

유한요소-전달강성계수법을 이용한 축대칭 원추형 셸의 구조해석 Structural Analysis of Axisymmetric Conical Shells Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method

최명수* · 변정환** · 여동준***†

Myung-Soo Choi*, Jung-Hwan Byun** and Dong-Jun Yeo***†

(Received 28 September 2014, Revision received 27 October 2014, Accepted 29 December 2014)

Abstract: Various finite elements have been studied and developed to analyze a variety of structures in the finite element method(FEM). The transfer stiffness coefficient method(TSCM) is an effective algorithm for structural analysis but the structures which can be applied were limited. In this paper, a computational algorithm for the structural analysis of axisymmetric conical shells under axisymmetric loading is formulated using the finite element-transfer stiffness coefficient method(FE-TSCM). The basic concept of FE-TSCM is the combination of the modeling technique of FEM and the transfer technique of TSCM. The FE-TSCM has all the advantages of both FEM and TSCM. After carrying out the structural analysis of axisymmetric conical shells using FEM, FE-TSCM, and analytical method we compare the computational results of FE-TSCM with those of the other methods in terms of computational accuracy.

Key Words : Conical Shell, Axisymmetric Shell, Structural Analysis, Transfer Stiffness Coefficient Method, Finite Element Method

1. 서 론

컴퓨터의 발전 및 보급과 더불어 궁극적으로 행렬(matrix)들의 연산으로 귀착되는 구조해석¹⁾을 컴퓨터를 이용하여 효과적으로 수행하려는 여러 알고리즘들이 개발되어 왔고, 현재는 그 중에서도 유한요소법(finite element method)²⁾이 가장 강력하고 많은 사용자를 확보하고 있다. 특히, 유한요소법은 ANSYS, NASTRAN 등 범용 구조해석 소프트웨어의

솔버(solver) 역할을 독점하면서 그 위상을 굳혀 나가고 있으며, 이러한 유한요소법의 발전과 더불어 다양한 유한요소 개발에 관한 연구가 수행되었고, 그 결과 봉, 보, 판, 셸 등 다양한 유한요소들이 개발되어 더욱더 효과적이고 편리한 구조해석이 가능해졌다. 그러나 유한요소법은 대규모 구조물의 구조해석 과정에서 계산 시간이나 계산 메모리가 급증하는 문제점이 지적되고 있다³⁾.

***† 여동준(교신저자) : 전남대학교 해양기술학부

E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133

*최명수 : 전남대학교 해양경찰학과

**변정환 : 전남대학교 해양기술학부

***† Dong-Jun Yeo(corresponding author) : Faculty of Marine Technology, Chonnam National University.

E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133

*Myung-Soo Choi : Department of Maritime Police Science, Chonnam National University.

**Jung-Hwan Byun : Faculty of Marine Technology, Chonnam National University.

본 연구의 저자들은 과거부터 퍼스널 컴퓨터에 적합한 효과적인 해석 알고리즘의 개발에 관한 연구를 수행해 왔고, 그 결과 구조해석에서 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)⁴⁾의 유효성을 발표한 바 있다. 전달강성계수법은 강성계수의 전달을 이용하여 대규모 시스템의 구조해석을 효과적으로 수행할 수 있지만, 적용할 수 있는 구조물이 제한적이었다. 따라서 저자들은 앞선 연구자들에 의해 개발된 다양한 유한요소들을 전달강성계수법과 함께 사용할 수 있도록 두 방법을 접합한 유한요소-전달강성계수법(finite element-transfer stiffness coefficient method)⁵⁻⁷⁾을 개발하여, 사각평판, 원통형 셸, 3차원 구조물의 구조해석에 적용한 바 있다.

