KIPS Tr. Comp. and Comm. Sys.
Vol.4, No.2 pp.37~40 pISSN: 2287-5891

http://dx.doi.org/10.3745/KTCCS.2015.4.2.37

The Research of the 2-Edge Labeling Methods on Binomial Trees

Kim Yong Seok†

ABSTRACT

In this paper, we present linear, varied and mixed edge labeling methods using 2-edge labeling on binomial trees. As a result of this paper, we can design the variable topologies to enable optimal broadcasting with binomial tree as spanning tree, if we use these edge labels as the jump sequence of a sort of interconnection networks, circulant graph, with maximum connectivity and high reliability.

Keywords : Binomial Tree, Edge Labeling, Circulants, Spanning Tree, Optimal Broadcasting

이항트리에서 2-에지번호매김 방법에 대한 연구

김 용 석†

요 약

본 논문에서는 이항트리의 2-에지번호매김에서 선형적 에지번호매김 방법, 변형된 에지번호매김 방법 그리고 혼합형 에지번호매김 방법들을 제안한다. 이러한 연구결과는 최대 연결도를 갖는 신뢰성이 높은 상호연결망의 일종인 원형군 그래프(circulant graph)의 점프열(jump sequence)로 에지번호들을 사용하면 이항트리를 스패닝 트리로 갖고 최적방송이 가능한 다양한 위상들을 설계할 수 있다.

키워드 : 이항트리, 에지번호매김, 원형군 그래프, 스패닝 트리, 최적방송

1. 서 론

대규모 계산수행이 필요한 대부분의 문제들은 동시에 처리될 수 있는 더 작은 문제들로 분할될 수 있으며 분할된 문제들은 병렬처리 컴퓨터의 각 프로세서에서 병렬적으로 수행된다. 이러한 병렬 알고리즘의 시간 복잡도는 계산시간과 통신시간으로 나눌 수 있다. 계산시간은 각 프로세서에서 순차 프로그램을 수행하는 데 걸리는 시간이며, 통신시간은 프로세서들 사이에 데이터를 통신하는 데 걸리는 시간이다. 프로세서의 성능이 증가하면서 계산시간보다는 통신시간이 병렬알고리즘에 미치는 영향이 더욱 커져가고 있다. 효율적인 통신방법은 시스템의 고성능을 얻기 위해 매우 중요하다[1].

방송은 상호연결망을 위한 가장 기본적인 데이터 통신기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는 데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로, 한 프로세서에 있는 메시지를 네트워크에 있는 다른 모든 프로세서들에게 보내는 과정을 말한다. 임의의 한 노드에서 방송시간은 $b(v)$로 표기하고, 이는 노드 v에서 시작한 방송을 완료하는 데 필요한 최소 단위시간을 말한다. 각 단위시간 동안 메시지를 가지고 있는 노드의 수는 많아야 두 배씩 증가하므로 N개의 노드를 가지는 그래프 G의 임의의 노드 v에서의 방송시간은 $log_2 N$보다 크거나 같다. N개의 노드를 가지는 그래프 G의 임의의 노드 v에서의 방송시간 $b(v)$가 $log_2 N$이면 이는 최소방송시간이며 최소방송시간을 가지는 방송을 최소방송이라 한다. 또한 루트에서 시작하여 최적방송이 가능한 트리를 최적방송트리(optimal broadcast tree)라 한다[2].

만약 노드대칭적인 상호연결망이 스패닝 부그래프로 이항트리를 갖는다면 그 상호연결망의 어떠한 노드도 이항트리의 루트가 되도록 스패닝 트리를 구성할 수 있다. 즉 그 상호연결망의 어떠한 노드에서도 스패닝 트리인 이항트리의 구조를 통해 최소시간에 방송을 완료할 수 있다. 2^n개의 노드를 가진 최적방송트리는 이항트리이다. 이항트리는 하이퍼큐브와 같은 다양한 시스템에서 병렬응용을 위해 가장 자주 사용되는 스패닝 트리 구조 중의 하나이다. 또한 병렬 분할 정복알고리즘의 이상적인 계산구조로 평가되고 전위계산에 사용될 뿐만 아니라 데이터 방송에 폭넓게 사용된다[3-6].

