韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2015.54.1.83
2015. 02. 제 54권, 제 1호, 83-98.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2015, Vol. 54, No. 1, 83-98.

중학교 기하 증명의 서술에서 나타나는 오류의 유형 분석

황재우(가오고등학교)
부덕훈(충남대학교)†

Ⅰ. 서론

2009 개정 수학과 교육과정에서는 수학 교육의 목적을 '수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰함으로써 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학 학습자로서 바람직한 인성과 태도를 기른다'고 제시하고 있다(교육과학기술부, 2011). 이러한 목표를 분석하면, 수학교육을 통해 이루고자 하는 것을 황혜정 외(2012)은 정신도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성으로 요약하고 있다. 그 중 정신 도야란, 수학은 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는 이른바 정신력을 도야시키는 소재가 된다는 것을 뜻한다.(황혜정 외, 2012) 이러한 요인으로는 엄밀성, 간결성, 논리성, 일반성을 들 수 있다.(강완 외, 1998)

NCTM(2000)에서도 수학과 교육과정에서 수학적 추론과 증명활동을 학교 수학의 중요한 목표로 삼고 있으며, 우리나라는 제7차 교육과정에서 문제해결력과 함께 수학적 힘의 신장을 중요시하고 있다. 수학 지식의 성장 근원은 수학적 사고 활동이라 할 수 있으며, 수학적 사고 활동의 핵심은 수학적 추론과 증명이라고 할 수 있다(이정자와 조정수, 2006). 수학에서 증명이란 참이라고 인정되고 있는 몇 개의 명제로부터 유효한 추론에 의해서 다른 명제가 참임을 나타내어 보이는 일을 말한다(이호철, 2007). 이 때 유효한 추론이란 전제가 참이면 결론도 참인 추론을 말한다(김양희, 2008).

* 접수일(2014년 11월 19일), 수정일(2015년 02월 11일), 게재확정일(2015년 02월 23일)
* ZDM분류 : G13
* MSC2000분류 : 97D70
* 주제어 : 기하 증명, 오류, 오류유형
* 이 논문은 충남대학교 학술연구비의 지원을 받았음
† 교신저자

증명 학습을 통하여 학생은 수학적, 논리적 사고력을 기를 수 있다. 주장은 항상 근거가 있어야 한다는 것을 이해하도록 하는 것이 중요하다(우정호, 2006; NCTM, 2000). 근거를 갖고 판단하도록 하는 습관을 가지면 문제 해결 활동을 할 때에도 성급한 판단으로 인한 오답을 줄일 수 있다. 또한 일상생활에 있어서도 논리적인 사고방식을 가질 수 있으며, 다른 이의 주장에 대해서도 그것이 충분히 타당한 근거를 가졌는지 판단할 수 있는 비판력 또한 기를 수 있다.

또한 어떠한 정리를 학습할 때에 그 증명을 함께 학습하면 그 정리가 나온 원리를 알고 있기 때문에 학생은 관계적 이해를 하게 된다(Skemp, 1987). 관계적 이해는 여러 아이디어를 핵심 아이디어로 연결 지어 기억할 양을 줄여 주므로 기억을 향상시키고, 이후 그 정리를 잊더라도 그 원리를 통해 정리를 재창조할 수 있게 해 준다. 또한 관계적 이해는 새로운 개념과 절차를 학습하는데 도움을 주며, 문제해결력을 향상시킨다. 나아가 관계적 이해는 정의적인 영역에도 영향을 미치는데, 수학을 똑똑한 사람들만이 즐기는 신비한 영역이 아니고 모든 사람들이 배우고 이해할 수 있다고 믿게 되어 수학에 대한 흥미와 자신감, 긍정적인 자아개념을 발달시킨다(김양희, 2007).