한편, 스피커에서 우주 구조물까지 원추형 셸은 다양한 산업 분야에서 널리 사용되고 있다. 이 연구에서는 축대칭 하중을 받는 축대칭 원추형 셸을 대상으로 구조해석을 수행할 수 있는 전산 알고리즘을 유한요소-전달강성계수법으로 정식화한다. 그리고 절두 원추형 셸과 완전 원추형 셸을 대상으로 구조해석을 수행한 후, 유한요소-전달강성계수법이 원추형 셸의 구조해석에서도 신뢰성 있는 해석 기법임을 확인한다.

2. 축대칭 원추형 셸의 구조해석을 위한 전산 알고리즘

이 장에서는 유한요소법에서 사용되는 축대칭 원추형 셸요소의 강성행렬을 유도하는 과정과 전달강성계수법에 의해 원추형 셸 구조물의 구조해석을 수행하는 과정을 간략히 기술한다.

2.1 해석 모델

축대칭 하중을 받는 축대칭 원추형 셸의 구조 해석 알고리즘을 기술하기 위해 Fig. 1과 같은 해석 모델을 고려한다. Fig. 1의 해석 모델은 하나의 원추형 셸과 다수의 탄성 지지로 구성된다. 그리고 원추형 셸은 Fig. 2와 같은 다수의 원추형 셸요소로 분할되고, 모든 원추형 셸요소는 동일한 반정각(α)을 갖는다. 그리고 셸 요소의 좌우측 양쪽 끝에는 일정한 반경을 갖는 원형 절점(ring

node, 이하 ‘절점’이라 함)이 하나씩 존재한다. 만약 Fig. 1처럼 원추형 셸을 n 개의 셸요소로 분할한다면, 해석 모델의 좌단에서 우단으로 각 셸 요소를 셸 요소 1, 셸 요소 2, ..., 셸 요소 n 이라고 부른다. 이 경우 해석 모델은 총 $n+1$ 개의 절점을 가지며, 절점도 좌단에서 우단으로 각각 절점 1, 절점 2, ..., 절점 $n+1$ 이라고 부른다.

축대칭 하중을 받는 축대칭 원추형 셸의 구조 해석을 위해서 각 절점은 3자유도를 갖는다. 따라서 각 절점의 변위벡터($\mathbf{d} = \{u, w, \theta\}$)는 셸의 경선 방향(s 방향)의 변위 u , 법선 방향의 변위 w , 그리고 각변위 $\theta = dw/ds$ 로 구성되고, 각 절점의 힘벡터($\mathbf{f} = \{N, V, M\}$)는 경선 방향의 힘 N , 법선 방향의 힘 V , 그리고 모멘트 M 으로 구성된다. 따라서, 해석 모델은 총 $n+1$ 개의 절점으로 구성되며 각 절점은 3자유도를 가지므로, 해석 모델은 총 $3(n+1)$ 자유도를 갖는다. 그리고 원추형 셸 요소는 6자유도를 갖는다.