† 종신회원 : 서남대학교 컴퓨터정보학과 교수
Manuscript Received : October 6, 2014
First Revision : December 8, 2014
Accepted : December 31, 2014
∗ Corresponding Author : Kim Yong Seok(yskimsky320@naver.com)

본 논문에서는 임의의 그래프 G가 원형군의 부그래프임을 보이는 방법으로 d-에지번호매김 방법을 사용하였다[7]. 그래프 G에 대한 번호매김이란 G의 모든 노드들에 대해 서로 다른 정수 $\{1,2,\ldots,|V|\}$ 를 일대일 대응시키는 것을 말한다. 그래프의 각 에지는 이러한 번호매김에서 얻을 수 있는 에지번호를 갖는다. 에지번호는 그 에지의 양끝노드에 할당된 정수값의 차이이다[8, 9]. 예를 들면, 그래프 G에 대한 2-에지번호매김이란 에지번호가 2의 거듭제곱 차이 나게 번호매김된 것이다. 이러한 결과는 원형군과 2-에지번호매김의 정의로부터 노드 개수가 N 이하이고 2-에지번호매김이 가능한 그래프는 원형군$C(N,2)$의 부그래프임을 알 수 있다. 이러한 연구의 기존 결과로는 완전사진트리가 2-에지번호매김이 가능하여 재귀원형군$G(2^m,2)$의 부그래프이고[10], 삼항트리가 2-에지번호매김이 가능하여 재귀원형군$G(2^m,2)$의 부그래프이며[11], 완전이진트리가 4-에지번호매김이 가능하여 재귀원형군 $G(2^m,4)$의 부그래프임이 밝혀졌다[10]. 본 논문에서는 상호연결망 중에서 가장 널리 알려진 하이퍼큐브와 같은 2^n의 노드 개수를 가질 경우를 비교하면, 하이퍼큐브는 n개의 에지번호를 갖고 본 논문의 연구결과로는 에지번호가 $n-1$ 또는 $n-2$가 되는 상호연결망들을 설계할 수 있고, 또한 이항트리에서의 번호매김은 **정의 1.**의 특성상 각 서브트리들의 루트노드번호들이 4의 배수로 번호매김이 되고, 동시에 루트노드의 분지수가 n이 되어서 4의 거듭제곱으로 이루어진 4-에지번호매김이 B_6에서 불가능함을 쉽게 알 수 있다.

본 논문에서는 그래프 임베딩 문제와 관련된 선형적 에지번호매김 방법, 변형된 에지번호매김 방법 그리고 혼합형 에지번호매김 방법들을 제안한다. 2절에서는 관련 연구로서 원형군 그래프에 대한 임베딩과 일반적인 에지번호매김 방법에 대해 논하고, 3절에서는 이항트리와 선형적 에지번호매김 방법, 변형된 에지번호매김 방법 그리고 혼합형 에지번호매김 방법들을 제안한다. 마지막 4절은 결론으로 구성된다.

2. 관련 연구

2.1 원형군 그래프에 대한 임베딩

원형군 그래프는 1962년 *Harray*가 최초로 제시한 것으로 알려졌다. 그는 당시 신뢰성이 높은 통신망을 설계하는 최적화 문제인 "n개의 노드와 e개의 에지를 가지면서 연결도가 최대인 그래프를 구성하라." 하는 문제를 원형군 그래프에 속하는 그래프를 제시함으로써 해결하였는데 그가 제시한 그래프를 *Harrary* 그래프라고 부른다. 원형군 그래프는 상당히 대칭적인 구조를 가지고 있어서 여러 분야에서 많이 응용되고 있다[12]. $c_{n(j_1,j_2,\ldots,j_k)}$로 표기하는 원형군 그래프는 N개의 노드 $\{0,1,\ldots,N-1\}$를 가지고 있으며, 임의의 두 노드 v, w에 대해서 $v+j_i=w\,(\mathrm{mod}N), 1\le i\le k$를 만족하는 j_i가 존재할 때 v, w를 잇는 에지가 있다. 이때 각각의 j_i를 점프라고 부른다. 원형군 그래프는 각 노드의 분지수가 같은 정규그래프이다. 이러한 예가 Fig. 1에 있다.

