Journal of The Korea Society of Computer and Information www.ksci.re.kr
Vol. 20, No. 3, March 2015 http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2015.20.3.107

최소 되먹임 간선 집합 문제 알고리즘

이 상 운*

An Algorithm for Minimum Feedback Edge Set Problem

Sang-Un Lee *

요 약

본 논문은 되먹임 집합 문제인 무방향 그래프의 정점과 간선, 방향 그래프의 노드와 호 문제들 중 간선 문제에 한정한 최소 원소개수 되먹임 간선 집합과 최소 가중치 되먹임 간선 집합 문제의 최적 해를 다항시간으로 얻는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 그래프의 간선 집합은 최대신장트리 간선 집합과 최소 되먹임 간선집합의 합이 되는 특성을 적용하였다. 즉, 최소 되먹임 간선집합은 최대신장트리 간선 집합의 여집합인 특성이 있다. 제안된 알고리즘은 최소신장트리를 얻는 Kruskal 알고리즘을 변형시켜 간선들의 가중치를 내림차순으로 정렬시켜 사이클이 발생하지 않는 간선은 최대신장트리 간선 집합 MXST로, 사이클이 발생하는 간선은 되먹임 간선 집합 FES로 양분하는 방법으로 최적 해를 얻었다. 제안된 알고리즘은 그래프의 간선 수 만큼 수행하는 선형시간 복잡도를 갖는 특징이 있다. 간선 가중치가 없는 경우와 가중치가 있는 다양한 무방향 그래프에 제안된 알고리즘을 적용한 결과 100% 쉽게 최적 해를 얻는데 성공하였다.

▸ Keywords : 최소 되먹임 간선 집합 문제, 가중치, 원소 개수, 최소신장트리

Abstract

This paper presents a polynomial time algorithm to the minimum cardinality feedback edge set and minimum weight feedback edge set problems. The algorithm makes use of the property wherein the sum of the minimum spanning tree edge set and the minimum feedback edge set equals a given graph's edge set. In other words, the minimum feedback edge set is inherently a complementary set of the former. The proposed algorithm, in pursuit of the optimal solution, modifies the minimum spanning tree finding Kruskal's algorithm so as to arrange the weight of edges in a descending order and to assign cycle-deficient edges to the maximum spanning tree edge set MXST and cycle-containing edges to the feedback edge set FES. This algorithm runs with linear time complexity, whose execution time corresponds to the number of edges of the graph. When extensively tested on various undirected graphs both with and without the weighed

•제1저자 : 이상운
•투고일 : 2015. 02. 11, 심사일 : 2015. 02. 23, 게재확정일 : 2015. 03. 02.
* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University)

edge, the proposed algorithm has obtained the optimal solutions with 100% success and accuracy.

▸ Keywords : Minimum feedback edge set problem, Weight, Cardinality, Minimum spanning tree

I. 서 론

되먹임 집합 문제 (feedback set problem, FSP)는 주어진 그래프 $G=(V,E)$에서 사이클 (cycle or loop)이 발생하는 경우, 사이클을 제거할 수 있는 최소의 정점 또는 간선을 찾는 문제이다. 즉, 어떤 간선이나 정점을 최소의 개수 또는 최소 가중치 합이 되도록 삭제하였을 때 사이클이 존재하지 않는 (cycle-free or acyclic) 그래프를 얻을 수 있는가의 문제로 루프 컷셋 (loop cutset)이라고도 한다.

FSP는 무방향 그래프 (undirected graph)와 방향 그래프 (digraph)로 구분된다. 각각은 정점 (vertex or node)과 간선 (edge or arc)으로 다시 구분되며, 간선이 가중치를 갖고 있는 (weighted) 경우와 모든 간선의 가중치가 "1"인 가중치가 없는 (unweighted) 경우로 세분화된다. 결국, 되먹임 집합 문제는 그림 1과 같이 8가지 경우로 분류될 수 있다[1]. 이들 중 무방향 그래프의 간선과 관련된 문제는 P-문제로, 나머지 무방향 그래프의 정점과 방향 그래프의 노드 (node)와 호 (arc) 문제는 일반적으로 NP-완전 (NP-complete)으로 다항시간으로 정확한 해를 찾는 알고리즘이 제안되지 않고 있다[2].