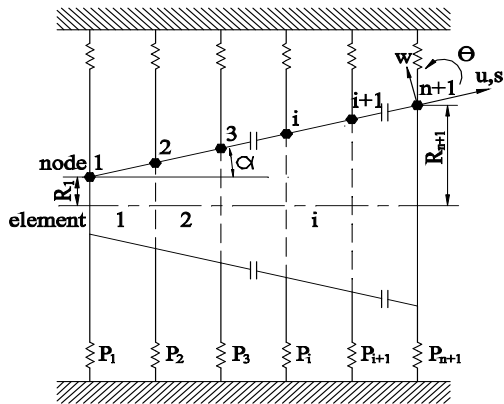


Fig. 1 Analytical model

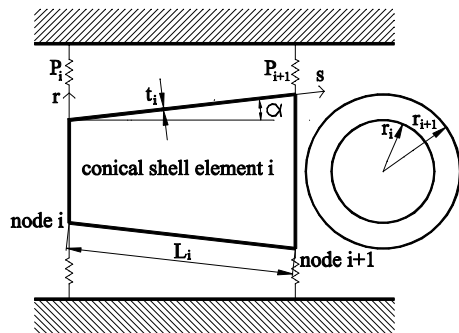


Fig. 2 Conical shell element

기초지지 스프링도 절점당 3방향의 스프링으로 모델링하며 스프링상수를 상기 방향별로 각각 k_N , k_V , k_M 으로 정의한다. 그리고 전달강성계수법에서는 구조물의 경계조건을 구조물 좌단과 우단에 상당하는 절점 1과 절점 $n+1$ 의 기초지지 스프링으로 모델링한다. 즉, 좌단의 경계조건이 법선 방향의 변위만 고정이고, 다른 방향(경선 방향과 회전 방향)은 자유인 경우에는 절점 1의 스프링상수를 $k_V = \infty$, $k_N = k_M = 0$ 으로 처리한다.

하중은 셸의 회전축을 중심으로 대칭적으로 절점에 작용하며, 셸의 경선 방향의 하중을 q_N , 그리고 모멘트를 q_M 으로 구성한다. 만약 원추형 셸에 압력의 형태로 하중이 작용할 경우에는 이를 절점 하중으로 등가화시킨다.

2.2 축대칭 원추형 셸요소의 강성행렬

이 절에서는 유한요소법에서 축대칭 하중을 받는 축대칭 원추형 셸의 요소 강성행렬을 유도하는 과정⁸⁾을 간략히 기술한다.

Fig. 2에 나타난 것처럼 길이가 L_i 인 i 번째 축대칭 원추형 셸요소의 s 방향에 따른 경선방향의 변위 u 와 법선방향의 변위 w 를 셸요소의 절점변위인 절점 i 의 변위($\mathbf{d}_i = \{u, w, \theta\}_i$)와 절점 $i+1$ 의 변위($\mathbf{d}_{i+1} = \{u, w, \theta\}_{i+1}$)를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_{i+1} \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2] \boldsymbol{\delta}_i \quad (1)$$

여기서

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 & 0 \\ 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3) & L_i(\xi-2\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & (3\xi^2-2\xi^3) & L_i(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \quad (2)$$

이고, $\xi = s/L_i$ 이다.

축대칭 원추형 셸요소의 변형률 벡터는 다음의 4성분으로 구성되며, 여기서 원추형 셸의 반경각

인 α 는 상수(constant)이고, r 은 반지름이다.

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \kappa_s \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} du/ds \\ (w \cos \alpha + u \sin \alpha)/r \\ -d^2w/ds^2 \\ -(\sin \alpha/r)(dw/ds) \end{Bmatrix}_i \quad (3)$$

식(3)의 변형률 벡터에 대응하는 축대칭 원추형 셸요소의 합응력(stress resultant)벡터는

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix}_i = \mathbf{D}_i \boldsymbol{\epsilon}_i \quad (4)$$

이고, 행렬 \mathbf{D}_i 는 셸이 등방성재료인 경우에

$$\mathbf{D}_i = \frac{E_i t_i}{(1-\nu_i)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_i^2/12 & \nu_i t_i^2/12 \\ 0 & 0 & \nu_i t_i^2/12 & t_i^2/12 \end{bmatrix} \quad (5)$$

이고, 여기서 E_i 는 i 번째 셸요소의 탄성계수, ν_i 는 푸아송 비, t_i 는 셸의 두께이다.

식(1)을 식(3)에 대입하여 정리하면, 식(6)과 같이 변형률과 절점변위 사이의 관계식⁸⁾을 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \mathbf{H}_i \boldsymbol{\delta}_i = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & h_{14} & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} & h_{26} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & 0 & h_{35} & h_{36} \\ 0 & h_{42} & h_{43} & 0 & h_{45} & h_{46} \end{bmatrix}_i \boldsymbol{\delta}_i \quad (6)$$