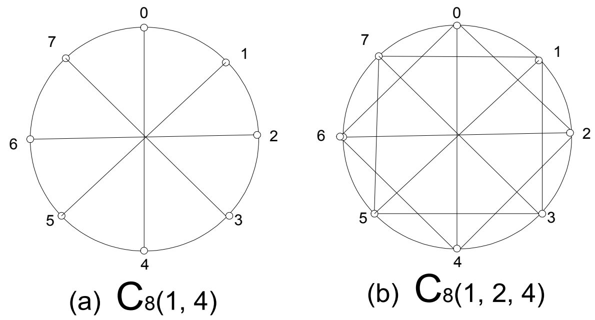

Fig. 1. The example of circulant graph

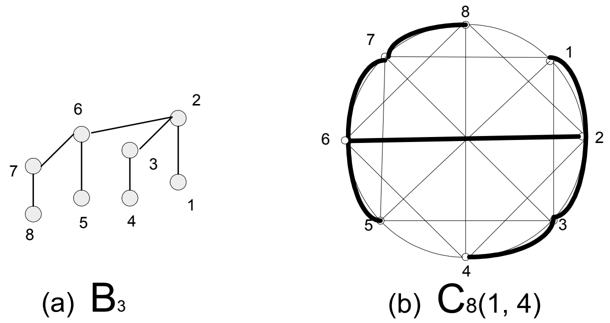

Fig. 2. The example of subgraph in circulant graph

2.2 에지번호매김

임베딩과 관련된 에지번호매김은 G의 정점에 1에서 정점의 개수까지 서로 다른 정수를 부여하는데, 에지번호가 모두 주어진 조건을 만족하는 번호매김이 가능하면 Fig. 2에서와 같이 그 그래프는 원형군 그래프의 부그래프임을 쉽게 알 수 있다. 그러나 일반적으로 그 역은 성립하지 않는다.

3. 에지번호매김 방법

3.1 이항트리

이항트리는 병렬망에서 메시지 방송과 병합우선순위 큐를 구현하는 데 중요한 역할을 한다. 이항트리는 다음과 같이 정의한다.

정의 1. 이항트리, B_n

1) 하나의 트리를 갖는 이항트리는 B_0이다.
2) 이항트리의 왼쪽 부그래프 T_l와 오른쪽 부그래프 T_r이 서로 분할된 $B_{n-1}, n\ge 1$이라고 하면 B_n는 T_l의 루트가 T_r의 루트의 좌측 자식이 되게 에지를 하나 추가함으로써 만들어진다.

Fig. 3에 이항트리의 예가 있다.