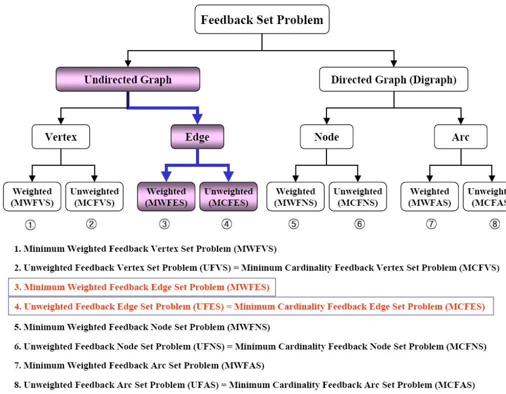


그림 1. 되먹임 집합 문제 분류
Fig. 1. Classification of feedback set problem

FSP는 조합 회로설계 (combinatorial circuit design) 분야에서 제기된 문제로, 컴퓨터 시스템의 교착상태 예방 (deadlock prevention)과 VLSI 시험분야 등에 적용되고 있다[1].

본 논문에서는 무방향 그래프의 간선에 대한 되먹임 집합 문제에 한정하여 최소 가중치 되먹임 간선 집합 문제 (minimum weighted feedback edge set problem, MWFES)와 최소 원소개수 되먹임 간선 집합 문제 (minimum cardinality feedback edge set problem, MCFES)의 최적 해 (optimal solution)를 다항시간으로 찾는 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 사례를 통해 MWFES와 MCFES의 최적 해에 대한 개념을 고찰한다. 3장에서는 MWFES와 MCFES의 최적 해를 다항시간으로 찾는 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 다양한 문제에 적용하여 제안된 알고리즘의 적용성을 평가해 본다.

II. 관련연구와 연구 배경

그림 2의 $MCFES_1$은 Dijk[4]에서 인용된 가중치가 없는 무방향 그래프에 대해 모든 사이클을 제거하기 위한 최소의 간선 수를 구하는 문제이다. $MCFES_1$은 {2,3,4,2}, {2,4,5,2}, {4,5,7,4}, {3,4, 7,6,3}, {6,7,8,6}, {2,3,4,5,2}, {2,4,7,5,2}, {2,3,4,7,5,2}, {2,3,6,7,4,2}, {2,3,6,7,5,2}, {2,3,6,8,7,5,2}, {3,4,7,8,6,3}, {3,4,5,7,8,6, 3}의 13개 사이클이 존재한다. $MCFVS=$ {2,7}, $MCFES=${{3,4},{4,5}, {5,7}, {6,7}, {7,8}}로 2개 정점 ②와 ⑦ 또는 5개 간선 {3,4}, {4,5}, {5,7}, {6,7}, {7,8}을 삭제하면 사이클이 전혀 없는 그래프를 얻을 수 있다.

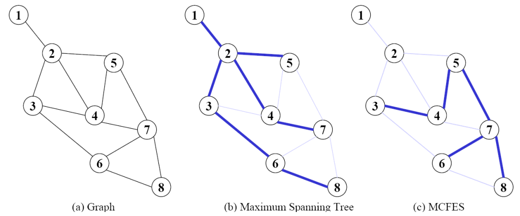


그림 2. $MCFES_1$ 문제
Fig. 2. $MCFES_1$ problem

그림 3의 $MWFES_1$은 Chen[5]에서 인용된 가중치가 있는 무방향 그래프로 모든 사이클을 제거하기 위해 최소 가중치 합의 간선을 선택하는 문제이다. $MWFES_1$은 {1,2,3,1}, {2,3,4 ,2}, {3,4,5,3}, {1,2,4,3,1}, {2,3,4,5,3,1}, {1,2,4,5,3,1}의 6개 사이클이 존재한다. 이 그래프에 대해 모든 사이클을 제거하기 위한 최소 가중치 되먹임 간선 $MWFES=${24{1,2}+7{3,4}+18{3,5} }=49이다.

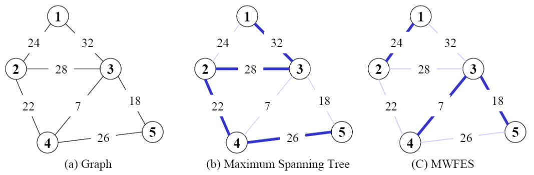


그림 3. $MWFES_1$ 문제
Fig. 3. $MWFES_1$ problem

Wikipedia[2]는 FES 문제는 최소신장트리 (minimum spanning tree, MST)를 찾는 문제에 상응한다(equivalent)고 제시하고 있다. 반면에, Demetrescu와 Finocchi[6]는 FES는 최대신장트리 (maximum spanning tree, MxST)를 찾아 다항시간으로 문제를 풀 수 있다고 제시하고 있다. 그러나 어떻게 FES를 구하는지는 제시하지 않고 있다.