그러나 현재 교실에서의 많은 학생들은 단시간에 결과를 얻는 것에 익숙해져 있으며 그 중 일부는 학원 등 사교육을 통하여 이미 결과로서의 정리를 알고 있어 학교에서의 수학 학습에서도 증명 과정을 생략하고 결과만을 빨리 얻기를 원한다. 거기에 수업시간과 진도가 정해졌다는 점이 더해져, 실제 학교에서의 증명 지도는 교과서에 제시된 증명을 교사가 학생에게 전달하는 것으로 끝나는 경우도 많다.

하지만 완성된 증명을 학생에게 전달하고 이해시키는 것만으로는 증명의 지도가 이루어졌다고 보기 힘들다. 설사 학생이 어떤 명제의 증명을 완전히 기억하여 증명

을 처음부터 끝까지 완벽히 재생할 수 있다 하더라도 이를 두고 학생이 정리를 증명하는 능력을 갖추었다고 할 수는 없다. 증명 지도의 목표는, 학생이 추론 과정을 통해 직접 증명을 구상하고 증명 과정을 다른 사람이 알아볼 수 있게 정확한 표현으로 의사소통하고 자신의 증명 과정을 검토하는 등의 활동을 할 수 있도록 하는 능력을 갖추도록 하는 것이다. 물론 2009 개정 교육과정에서는 중학교에서 증명이라는 용어를 사용하지 않고 '이해하고 설명할 수 있다'와 같이 제시하고 있으나, '이해하고 설명'하는 것은 '증명'하는 것을 대체할 수 없으며, 교과서 또한 '…를 설명하라'는 문제에 대해 '증명'을 제시하고 있음을 확인할 수 있다(나귀수, 2014).

오류 및 오류 유형과 관련된 선행연구를 몇 가지 유형으로 분류해 보면, 첫째, 오류에 대한 이론적 분석 연구가 있다. 대표적으로 김부미(2004)는 수학적 오류를 인지심리학의 관점에서 탐색하고 있다. 둘째, 각 내용 영역별로 문제해결과정에서의 수학적 오류 유형을 탐구하는 연구가 있다. 대표적으로 김범석(2009)은 공간도형의 문제해결과정에 관심을 가졌고, 노영아와 안병곤(2007)은 초등학교 도형영역에 관심을 가졌으며, 한경민과 고상숙(2014)은 원의 방정식이라는 해석기하에 관심을 가졌다. 셋째, 오개념과 교사 사이의 관계에 대한 연구를 진행하였다. 대표적으로 이용하와 박지현(2011)은 오개념과 오류에 대한 수학 교사의 PCK에 대한 연구를 진행하였다.

지금까지의 연구를 통해 볼 때, 교사는 증명 활동을 하는 학생들이 어떠한 사고방식을 가지고 있는지 파악하고 그에 따른 처방을 내릴 수 있어야 한다. 이런 면에서 볼 때, 학생이 직접 사고과정을 거쳐 작성한 답안에서 오류를 분석하고 원인을 찾아보는 일이 반드시 필요하다. 이러한 연구의 필요성에 의해서 본 연구에서는 기하 증명의 서술과정에서 나타나는 오류 유형을 분석하고, 이를 통해 증명을 지도할 때에 교사가 고려해야 할 학생의 사고방식이 무엇인지, 학생들이 잘못 생각할 수 있는 부분이 무엇이며 이를 어떻게 고쳐줄 수 있는지에 대해 고찰하는 것을 연구의 목적으로 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

Becker(1982)는 아동들이 증명에서 주로 보이는 오류의 유형으로 다음 여덟 가지로 제시하고 있다(서동엽, 1999)

(1) 관련된 특별한 지식의 부족
(2) 시행착오 전략
(3) 한 가지 요소를 부적절하게 이해하는 오류
(4) 단위를 부적절하게 이해나는 오류
(5) 기호화・기호 해독을 할 때 생겨나는 오류
(6) 문장이나 도형의 일부분이나 요소의 특정한 형태가 고려됨으로써 생기는 오류
(7) 작용소를 부적절하게 적용하는 데서 오는 오류
(8) 작용소를 적용할 때 정보를 잃는 것

류성림과 정창현(1993)은 Becker의 오류유형 분류를 수정하여 학생의 기하증명에 있어서의 오류를 9가지로 분류하였다. 그 유형은 아래와 같다.