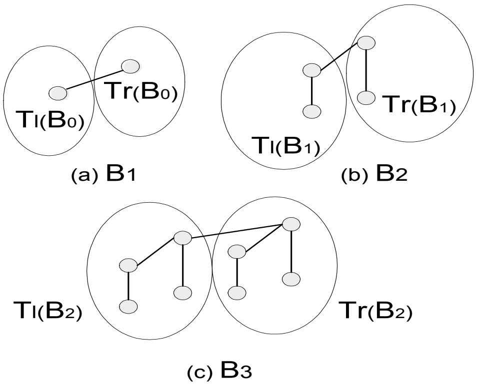

Fig. 3. The example of binomial trees

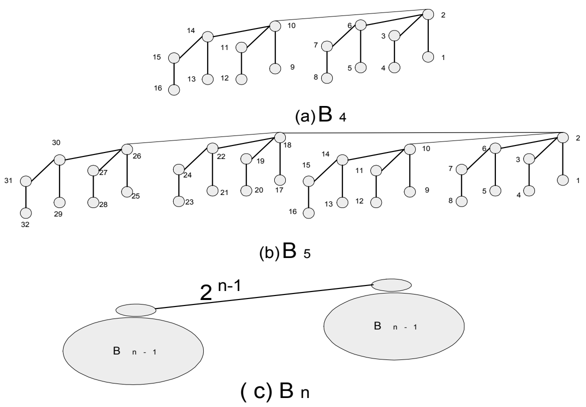

Fig. 4. The example of linear edge labeling

3.2 선형적 에지번호매김 방법

임의의 이항트리, $B_n, n \ge 0$에서 부분트리인 B_2 각각에 선형적으로 에지번호매김을 하면 추가적으로 $\{2^{n-1}, n \ge 3\}$의 에지번호를 얻을 수 있다.

정리 1. 임의의 이항트리는 선형적으로 에지번호매김을 하면 에지번호 $\{1, 2^{n-1}, n \ge 3\}$를 얻을 수 있다.

증명) 이항트리의 **정의 1.**에 의해서 임의의 이항트리 B_k에서 k=1, 2인 경우에는 쉽게 선형적으로 에지번호매김을 할 수 있다. 만약 k=n-1인 경우에 선형적으로 에지번호매김을 할 수 있다고 가정하면, k=n인 경우에는 이항트리의 왼쪽 서브트리와 오른쪽 서브트리는 서로 대칭인 B_{n-1}이므로 왼쪽 서브트리의 각 노드에 왼쪽 서브트리의 전체 노드 개수를 더하면 오른쪽 서브트리의 에지번호매김이 가능하고 이때 두 서브트리 사이에 추가되는 하나의 에지의 에지번호는 항상 2^{n-1}이므로 이 정리가 성립함을 Fig. 4에서와 같이 쉽게 알 수 있다.

3.3 변형된 에지번호매김 방법

임의의 이항트리 B_n의 왼쪽 서브트리 B_{n-1}에는 선형에지번호매김을 하고 오른쪽 서브트리에는 선형에지번호매김된 B_{n-1}의 오른쪽 서브트리 B_{n-2}와 왼쪽 서브트리 B_{n-2}를 서로 교환하면 항상 추가되는 에지번호는 $2^{n-2}, n \ge 4$이다.

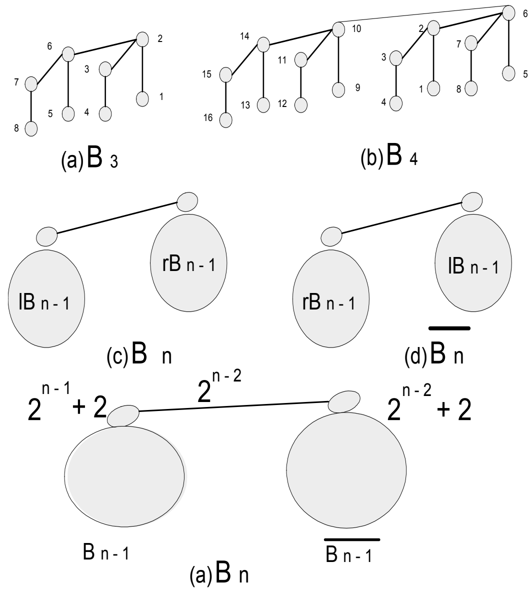

Fig. 5. The example of varied edge labeling

정리 2. 임의의 이항트리,$B_n, n \ge 4$는 왼쪽 서브트리 B_{n-1}에는 선형에지번호매김을 하고 오른쪽 서브트리에는 선형에지번호매김된 B_{n-1}의 오른쪽 서브트리 B_{n-2}와 왼쪽 서브트리 B_{n-2}를 서로 교환하면 에지번호는 항상 $\{1, 2^{n-2}, n \ge 4\}$이다.