간선 가중치가 있는 경우와 가중치가 없는 경우의 무방향 그래프에 대해 모든 사이클의 최대 (최소) 가중치 간선을 제거하여 가중치 합이 최소 (최대)가 되는 신장트리를 최소 (최대) 신장트리라 한다.

최소신장트리는 사이클이 존재하지 않으면서, 그래프의 간선 가중치 합이 최소가 되도록 모든 정점들을 연결하는 신장트리를 찾는 문제로 사이클의 최대 가중치 간선을 삭제한다. 반면에, FES는 사이클이 존재하지 않는 최대 가중치 합의 연결된 신장트리를 얻는 개념은 MxST를 구하고, 여집합 (complement)을 선택하면 된다. 결국, 그래프의 간선 집합 E는 FES 간선집합 E_{FES}와 최대신장트리 간선집합 E_{MxST}로 양분 (bipartite)될 수 있으며, $E_{FES}=E \setminus E_{MxST}$로 얻을 수 있다.

III. 최소 되먹임 간선 집합 알고리즘

본 장에서는 최대신장트리를 얻는 방법을 적용하여 MCFES와 MWFES의 최적 해를 다항시간으로 찾는 알고리즘을 제안한다.

대표적인 MST 알고리즘에는 Boruvka, Prim, Kruskal과 역-삭제 (reverse-delete) 알고리즘이 존재하며, 알고리즘 수행 복잡도는 $O(E\log E)$로 다항시간 알고리즘이다[7]. 본 논문에서는 Kruskal 알고리즘[8,9]을 적용한다. 제안되는 알고리즘은 다음 특성을 적용한다.

(1) 최대신장트리의 간선들 E_{MxST}는 최소신장트리를 얻는 Kruskal 알고리즘을 간선 가중치를 내림차순으로 정렬 (descending sort)하여 사이클 간선을 삭제하면 얻을 수 있다.
(2) 그래프의 최대신장트리 간선 수 $|E|$는 항상 정점 수 $|V|$보다 1개가 적다. 즉, $|E|=|V|-1$이다.
(3) MCFES와 MWFES의 간선 E_{FES}는 사이클의 최소 가중치 간선의 합인 $E_{FES}=E \setminus E_{MxST}$로 E_{MxST}의 여집합이다. 결국, 최대신장트리를 얻는 과정에서 사이클이 발생하는 간선들을 선택하면 얻을 수 있다.

위의 3가지 특성을 만족시키도록 간선 가중치를 내림차순으로 정렬하고 Kruskal 알고리즘을 적용하여 E_{MxST}와 E_{FES}를 동시에 찾는 알고리즘을 제안한다.

Kruskal 알고리즘은 연결된 그래프 $G=(V,E)$와 가중치 함수 $w:E\rightarrow \mathbb{N}$이라 가정하여 다음과 같이 수행된다[8,9].

(1) E에 있는 모든 가중치 간선들을 오름차순으로 정렬한다.
(2) 최소 가중치 간선부터 한 번에 하나씩 선택하여 해당 간선이 부분 신장트리 (partial spanning tree, T)에 추가시 사이클이 발생하지 않으면 T에 추가하고, 사이클이 발생하면 다음 최소 가중치를 갖는 간선을 선택한다.
(3) E에서 선택할 간선이 없으면 알고리즘을 종료한다.

Kruskal 알고리즘의 Step 1은 수행 복잡도가 $O(E\log E)$이며, Step 2 ~ Step 4의 수행 복잡도는 $O(E)$이다. 결국, 알고리즘 수행 복잡도는 $O(E\log E)$이다.

3.1 MCFES 알고리즘

MCFES의 경우, 모든 간선의 가중치가 “1”로 동일하다. 결국, 가중치가 없는 모든 간선들 E를 대상으로 정렬을 수행하지 않고 Kruskal 알고리즘을 적용하여 MxST를 얻으면 삭제된 간선이 MCFES가 되며, 알고리즘 수행 복잡도는 $O(E)$로 선형이 된다. 제안된 MCFES 알고리즘 (MCFESA)은 다음과 같이 수행된다.