A. 가정을 잘 이용하지 못하는 오류
B. 도형에 집착하여 생기는 오류
C. 연산자의 잘못된 적용
D. 연산자의 잘못된 실행
E. 증명 과정의 일부 생략
F. 결론을 바르게 내리지 못함.
G. 기술적인 오류
H. 논리적 추론의 결여
I. 오류의 애매모호함

류성림은 학생의 증명 과정에서의 오류를 9가지로 분류하되, 답안의 전체적인 구조에 따라 각 문제별로 한 가지의 오류로만 분류하였다. 옳은 답을 제시하거나 전혀 응답하지 않은 경우는 분석에서 제외시켰으며, 같은 문제를 증명하는 과정에서 연속해서 오류가 발생하는 경우에는 제일 먼저 발생한 오류만을 분석하고, 선행 오류에 기인하는 다음 단계의 오류는 고려하지 않았다. 그러나 오류가 발생하는 근본 원인은 증명 과정에서의 학생의 사고방식이므로, 한 문제 내에서 여러 가지 오류가 발생하는 경우 뒤에 나타난 오류가 반드시 선행 오류에 기인한다고 보기 어렵다. 따라서 각각의 오류에 대하여 그 원인이 된 사고방식이 무엇이었는지 개별 분석하는 일이 중요하다.

또한 학생의 오류를 9가지로 분류한 것은 그 항목의 수가 많아 실제 수업에 적용하기에 다소 무리가 있어 보

이므로, 공통적인 요소를 찾아 같은 유형으로 분류해 볼 필요가 있다. 구체적으로 살펴보면, A의 경우, 가정과 관련이 있다는 것은 표면적인 공통점이며, 가정하지 않은 것을 가정으로 이용한 경우는 논리적 구조화, 가정 이상은 생각하지 못하는 경우는 추론 능력과 관련된 오류라고 볼 수 있다. 또한 B도 근본적으로는 추론 능력이 부족하여 생긴 오류이다. C의 세부 분류 중 증명할 필요가 없는 곳인 가정이나 도형의 일부분 등을 다시 증명하기 위해 정리 또는 정의를 적용하는 경우는 증명이 필요한 부분과 그렇지 않은 부분을 구별하지 못한 것으로서, 정리나 정의를 잘못 적용한 나머지 세 가지 경우와 같은 분류로 보기 힘들다. 또한, 필요한 정리나 정의를 잘못 선택하는 경우와 D, E, H는 모두 논리적 구조화에 익숙하지 않아서 생기는 오류라는 점에서 근본 원인이 같다고 볼 수 있다. F 중 결론을 진술하지 않은 경우는 의사소통에 관한 이해가 부족해서 생기는 오류이고, 문제가 요구한 결론이 아닌 것을 기술한 경우는 문제 파악에 실패한 것이므로 그 원인이 다르다고 보아야 한다.

이와 같이 답안의 표면적인 특성 대신 학생의 사고방식을 기준으로 오류유형을 분류하여 학교 수업에서의 기하증명 지도에 실질적인 도움을 줄 수 있는 연구가 필요하다.