여기서

$$h_{11} = -1/L_i, \quad h_{14} = 1/L_i, \quad h_{21} = (1-\xi) \sin \alpha/r,$$

$$h_{24} = \xi \sin \alpha/r, \quad h_{22} = (1-3\xi^2+2\xi^3) \cos \alpha/r,$$

$$h_{23} = (\xi-2\xi^2+\xi^3) L_i \cos \alpha/r,$$

$$h_{25} = (3\xi^2-2\xi^3) \cos \alpha/r,$$

$$h_{26} = (-\xi^2+\xi^3) L_i \cos \alpha/r,$$

$$\begin{aligned}
 h_{32} &= (6 - 12\xi)/L_i^2, \quad h_{33} = (4 - 6\xi)/L_i, \\
 h_{35} &= (-6 + 12\xi)/L_i^2, \quad h_{36} = (2 - 6\xi)/L_i, \\
 h_{42} &= (6\xi - 6\xi^2)\sin\alpha/rL_i, \\
 h_{43} &= (-1 + 4\xi - 3\xi^2)\sin\alpha/r, \\
 h_{45} &= (-6\xi + 6\xi^2)\sin\alpha/rL_i, \\
 h_{46} &= (2\xi - 3\xi^2)\sin\alpha/r
 \end{aligned} \quad (7)$$

유한요소법으로부터 축대칭 원추형 셸요소의 강성행렬⁸⁾은 식(7)과 같이 구할 수 있으며, 여기서 \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_i 는 요소 강성행렬의 부분행렬이다.

$$\mathbf{K}_i^e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix}_i = \int \mathbf{H}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{H}_i dA \quad (8)$$

한편, 식(4)와 식(6)으로부터, i 번째 원추형 셸요소의 합응력벡터와 요소 절점변위벡터 사이의 관계를 다음 식과 같이 유도할 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{H}_i \boldsymbol{\delta}_i \quad (9)$$

2.3 전달강성계수법의 적용

이 절에서는 전달강성계수법을 이용하여 축대칭 하중을 받는 축대칭 원추형 셸의 구조해석을 수행하는 과정⁷⁾을 간략히 기술한다.

전달강성계수법에서는 절점 1 우측의 강성계수행렬(\mathbf{S}_1)과 힘보정벡터(\mathbf{e}_1)를 먼저 구한다.

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{e}_1 = -\mathbf{q}_1 \quad (10)$$

여기서 \mathbf{P}_1 은 절점 1의 기초지지 스프링으로 구성된 지지 강성행렬이고, \mathbf{q}_1 은 절점 1에 작용하는 외력으로 구성된 외력벡터이다.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} k_N & 0 & 0 \\ 0 & k_V & 0 \\ 0 & 0 & k_M \end{bmatrix}_1, \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} q_N \\ q_V \\ q_M \end{bmatrix}_1 \quad (11)$$

절점 1을 제외한 나머지 절점의 강성계수행렬과 힘보정 벡터는 필드 전달식과 포인트 전달식으로부터 순차적으로 구한다. 필드 전달식은 식(12)와 같다.

$$\bar{\mathbf{S}}_{i+1} = \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{V}_i, \quad \bar{\mathbf{e}}_{i+1} = -\mathbf{B}_i^T \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{e}_i \quad (12)$$

($i = 1, 2, 3, \dots, n$)

여기서

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{S}_i + \mathbf{A}_i \quad (13)$$

이고, 포인트 전달식은 식(14)와 같다.

$$\mathbf{S}_{i+1} = \bar{\mathbf{S}}_{i+1} + \mathbf{P}_{i+1}, \quad \mathbf{e}_{i+1} = \bar{\mathbf{e}}_{i+1} - \mathbf{q}_{i+1} \quad (14)$$

($i = 1, 2, 3, \dots, n$)

여기서

$$\mathbf{P}_{i+1} = \begin{bmatrix} k_N & 0 & 0 \\ 0 & k_V & 0 \\ 0 & 0 & k_M \end{bmatrix}_{i+1}, \quad \mathbf{q}_{i+1} = \begin{bmatrix} q_N \\ q_V \\ q_M \end{bmatrix}_{i+1} \quad (15)$$

이다.