(1) E에서 임의의 간선부터 시작하여 한 번에 하나씩 선택하여 해당 간선이 부분신장트리 T에 추가하였을 때 사이클이 발생하지 않는다면 T에 추가하고, 사이클이 발생하면 다음 최소 가중치를 갖는 간선을 선택한다. 사이클 발생은 특정 T에 해당 간선 $\{v_i,v_j\}$의 두 정점 v_i와 v_j가 모두 포함된 경우이다. 만약, 두 정점 v_i와 v_j가 2개 부분신장트리 T_i와 T_j에 1개씩만 포함되어 있으면 T_i와 T_j를 병합 (merge)하여 1개의 T로 구성한다. T에 추가된 간선은 MxST에 저장하고, 삭제된 간선은 MCFES에 저장한다.

(2) E에서 선택할 간선이 없으면 알고리즘을 종료한다.

그림 2의 $MCFES_1$ 문제에 대해 제안된 MCFESA의 실행 과정에서 얻은 값은 표 1에 제시되어 있다.

표 1. $MCFES_1$ 문제의 MCFESA 최적 해
Table 1. Optimal value of MCFESA for $MCFES_1$ problem

후보 간선		T	V	MxST	MCFES
E	사이클				
-	-	{ϕ}	{1,2,3,4,5,6,7,8}	-	-
{1,2}	X	{1,2}	{3,4,5,6,7,8}	{1,2}	-
{2,3}	X	{1,2,3}	{4,5,6,7,8}	{2,3}	-
{2,4}	X	{1,2,3,4}	{5,6,7,8}	{2,4}	-
{2,5}	X	{1,2,3,4,5}	{6,7,8}	{2,5}	-
{3,4}	O	{1,2,3,4,5}	{6,7,8}	-	{3,4}
{3,6}	X	{1,2,3,4,5,6}	{7,8}	{3,6}	-
{4,5}	O	{1,2,3,4,5,6}	{7,8}	-	{4,5}
{4,7}	X	{1,2,3,4,5,6,7}	{8}	{4,7}	-
{5,7}	O	{1,2,3,4,5,6,7}	{8}	-	{5,7}
{6,7}	O	{1,2,3,4,5,6,7}	{8}	-	{6,7}
{6,8}	X	{1,2,3,4,5,6,7,8}	{ϕ}	{6,8}	-
{7,8}	O	{1,2,3,4,5,6,7,8}	{ϕ}	-	{7,8}
$\|e\|=12$			수행횟수: 11회	$\|e_{mst}\|=7$	
MCFES={{3,4},{4,5},{5,7},{6,7},{7,8}}					

3.2 MWFES 알고리즘

Kruskal 알고리즘은 주어진 그래프의 사이클이 발생한 간선들 중 최대 가중치 간선을 삭제하여 남아 있는 간선들의 가중치 합이 최소가 되는 최소신장트리를 얻는다. 반면에, MWFES 문제는 삭제시킬 간선의 가중치 합이 최소가 되어야 하며, 남아 있는 간선들의 가중치 합이 최대가 되도록 최대 신장트리를 얻고 여집합을 선택하는 방법이다. 따라서 간선들을 가중치에 따라 내림차순으로 정렬시켜 Kruskal 알고리즘을 적용하면 쉽게 해결할 수 있다. 결국, MWFES 알고리즘 (MWFESA)은 다음과 같이 수행되며 알고리즘 수행 복잡도는 Kruskal 알고리즘과 동일하게 $O(E\log E)$이다.

(1) E에 있는 모든 가중치 간선들을 내림차순 정렬시킨다.
(2) 최대 가중치 간선부터 한 번에 하나씩 선택하여 해당 간선이 부분신장트리 T에 추가하였을 때 사이클이 발생하지 않는다면 T에 추가하고, 사이클이 발생하면 다음 최소 가중치를 갖는 간선을 선택한다. 사이클 발생은 특정 T에 해당 간선 $\{v_i,v_j\}$의 두 정점 v_i와 v_j가 모두 포함된 경우이다. 만약, 두 정점 v_i와 v_j가 2개 부분신장트리 T_i와 T_j에 1개씩만 포함되어 있으면 T_i와 T_j를 병합하여 1개의 T로 구성한다. T에 추가된 간선은 MxST에 저장하고, 삭제된 간선은 MWFES에 저장한다.
(3) E에서 선택할 간선이 없으면 알고리즘을 종료한다.