전현미는 여자중학교 2학년 학생 209명을 대상으로 상·중·하 집단으로 나누어 각 수준별로 기하 증명 과정에서 발생하는 학생들의 오류를 분석하여 다음과 같은 결론을 내렸다(이춘분, 2007). 첫째, 증명의 의미를 제대로 이해하지 못하며, 논리적 추론이 결여된 직관적인 사고의 결과를 이용하려는 경향이 있다. 둘째, 배운 정리나 정의를 확실히 이해하지 못하는 경우가 많았고, 비록 이해를 했다 하더라도 그 정리나 정의를 증명 과정에 활용하는데 어려움을 많이 겪고 있다. 셋째, 언어로 표현된 문장을 수식으로 기호화 하는 능력이 부족하고, 용어나 기호의 잘못된 사용에 의한 오류가 많다. 넷째, 증명하는 방법이 미숙하여 증명의 주요한 과정이 일부 생략되는 오류도 나타난다. 다섯째, 상위 집단의 학생들에게서 가장 많이 발생한 오류는 실수 또는 부주의에 의한 것으로 여겨지는 기호·용어 등의 잘못된 표기에 의한 오류가 있다. 여섯째, 중위 집단의 학생들에게서는 논리적 타당성이 결여된 주장이나 정의나 정리의 이해 부족, 활용 능력 부족에서 비롯된 오류가 많다. 일곱째, 하위 집단 학생들의 오류 유형은 중위 집단 학생들과 비슷한 경향을 보이고 있으나, 대부분 증명 능력이 전혀 없어 주로 시행착오에 의한 응답이 많아 증명 과정의 오류분석의 의미가 크지 않은 것으로 여겨진다.

그런데, 전현미(1996)의 연구는 수준별로 많이 나타나는 오류의 경향성을 파악하고 있으나, 오류유형 분류의 새로운 기준을 제시하고 있지는 않다.

또한, 서동엽(1999)은 증명의 구성 요소를 추론의 구성과 관련된 요소, 증명의 의미와 관련된 요소로 나누어 다음 세부요소로 분석하였다. 첫째, 추론의 구성과 관련된 요소이다. 추론규칙(분리논법, 연결논법, 긍정논법, 조건삼단논법), 기호화, 정의와 성질의 구분, 적절한 그림의 이용, 기본적인 원리의 이용, 검토의 다양성 및 완전성, 도형의 해석 및 증명에의 이용, 문장화, 반례를 이용한 반증의 방법, 등식의 증명을 제시하였다. 둘째, 증명의 의미와 관련된 요소이다. 추론의 연결 관계, 함의, 가정과 결론의 분리, 함의와 동치의 구분, 정리는 예외가 없다. 명백한 명제에 대한 증명의 필요성, 증명의 일반성을 제시하였다.

이에 따라 추지영(2009)은 중학교 2학년, 3학년 학생들이 보이는 오류유형을 다음의 6가지로 정리하였다. 첫째, 문장과 기호의 측면에서 나타나는 오류, 둘째, 정의와 성질의 측면에서 나타나는 오류, 셋째, 그림을 이용할 때 나타나는 오류, 넷째, 검토의 다양성 및 완전성의 부족에서 나타나는 오류, 다섯째, 반례를 이용한 반증에 대한 이해의 부족, 여섯째, 가정의 기능 측면에서 나타나는 오류가 그것이다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 절차

1) 연구 대상

본 연구에서는 대전 소재의 M 중학교 3학년 중 남학생 1개 반(36명), 여학생 2개 반(76명) 학생들을 대상으로 하였다.

2) 검사지 개발 및 평가 방법

정규고사와는 별도로, 도형의 성질을 증명하는 서술형

문항 5개로 구성된 검사지를 통해 2회의 평가를 실시하고 이를 분석하였다. 학교 진도에 따라 1차 평가(문항1-1~문항1-5)는 삼각형의 합동과 닮음에 관한 성질에 관한 문항, 2차 평가(문항2-1~문항2-5)는 원의 성질에 관한 문항으로 구성되었으며, 문항은 학생이 기존에 학습한 교과서에서 출제하였다.

[표 1] 평가문항 구성
[Table 1] structure of assessment problems

문항번호		주요 평가 요소
1차	1	정삼각형, 삼각형의 합동
	2	수직이등분선, 직각삼각형의 합동
	3	이등변삼각형, 삼각형의 합동
	4	직각삼각형, 삼각형의 닮음
	5	평행사변형, 삼각형의 닮음
2차	1	원의 현, 삼각형의 합동
	2	원의 외접사각형
	3	원의 원주각
	4	두 원의 공통현, 평행선
	5	원의 두현, 삼각형의 닮음

평가 당시, 결과는 성적에 반영하지 않으며, 주어진 그림에 표시한 것은 답안으로 인정하지 않고 답란에 올바르게 작성한 것만 채점함을 사전에 공지하였다.

