. P. Shkarofsky, *The Particle Kinetics of Plasmas*, Massachusetts, Addison-Wesley, 1966.  
 [2] J. L. Young, "A full finite difference time domain implementation for radio wave propagation in a plasma", *Radio Sci.*, vol. 29, no. 6, pp. 1513-1522, 1994.  
 [3] G. Cerri, F. Moglie, R. Montesi, P. Russo, and E. Vecchioni, "FDTD solution of the Maxwell-Boltzmann system for electromagnetic wave propagation in a plasma", *IEEE Trans. Antenna. Propag.*, vol. 56, no. 8, pp. 2584-

2558, Aug. 2008.  
 [4] I. Y. Oh, Y. Hong, and J. G. Yook, "Extremely low dispersion higher order(2,4) 2-D-FDTD scheme for Maxwell-Boltzmann system", *IEEE Trans. Antenna. Propag.*, vol. 61, no. 12, pp. 6100-6106, Dec. 2013.  
 [5] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", *IEEE Trans. Antenna. Propag.*, vol. 14, no. 3, pp. 302-307, 1966.  
 [6] 김유나, 오일영, 정인균, 홍용준, 육종관, "유체 모델을 이용한 유전체 장벽 방전 플라즈마와 전자기파 간의 시간 의존적 상호 작용 분석", *한국전자과학회논문지*, 25(8), pp. 857-863, 2014년 8월.  
 [7] 이수민, 오일영, 홍용준, 육종관, "유전체 장벽 방전 플라즈마의 전자파 산란 특성 분석", *한국전자과학회 논문지*, 24(3), pp. 324-330, 2013년 3월.  
 [8] A. Taflove, S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics*, Artech House, 2005.  
 [9] C. Penny, R. J. Luebbers, and J. W. Schuster, "Scattering from coated targets using a frequency-dependent, surface impedance boundary condition in FDTD", *IEEE Trans. Antenna. Propag.*, vol. 56, no. 8, pp. 434-443, Apr. 1996.  
 [10] M. K. Karkkainen, "Subcell FDTD modeling of electrically thin dispersive layers", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 51, no. 6, pp. 1774-1780, 2003.  
 [11] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, "On the partial difference equations of mathematical physics", *IBM J. Res. Dev.*, vol. 11, no. 2, pp. 215-234, Mar. 1967.  
 [12] S. A. Cummer, "An analysis of new and existing FDTD methods for isotropic cold plasma and a method for improving their accuracy", *IEEE Trans. Antenna Propag.*, vol. 45, no. 3, pp. 392-400, Mar. 1997.  
 [13] Y. Zhao, P. Belov, and Y. Hao, "Accurate modelling of left-handed metamaterials using a finite-difference time-domain method with spatial averaging at the boundaries", *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, vol. 9, pp. S468-475, 2007.

정 인 균



2011년 2월: 연세대학교 전기전자공학과 (공학사)  
2011년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학과 석박사 통합과정  
[주 관심분야] FDTD, 플라즈마 해석

홍 용 준



2005년 2월: 포항공과대학교 물리학과 (이학사)  
2011년 2월: 포항공과대학교 물리학과 (이학박사)  
2011년 1월~현재: 국방과학연구소 선임연구원  
[주 관심분야] 플라즈마 해석, High Power Microwave, 안테나 등

김 유 나



2012년 2월: 연세대학교 전기전자공학과 (공학사)  
2012년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학과 석박사 통합과정  
[주 관심분야] 수치해석, FDTD, 플라즈마, CFD, 안테나

육 중 관



1987년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학사)  
1989년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학석사)  
1997년 1월~1988년 10월: University of Michigan Research Fellow  
1998년 11월~1999년 2월: Qualcomm Inc.

Senior Engineer  
1999년 3월~2000년 2월: 광주과학기술원 조교수  
2000년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학과 교수  
[주 관심분야] 수치 해석, 바이오 센서, 마이크로파 구조 해석 및 설계, RF MEMs, 박막 공진 구조, EMI/EMC, HEMP 등