그림 3의 $MWFES_1$ 문제에 대해 제안된 MWFESA의 실행 과정에서 얻은 값은 표 2에 제시되어 있다.

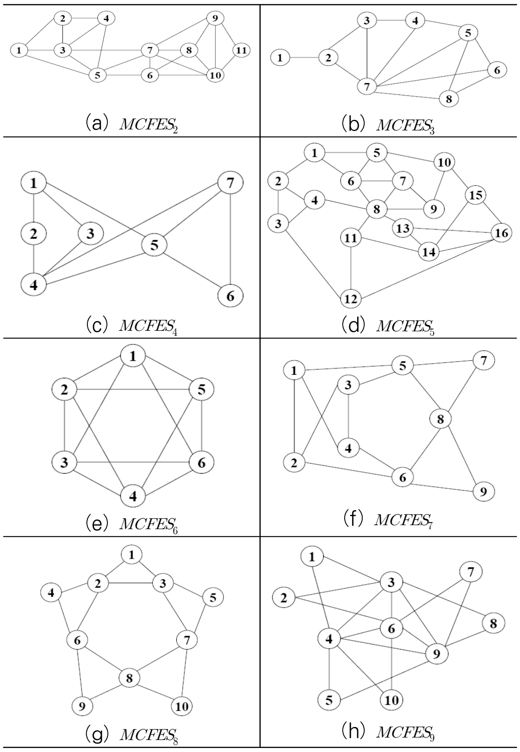
표 2. $MWFES_1$ 문제의 MWFESA 최적 해
Table 2. Optimal value of MWFESA for $MWFES_1$ problem

Candidate Edges		T	V	MxST	MWFES
내림차순 정렬	사이클				
-	-	{ϕ}	{1,2,3,4,5}	-	-
32{1,3}	X	{1,3}	{2,4,5}	32{1,3}	-
28{2,3}	X	{1,2,3}	{4,5}	28{2,3}	-
26{4,5}	O	{1,2,3}, {4,5}	{ϕ}	26{4,5}	-
24{1,2}	X	{1,2,3}, {4,5}	{ϕ}	-	24{1,2}
18{3,5}	O	{1,2,3,4,5}	{ϕ}	22{2,4}	-
7{3,4}	O	{1,2,3,4,5}	{ϕ}	-	18{3,5}
		{1,2,3,4,5}	{ϕ}	-	7{3,4}
$\|e\|=7$		수행횟수: 7회		$\|e_{mst}\|=4$	
MWFES={24{1,2},18{3,5},7{3,4}}					

IV. 알고리즘 적용 및 결과 분석

4.1 MCFES 문제

본 절에서는 그림 4의 8개 MCFES 문제에 MCFESA를 적용하여 본다.

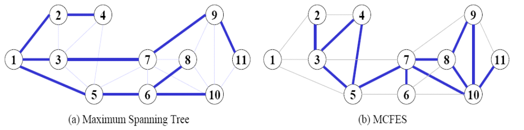


(a) $MCFES_2$ (b) $MCFES_3$ (c) $MCFES_4$ (d) $MCFES_5$ (e) $MCFES_6$ (f) $MCFES_7$ (g) $MCFES_8$ (h) $MCFES_9$

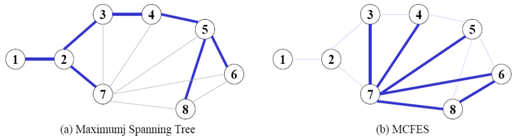
그림 4. MCFES 실험 그래프
Fig. 4. Experimental graphs for MCFES

$MCFES_2$와 $MCFES_3$은 Saha와 Pal[10]에서,

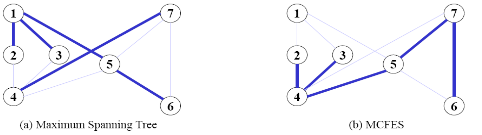
$MCFES_4, MCFES_6, MCFES_7, MCFES_8, MCFES_9$는 Cattell et al.[11]에서, $MCFES_5$는 Dijk[4]에서 인용되었다. 8개 MCFES 문제에 대해 MCFESA로 최적 해를 구한 결과는 그림 5에 제시하였다. 그림에서 MCFESA는 MxST와 여집합인 MCFES를 쉽게 구할 수 있음을 알 수 있다.