2. 오류유형 분석의 원칙

본 연구에서는 선행연구에서의 오류유형 분류와 달리 답안 전체의 표면적인 특성보다는 학생의 사고 과정에 주목하였다. 즉, 학생이 증명을 수행하고 이를 답안으로 작성하는 데까지는 일련의 사고 과정을 거치는데, 각각의 오류가 이 중 어느 단계에서 발생한 것인지 파악하는데 중점을 두어, 오류가 발생한 원인에 따라 오류유형을 분류하고자 하였다. 학생은 주어진 명제에서 가정과 결론을 파악하고, 추론을 통해 증명을 구상하고 계획을 실행하는 단계를 거친 후에도, 이를 기호와 글로 표현하는 '의사소통'이라는 어려운 단계를 거쳐야만 한다.

김창일(2004)의 연구에 따르면, 중학교 2학년의 도형 단원의 학습을 끝마친 학생들이 정의와 성질을 구분하는 데 큰 어려움을 갖고 있으며, 학생들은 증명과정에서 사용되는 수학적 기호들을 완전히 이해하지 못하여 말로는 증명을 설명할 수 있지만 글로 쓰지 못하는 경우가 있다(한혜숙과 문수진, 2009). 대개의 학생은 어떤 양식에 맞추어 증명을 구성해야 할지 모르며, 증명을 하여 그것을 서술한 경우에도 그 증명 구성이 옳게 된 것인지 잘못된 것인지를 알지 못하는 경우가 많다(김홍기, 1998).

또한 한 문항의 답안에서 여러 번의 오류가 드러날 경우, 모든 오류가 같은 원인으로 발생하거나 후행오류가 선행오류에 기인하는 것은 아니므로, 문제별로 한 가지의 오류만으로 구분하지 않고 증명의 각 단계별로 오류를 찾아, 같은 문제에서 여러 가지 오류가 발생한 경우 각각의 오류를 개별적으로 모두 분석하였다. 같은 이유로, 전혀 작성되지 않은 답안은 분석에서 제외하였으나 미완성 답안의 경우 작성된 부분에 대해서 증명 미완성 이외의 오류도 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 분석을 위한 기준 설정

본 연구에서는 학생들의 답안에서 드러난 오류의 분류하기 위해서 문헌분석을 기초로 하여 오류 유형을 5가지로 상세하였고, 각각의 유형에 속하는 세부오류를 정리하면 아래와 같이 16항목으로 상세화할 수 있다.

오류유형 A : 논리적 타당성 결여

수학 정리의 증명에 있어 가장 중요한 요소인 논리적 타당성에 문제가 있는 경우로, 증명의 본질적인 면에 대한 문제이다. 이에 해당하는 경우로는 논리적 비약, 요소의 타당성 미확보, 비논리적 전개의 3가지가 있다.

(A1) 논리적 비약: 증명이 논리적으로 성립하기 위해서 반드시 언급되어 있어야 할 중요한 사항이 빠져있는 경우이다. 가령 SAS 합동을 이용하면서 두 쌍이 아니라 한 쌍의 대응변의 길이가 같음을 증명하는 것에 그친 경우 등이 이에 속한다. 이는 전체적으로 증명이 어떻게 완성될 수 있을지 어느 정도 파악을 했으나 중간 과정을 완성하지 못한 경우이다. 또한, 학생이 실제로는 필요한 요소를 찾아내었으나, 그것이 논리적으로 꼭 필요한 요소임을 알지 못하여 쓰지 않은 경우도 이에 포함된다. 예를 들면 $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{BC}=\overline{B'C'}$, $\angle B=\angle B'$ 다음 삼각형의 합동을 언급하지 않고 $\overline{AC}=\overline{A'C'}$를 곧바로 결론지은 경우 등이 이에 속한다.