증명) Fig. 5에서와 같이 이항트리의 **정의 1.**에 의해서 임의의 이항트리 B_n에서 k=3인 경우에는 쉽게 선형적으로 에지번호매김을 할 수 있다. 만약 k=n-1인 경우에 변형된 에지번호매김을 할 수 있다고 가정하면, k=n인 경우에는 이항트리의 왼쪽 서브트리 B_{n-1}은 선형적 에지번호매김이 가능함을 **정리 1.**을 통해 알 수 있고, 오른쪽 서브트리 B_{n-1}에서 자신의 오른쪽 서브트리 B_{n-2}와 왼쪽 서브트리 B_{n-2}를 서로 바꾸면 추가되는 에지의 에지번호는, 왼쪽 서브트리B_{n-1}은 **정리 1.**에서와 같이 선형적으로 에지번호매김되었으므로 항상 $2^{n-2}, n \ge 4$이다.

3.4 혼합형 에지번호매김 방법

임의의 이항트리,$B_n, n \ge 1$에서 $n = 1,2,3$인 경우에는 쉽게 선형적으로 에지번호매김을 할 수 있음을 보았다. 이제는 앞서 보았던 선형적 방법과 변형된 방법을 번갈아가면서 적용하면 항상 추가되는 에지번호가 $2^{2k}, 1 \le k \le \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$인 에지번호매김을 할 수 있다.

정리 3. 임의의 이항트리,$B_n, n \ge 4$는 n이 홀수인 경우에는 선형적 에지번호매김을 하고 n이 짝수인 경우에는 변형적 에지번호매김을 하면 에지번호는 $\left\{1, 2^{2k}, 1 \le k \le \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \right\}$이다.

증명) Fig. 6에서와 같이 임의의 이항트리,$B_n, n \ge 4$에서 n이 홀수인 경우에는 선형적 에지번호매김을 하면 **정리 1.**

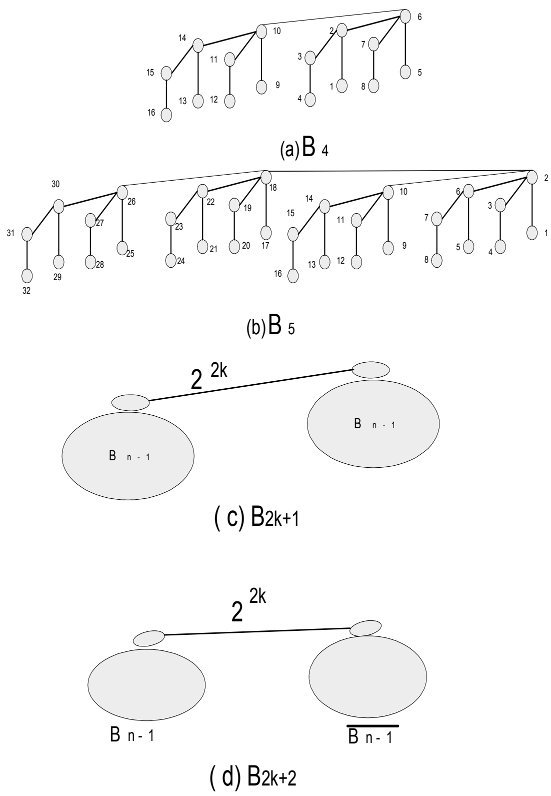

Fig. 6. The example of mixed edge labeling

Table 1. Edge label and number of root nodes on B_n

B_n	linear edge labeling	varied edge labeling	mixed edge labeling	
			odd n	even n
maximum edge number	2^{n-1}	2^{n-2}	2^{n-1}	2^{n-2}
the number of edges	2^n	2^n	2^n	2^n
the root node number of left subtree	$2^{n-1}+2$	$2^{n-1}+2$	$2^{n-1}+2$	$2^{n-1}+2$
the root node number of right subtree	2	$2^{n-2}+2$	2	$2^{n-2}+2$