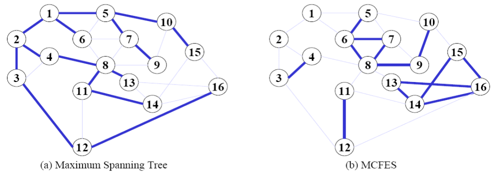
(a) $MCFES_2$



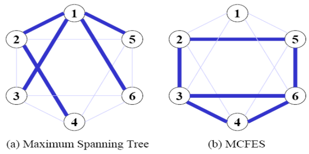
(b) $MCFES_3$



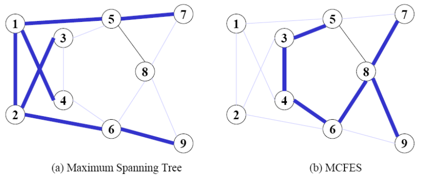
(c) $MCFES_4$



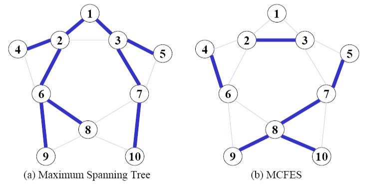
(d) $MCFES_5$



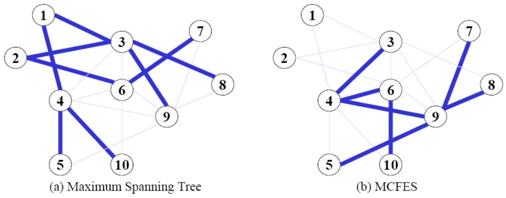
(e) $MCFES_6$



(f) $MCFES_7$



(g) $MCFES_8$

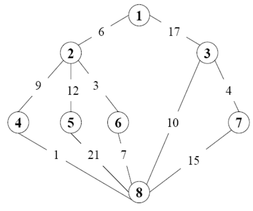


(h) $MCFES_9$

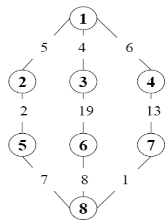
그림 5. MCFES 문제의 최적 해
Fig. 5. Optimal solution of MCFES problems

4.2 MWFES 문제

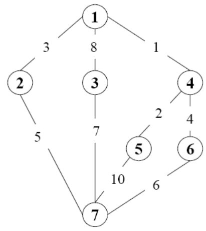
본 절에서는 그림 6의 3개 MWFES 문제에 MWFESA를 적용하여 본다. $MWFES_2, MWFES_3, MWFES_4$는 Chen[5]에서 인용되었다.



(a) $MWFES_2$



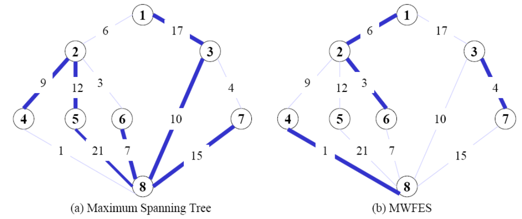
(b) $MWFES_3$



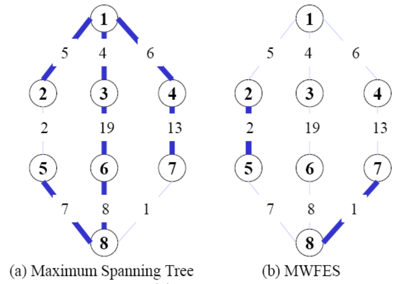
(c) $MWFES_4$

그림 6. MWFES의 실험 데이터
Fig. 6. Experimental data for MWFES

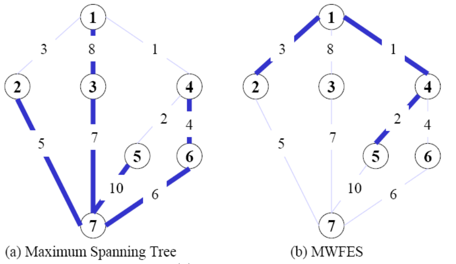
3개 문제에 대해 MWFESA로 최적 해를 구한 결과는 그림 7에 제시하였다. 제안된 MWFESA는 3개 문제에 대해 MxST와 여집합인 MWFES를 쉽게 양분시킬 수 있었다.