(A2) 요소의 타당성 미확보: 참이고 필요한 요소를

성공적으로 진술해 냈지만, 그것이 왜 참인지에 대한 이유를 설명할 필요가 있을 때 설명하지 않은 경우를 말한다. 예를 들어, 원 O 위의 두 점 A, B가 있을 때 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 임을 말하면서 반지름에 대한 언급이 없는 경우가 이 항목에 속한다. 또한, 이어지는 진술을 위해서 어떤 보조정리를 기술해 줄 필요가 있을 때 이를 기술하지 않은 경우도 이에 포함된다.

(A3) 비논리적 전개: 증명의 전개 방식이 논리적이지 못한 모든 경우를 포함한다. 연역적 증명에 있어서는 이유를 결과보다 먼저 기술하여야 하는데, 괄호나 '왜냐 하면' 등의 말을 쓰지 않은 채 결과를 이유 앞에 쓴 경우도 이에 포함된다.

오류유형 B : 추론능력 또는 지식의 부족

논리적 타당성 결여(오류유형 A)와 함께 증명에서의 본질적인 오류에 해당하는 것으로써, 학생이 명제를 증명하기까지의 추론 과정을 성공적으로 수행하지 못하였거나, 나름대로의 추론을 실행하였으나 그것이 잘못된 경우이다. 이에 해당하는 경우로는 증명 미완성, 불필요한 요소, 잘못된 요소 이용, 지식 부족, 근거 없는 진술의 5가지를 들 수 있다.

(B1) 증명 미완성: 증명의 일부분을 작성하였으나 일정 단계 이후의 추론에 실패하여 결론에 도달하지 못한 경우이다.

(B2) 불필요한 요소: 위에서 언급한 논리적 비약과는 반대로 필요치 않은 요소가 진술되어 있는 경우이다. 가정이나, 그로부터 얻을 수 있는 성질을 여러 가지 찾아내는 데 성공했지만, 그 중에서 실제로 결론을 얻어내는데 필요한 것이 무엇인지 찾아내지 못하여 발생한 오류이다. 실제로 이 오류가 발생한 답안의 대부분은 증명이 미완성이거나 그 구성에 있어서 문제가 발생하였다.

(B3) 잘못된 요소 이용: 실제 증명에 필요한 요소는 드러나지 않고, 대신 관계없는 요소가 드러나 있는 경우로, '논리적 비약'과 '불필요한 요소'가 동시에 나타나는 경우라고도 말할 수 있다. 이는 결론을 얻어내는데 필요한 성질이 무엇인지 골라내지 못하였다는 점에서 '논리적 비약'보다는 '불필요한 요소'와 유사하므로 추론능력 또는 지식의 부족에 포함시켰다.

(B4) 지식 부족: 학생이 이전에 도형 단원을 학습할 때에 내용요소의 학습이 부족했거나 혹은 그 학습한 내용을 망각한 데서 기인하는 오류이다. 일부 요소에서는 약간의 엄밀성이 결여된 모습으로 나타나기도 한다. 닮음을 증명할 때, AA만으로 충분히 닮음이 증명됨에도 불구하고 ASA라는 실제로 존재하지 않는 닮음조건을 이용한 경우가 이에 속한다. 또한, '동위각'이나 '엇각'이라는 용어는 두 직선과 교차하는 한 직선이 있을 때 두 직선의 평행 여부와 관계없이 쓸 수 있는 용어임을 알지 못하고 평행이나 평행선에 대한 언급 없이 단지 엇각이기 때문에 크기가 같다고 한 경우도 이에 속한다. 또한 내대각이라는 용어는 사각형의 한 외각에 대하여 쓰는 용어임을 분명히 알지 못한 경우도 이에 속한다. 이는 내용 요소의 학습과 증명의 학습이 따로 분리되어 이루어질 수 없다는 주장의 직접적인 증거가 되는 오류이다. 따라서 교사는 수업을 할 때에 학생이 간과할 수 있는 중요한 요소를 반드시 짚어 주어 앞으로 학생이 증명활동을 할 때에 엄밀성을 지킬 수 있도록 지도하여야 한다.