에 의해서 추가되는 에지번호는 2^{n-1}이므로 $n=2k+1$이라고 하면 $n-1=(2k+1)-1=2k$가 되므로 항상 2^{2k}가 된다. 그리고 n이 짝수인 경우에는 변형된 에지번호매김을 하면 **정리 2.에** 의해서 추가되는 에지번호는 2^{n-2}이므로 $n=2k+2$라고 가정하면 $n-2=(2k+2)-2=2k$가 되므로 항상 2^{2k}가 된다. 그러므로 항상 추가되는 에지번호는 2^{2k}가 된다.

본 논문의 결과를 Table 1에 간략히 제시하였다.

4. 결 론

본 논문에서는 이항트리에 2-에지번호매김을 하여 선형적 에지번호매김 방법, 변형된 에지번호매김 방법 그리고 혼합형 에지번호매김 방법을 제안하였다. 이러한 에지번호들은 상호연결망의 일종인 원형군 그래프의 점프열로 사용하면 최적방송트리인 이항트리를 스패닝 트리로 갖는 새로운 상호연결망을 설계할 수 있고 이항트리를 기반으로 개발된 모든 알고리즘을 시뮬레이션할 수 있다. 향후 연구과제로는 서로 다른 점프열을 갖는 새로운 원형군 그래프의 설계와 여러 가지 망척도 면에서의 비교분석이 필요하다.

References

[1] D. A. Reed and H. A. Fujimoto, 'Multicomputer Networks: Massage-based Parallel Processing', MIT Press, 1987.

[2] F. T. Leighton, 'Introduction to parallel algorithms and architectures: arrays, trees, hypercubes', Morgan Kaufmann publishers, San Mateo, California, 1992.

[3] S. W. Golomb, 'How to number a graph', Graph Theory and Computing, Academic Press, New York (1972) pp.23-37.

[4] F. R. K. 'Some problems and a graph' Graph Theory and Computing, Academic Press, New York (1972) pp.23-37.

[5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty 'Graph theory with applications', North-Holland, New York, 1976.

[6] L. H. Harper, "Optimal numbering and isoperimetric problems on graph," J. Combinatorial Theory (1966) pp.385-393.

[7] J.-H. Park, K.-Y. Chwa, "Recursive circulants and their embeddings among hypercubes," Theorectical Computer Science, pp.35-62. 2000

[8] N. L. Prashanna, K. Sravanthi and N. Sudhakar, "Applications of Graph Labeling in Communication Netwoks," Oriental Journal of Computer Science & Technology Vol.7. pp.139-145 Apr., 2014.

[9] N. Lakshmi prasanna K. Sravanthi, Nagalla Sudhakar "Applications of Graph Labeling in Major Areas of Computer Science", IJRCCT Vol.3, pp.819-823, Aug., 2014.

[10] H. -S. Lim, J. -H. Park and K. -Y. Chwa, "Embedding Trees in Recursive Circulants," Discrete Applied Mathematics, Vol.4, No.10, pp.1105-1117, 1993.

[11] J. Choi, Optimal Broadcasting and Complete Ternary Tree Embedding based on Multinomal Trees in Recursive Circulants, Ph. D. Thesis, Dept. of Computer Science, CNU, Kwangju, Korea, 1999.

[12] F, Harray, "The maximum connectivity of a graph," Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. Vol.48, pp.1142-1146, 1962.

김 용 석

e-mail : yskimsky320@naver.com

1987년 전남대학교 계산통계학과(이학사)

1989년 전남대학교 전산통계학과(이학석사)

1997년 전남대학교 전산통계학과(이학박사)

1992년~현 재 서남대학교 컴퓨터정보학과 교수

관심분야 : 계산이론, 상호연결망, 알고리즘