필드 전달식과 포인트 전달식을 이용하여 최종적으로 절점 $n+1$ 우측의 강성계수행렬(\mathbf{S}_{n+1})과 힘보정벡터(\mathbf{e}_{n+1})를 구한 후, 우단인 절점 $n+1$ 의 변위벡터(\mathbf{d}_{n+1})는 다음 식으로부터 구한다.

$$\mathbf{d}_{n+1} = -\mathbf{S}_{n+1}^{-1} \mathbf{e}_{n+1} \quad (16)$$

절점 $n+1$ 을 제외한 나머지 절점의 변위벡터는 식(17)로부터 연속적으로 구한다.

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{e}_i \quad (i = n, n-1, \dots, 1) \quad (17)$$

절점의 변위벡터를 구한 후, 절점 좌측의 힘벡터는 식(18), 절점 우측의 힘벡터는 식(19)로부터 구한다. 합응력벡터는 식(9)로부터 계산한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \bar{\mathbf{S}}_i \mathbf{d}_i + \bar{\mathbf{e}}_i \quad (i = 2, 3, 4, \dots, n+1) \quad (18)$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{d}_i + \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (19)$$

3. 수치 계산 결과

이 연구에서 제안된 방법의 신뢰성을 확인하기 위하여, 선행 연구자⁹⁻¹¹⁾들이 이미 계산한바 있는 2가지 원추형 셸을 대상으로 구조해석을 수행하여 그 결과를 비교하였다.

3.1 절두 원추형 셸

Fig. 3의 계산 모델 1은 Komatsu⁹⁾가 이전에 유한요소법(FEM)으로 해석한 바 있는 절두 원추형 셸 모델이다. 계산 모델 1은 내경(R_i)이 95.25 mm (3.75 in), 외경(R_o)이 254 mm(10 in), 두께가 2.027 mm(0.07979 in)이다. 원추형 셸은 Fig. 3과 같이 외부로부터 6894 Pa(1.0 lb/in²)의 일정한 압력을 받고, Fig. 3의 각도 α 는 20°이다. 경계조건은 셸의 내경 부분에서 고정, 외경 부분에서 자유이다. 셸 재료의 탄성계수는 71.84 GPa(1.042×10⁷ lb/in²)이고, 푸아송 비가 0.32이다.

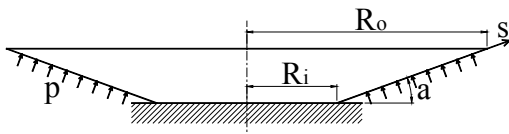


Fig. 3 Computational model 1

Table 1 Stress resultants of computation model 1

Node	N_s [N/cm]		N_θ [N/cm]	
	FE-TSCM	FEM	FE-TSCM	FEM
1	49.8172	49.8172	15.9415	15.9415
2	44.9560	44.9560	0.3642	0.3642
3	37.6985	37.6985	-18.8190	-18.8190
4	31.1633	31.1633	-28.4048	-28.4048
5	25.1577	25.1577	-32.9425	-32.9425
6	19.7925	19.7925	-35.9437	-35.9437
7	15.0267	15.0267	-38.7892	-38.7892
8	10.7538	10.7538	-41.7849	-41.7849
9	6.8722	6.8722	-44.8621	-44.8621
10	3.3082	3.3082	-47.8660	-47.8660
11	1.3031	1.3031	-50.2516	-50.2516

Komatsu와 동일하게 계산 모델 1을 10개의 원추형 셸요소로 분할하고, 하부의 절점을 절점 1, 상부의 절점을 절점 11로 정한다. 각 절점의 합응력(stress resultant)을 Komatsu의 유한요소법(FEM)과 이 연구에서 사용한 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)으로 계산한 결과를 Table 1에 모두 나타내었다. Table 1에서 알 수 있듯이 양 방법의 계산 결과가 완전히 일치하였다. 양방법의 결과가 완전히 일치한 것은 양 방법이 동일한 셸요소의 강성행렬을 기반으로 계산했기 때문이며, 따라서 유한요소-전달강성계수법으로 구조해석을 수행하는 계산 과정에 전혀 문제가 없음을 알 수 있다.