(B5) 근거 없는 진술: 거짓인 명제 혹은 주어진 조건으로부터 알아낼 수 없는 사실을 이용한 경우로서, 요소는 참이나 그 이유가 타당하게 설명되지 않은 경우인 '요소의 타당성 미확보'와는 구별된다. 평행하지 않은 두 직선을 평행하다고 한 경우나 길이가 같지 않은 두 선분의 길이가 같다고 한 경우가 이에 속한다. 이는 학생이 결론을 보고 그에 도달하기 위한 성질과 그 이유를 찾을 때 논리적인 추론과정보다는 직관적인 요소에 의존하기 때문에 발생하는 것으로 여겨진다. 결론을 가정으로 이용한 '순환논증'이나, 일면 논리적인 증명을 시도한 것으로 보이지만 실제로 내용을 살펴보면 필요한 인과관계가 성립하지 않는 경우 등도 실제로는 추론에 실패한 것으로서 이 분류에 포함된다. 가령, '원의 중심에서 한 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.'라는 명제를 증명할 때, 원의 중심에서 현에 내린 수선이 그저 '수선'이라고만 가정했음에도 불구하고 이를 '수직이등분선'이라는 결론을 언급하고 이를 이용하여 증명을 해나간 경우 등이 이에 포함된다.

오류유형 C : 의사소통 불명확

학생이 머릿속으로는 증명 과정을 어느 정도 만들어

내는데 성공한 것으로 보이지만, 이를 답안으로 구성하거나 표현하는 데 있어서 다소 문제가 있는 경우이다. 이는 증명의 본질이 아님에도 불구하고, 어린 학생에게 있어서는 증명을 어렵게 만드는 심각한 요인이며, 실제로도 이 유형의 오류가 대단히 많이 발견된다.

이에 해당하는 경우로는 결론 미진술, 문자의 의미 불명, 불필요한 기술(記述), 표현의 부정확의 4가지를 들 수 있다.

(C1) 결론 미진술: 결론 이전의 모든 증명 과정을 마쳤으나 결론의 진술 없이 증명을 끝마친 경우이다.

(C2) 문자의 의미 불명: 새로운 문자를 도입할 때 그 의미를 명시하지 않고 쓰는 경우이다. 특히 현의 중점을 나타내는 문자로 M, N을 사용하면서 이를 그림에만 표시하거나 아예 언급하지 않은 경우가 이에 속한다. 또한 선분의 길이를 a, b 등의 문자로 간단히 표현하면서 '$\overline{\mathrm{AP}}=a$, $\overline{\mathrm{BP}}=b$라 놓자' 등의 언급이 전혀 없거나 그림에만 표시된 채 쓰는 경우가 발견되었다.

(C3) 불필요한 기술(記述): 증명의 창안 과정에서는 필요하지만 증명을 기록할 때는 굳이 기술할 필요가 없는 내용을 답안에 적은 경우이다. 증명이 필요 이상으로 길어진다는 사소한 문제 외에, 연역적 증명을 기술하는 방법을 모르고 있다는 점에서 상위 그룹 학생들에 한하여 약간의 교정이 가해질 수 있는 부분이다.

예를 들어, 두 점 A와 O가 주어지면 선분 AO는 그와 동시에 별다른 언급 없이 주어지는 것임에도 굳이 '선분 AO를 긋자'라고 적어낸 경우가 이에 속한다. 이는 위의 '문자의 의미 불명'과 반대의 형태로 드러난 오류이지만, 써야 할 것과 쓰지 않아도 될 것을 구분하지 못한다는 점에서 오히려 비슷하다고 볼 수 있다.

(C4) 표현의 부정확: 표현이 정확하지 못하여 학생이 말하고자 하는 바 혹은 가리키는 대상이 수학적으로 명확하게 드러나지 않는 경우를 말한다. 위에 나온 3가지 외에 의사소통 면에서 생기는 문제들을 모두 포함한다.