(a) $MWFES_2$



(b) $MWFES_3$



(c) $MWFES_4$

그림 7. MWFES 문제의 최적 해
Fig. 7. Optimal solution for MWFES problems

V. 결론 및 추후 연구과제

본 논문은 그래프에서 사이클을 제거한 신장트리를 만드는 방법 중 삭제될 간선이 최소 개수 또는 최소 간선 가중치 합이 되도록 하는 MCFES와 MWFES 문제를 연구하였다.

MCFES와 MWFES 문제의 최적 해는 최대신장트리를 얻어 여집합을 선택하면 쉽게 구할 수 있다. 따라서 본 논문은 간선 가중치 값의 내림차순으로 정렬시키고 최소신장트리를 얻는 Kruskal 알고리즘을 적용하여 사이클이 발생하지 않는 간선은 MxST로, 사이클이 발생하는 간선은 MCFES 또는 MWFES로 선택하는 방법을 적용하였다.

무방향 그래프의 간선 가중치가 없는 경우와 있는 경우에 대해 다양한 그래프를 대상으로 제안된 방법을 적용한 결과 MCFES는 $O(E)$로, MWFES는 $O(E\log E)$의 수행 복잡도로 최적 해를 얻는데 성공하였다.

본 논문은 최소 되먹임 간선 집합 문제에 한정하여 쉽게 최적 해를 구하였다. 추후, NP-완전 문제로 알려진 최소 되먹임 정점 집합 (MCFVS와 MWFVS) 문제의 최적 해를 다항시간으로 구하는 알고리즘을 연구할 계획이다.

REFERENCES

〔1〕 P. Festa, P. M. Pardalos, and M. G. C. Resende, "Feedback Set Problems," AT&T Labs Research Technical Report: 99.2.2, http://www.research.att.com/~mgcr/doc/sfsp.pdf, 1999.

〔2〕 Wikipedia, "Feedback Vertex Set," http://en.wikipedia.org/wiki/Feedback_vertex_set, Wikimedia Foundation Inc., 2014.

〔3〕 Wikipedia, "Feedback Arc Set," http://en.wikipedia.org/wiki/Feedback_arc_set,Wikimedia Foundation Inc., 2014.

〔4〕 T. C. Dijk, "Kernelization For Cutset," The 19th Belgian-Dutch Conference on Artificial Intelligence (BNAIC 2007), http://people.cs.uu.nl/thomasd/bnaickernel.ppt, 2007.

〔5〕 Y-L. Chen, "On the Study of Feedback Problems in Diamond Graphs," Information Management, National Ch-Nan University, Master Thesis, 2006.

〔6〕 C. Demetrescu and I. Finocchi, "Combinatorial Algorithms for Feedback Problems," Information Processing Letters (IPL), Vol. 86, No. 3, pp. 129-139, May. 2003.

〔7〕 Wikipedia, "Minimum Spanning Tree," http://en.wikipedia.org/wiki/Minimum_spanning_tree, Wikimedia Foundation, Inc., 2014.

〔8〕 J. B. Kruskal, "On the Shortest Spanning Subtree and The Traveling Salesman Problem," Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 7, No. 1, pp. 48-50, Feb. 1956.

〔9〕 WWL. Chen, "Discrete Mathematics," Department of Mathematics, Division of ICS, Macquarie University, Australia, http://www. maths.mq.edu.au/~wchen/lndmfolder/lndm.html, 2003.

〔10〕 A. Saha and M. Pal, "An Algorithm to find a Minimum Feedback Vertex Set of an Interval Graph," Advanced

Modeling and Optimization, Vol. 7, No. 1, pp. 99-116, Jan. 2005.

〔11〕 K. Cattell, M. J. Dinneen and M. R. Fellows, "Obstructions to within a few vertices or edges of acyclic," 4th International Workshop on Algorithms and Data Structures, Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 955, pp. 415-427, Jun. 1995.

저 자 소 개

이 상 운(Sang-Un, Lee)
1983년 ~ 1987년 :
한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
1995년 ~ 1997년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
1998년 ~ 2001년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
2015.4 ~ 현 재 :
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 소프트웨어 개발 방법론, 소프트웨어 신뢰성, 그래프 알고리즘
e-mail : sulee@gwnu.ac.kr