3.2 완전 원추형 셸

Fig. 4의 계산 모델 2는 Kraus¹⁰⁾가 이전에 해석적인 방법으로 해를 구한 바 있는 완전 원추형 셸 모델이고, Bhatia와 Sekhon¹¹⁾도 동일한 모델에 대해 정확한 강성 행렬을 유도하여 응력해석을 수행한 바 있다. 계산 모델 2는 경선 방향의 길이(L)가 500 mm, 두께가 10 mm이다. 이 셸은 Fig. 4와 같이 내부에서 9.8×10⁴ Pa(1.0 kg/cm²)의 일정한 압력(p)을 받고, 경계조건은 셸의 외경 부분만이 고정이다. 셸 재료의 탄성계수는 196 GPa(2.0×10⁶ kg/cm²)이고, 푸아송 비가 0.3이다.

Fig. 4에 나타난 계산모델의 원추형 셸의 반경각(α)이 각각 15°, 45°, 60° 및 75°일 때, 이 셸을 1000개의 원추형 셸요소로 분할하여 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)으로 구조해석을 수행하여 경선방향의 합응력(N_s , N_θ , M_s , M_θ)을 계산한 결과를 Fig. 5에 나타내었다. Fig. 5의 결과는 Kraus¹⁰⁾와 Bhatia and Sekhon¹¹⁾의 계산결과와 매우 잘 일치하였다. 따라서 유한요소-전달강성계수법이 축대칭 원추형 셸의 구조해석을 수행할 때 신뢰성 있는 계산 결과를 제공해 준다는 것을 재차 확인할 수 있었다.

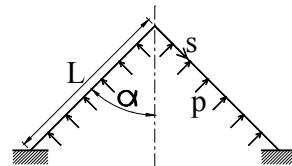


Fig. 4 Computational model 2

5. 결론

이 연구에서는 유한요소법에서 사용되는 축대칭 원추형 셀의 요소 강성행렬을 이용하여 강성계수의 전달에 기본 개념을 둔 전달강성계수법을 조합한 유한요소-전달강성계수법으로 축대칭 하중을 받는 원추형 셀의 구조해석 알고리즘을 정식화하였다.

절두 원추형 셀을 대상으로 유한요소법 및 유한요소-전달강성계수법으로 구조해석을 수행하고, 계산 결과의 비교를 통해 본 연구에서 제안한 유한요소-전달강성계수법의 신뢰성을 확인하였다. 그리고 내부 압력을 받는 완전 원추형 셀을 대상으로 유한요소-전달강성계수법으로 구조해석을 수행한 후, 동일한 모델에 대한 해석해와의 비교를 통해 유한요소-전달강성계수법의 신뢰성을 재확인하였다. 따라서, 축대칭 원추형 셀의 구조해석에 유한요소-전달강성계수법이 신뢰성 있는 해석 알고리즘을 검증할 수 있었다.

References

1. R. E. Sennett, 1994, "Matrix Analysis of Structures", Prentice Hall, New Jersey, pp. 1-228.
2. D. L. Logan, 1993, "A First Course in the Finite Element Method(2nd Edition)", PWS, Boston, pp. 1-662.
3. M. H. Nam, D. H. Ha, K. H. Lee and H. D. Jang, 1997, "An Analysis of Cylindrical Tank on Elastic Foundation by Transfer Matrix and Stiffness Matrix", Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea, Vol. 10, No. 1, pp. 193-200.
4. M. S. Choi, D. H. Moon and H. Y. Jung, 2003, "Transfer of Stiffness Coefficient", Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea, Vol. 16, No. 1, pp. 9-18.
5. M. S. Choi, 2007, "Structural Analysis of Plate Structures by Transfer of Stiffness Coefficient",

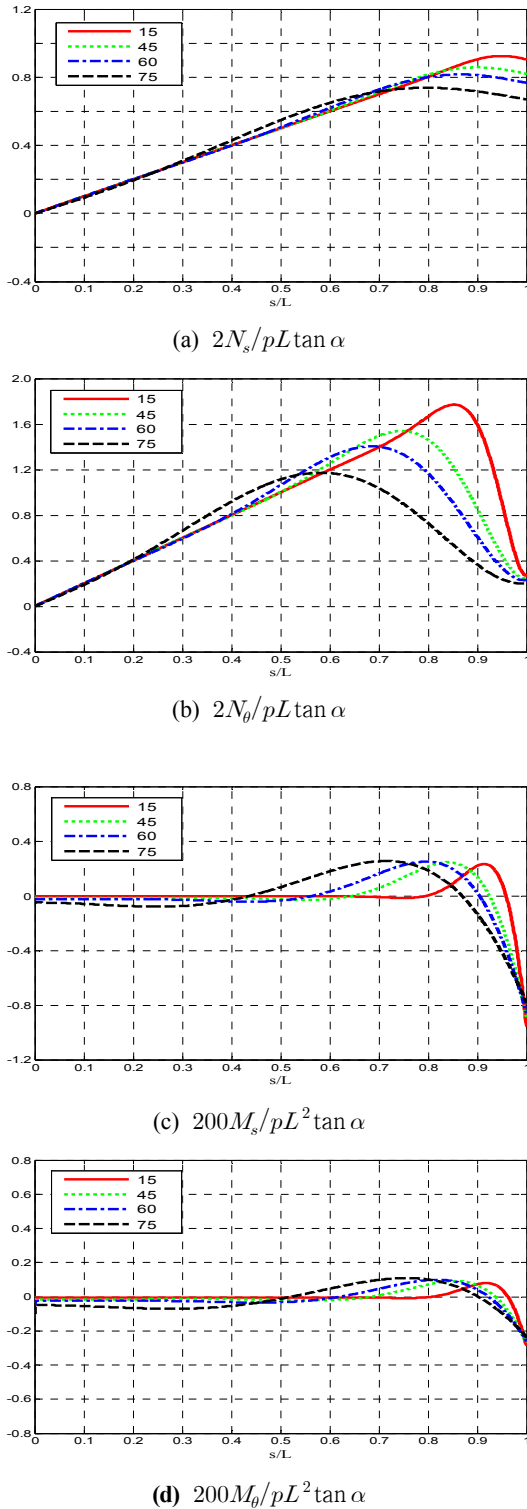


Fig. 5 Stress resultants obtained from FE-TSCM

- Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 11, No. 1, pp. 92-97.
6. M. S. Choi and D. H. Moon, 2012, "Static Analysis of Three Dimensional Solid Structure by Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method Introducing Hexahedral Element", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 16, No. 1, pp. 78-83.
 7. M. S. Choi and D. J. Yeo, 2012, "Stress Analysis of Axisymmetric Cylindrical Shell", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 16, No. 6, pp. 45-51.
 8. C. T. F. Ross, 1990, "Finite Element Methods in Engineering Science", Ellis Horwood, Chichester, pp. 388-391.
 9. K. Komatsu, 2013, "Elastic Mechanics", Morikita, Tokyo, pp. 204-252.
 10. H. Kraus, 1967, "Thin Elastic Shells", John Wiley & Sons, New York, pp. 142-156.
 11. R. S. Bhatia and G. S. Sekhon, 1999, "Generation of Exact Stiffness Matrix for a Conical Shell Element", Computers & Structures, Vol. 70, pp. 425-435.