오류유형 D : 기술상의 오류

증명을 기술함에 있어 단어 혹은 기호를 잘못 선택하는 오류로서, [오류유형 C]에 비해 덜 심각한 것으로 여길 수도 있지만 무시할 수 없는 결함으로 보이는 오류이다. 이에 해당하는 경우로는 기호 또는 용어의 혼동, 잘못된 단어 사용의 2가지를 들 수 있다.

(D1) 기호 또는 용어의 혼동: 수학 기호나 용어 또는 논리 기호 등의 사용에 있어서 잘못이 보이되, 해당 답안의 전후관계를 볼 때 부주의로 인한 실수일 것으로 여겨지는 경우이다. 구체적으로 드러난 예로는 합동 기호($\equiv$)를 써야 할 자리에 등호($=$)나 닮음 기호($\backsim$)를 쓴 경우 등이 있다. 혹은 두 삼각형에서 두 쌍의 대응각의 크기가 같음을 보인 후, 두 삼각형이 닮음이라고 해야 할 것을 합동이라고 한 경우도 발견되었다.

(D2) 잘못된 단어 사용: 수학 용어나 기호 이외에 증명에 쓰이는 표현을 사용함에 있어서 보이는 부정확성이다. 말의 뜻을 정확히 알지 못하고 쓴 경우, 혹은 잘못된 것은 아니지만 다소 애매모호한 용어를 사용한 경우 등이 있다. 예를 들어, 두 삼각형이 '합동'이라고 해야 할 것을 두 삼각형이 '같다'라고 한 경우, 혹은 '임의'라는 단어의 뜻을 알지 못하여 임의가 아닌 특정한 선분을 '임의의 선분'이라고 지칭한 경우 등이 있다.

오류유형 E : 문제 파악 실패

문제 자체를 파악하지 못하여 증명의 전체 혹은 일부에 결함이 나타난 경우이다. 이에 해당하는 경우로는 가정 이해 부족, 유사 문제로 오인의 두 가지를 들 수 있다.

(E1) 가정 이해 부족: 문제에 이미 가정으로 주어진 내용을 다시 증명하려 한 경우가 있다. 이 중에는 비논리적인 진술이 있는 경우도 있다. 예를 들어, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형 ABC가 주어졌을 때, 증명의 시작부분에 '$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.' 또는 역으로 '삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이다.' 라고 진술한 경우 등이 있다.

(E2) 유사 문제로 오인: 위에 나열한 오류와 전혀 다른 형태의 오류로 나타난 답안 중에서, 학생이 이전에 학습한 자료의 전부 또는 일부와 동일하게 표현된 것이 있다면 이는 위에서 말한 것과 다른 원인에 의한 것으로 보아야 하므로, 이를 특별히 마지막 분류인 '유사 문제로 오인'으로 구분하였다. 이 오류의 경우에는 실제로 수업을 한 교사를 비롯하여 학생의 학습에 대한 정보를 가진 교사만이 그 구체적인 원인을 파악할 수 있다. 이는 학생이 증명 전체를 단순히 암기한 결과로 생각할 수 있다. 이 때 학생이 떠올린 문제와 실제로 출제된 문제 사

이에 약간의 차이가 있었다면 그 잘못된 공부 방식이 오류로 드러나게 된다. 본 연구에서는 이에 해당하는 경우로 크게 두 가지 유형을 찾아볼 수 있었다.

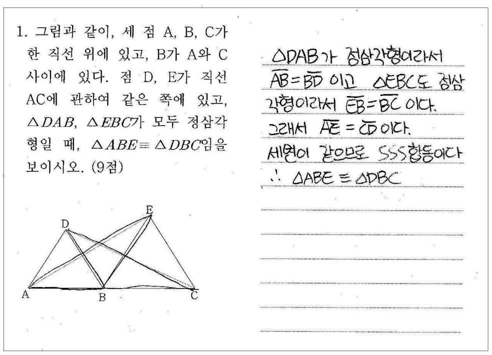
첫째로, 문제에서 제외시킨 경우까지 아울러 증명한 경우가 발견되었다. 구체적으로 말하면, 교과서와 달리 $\angle APD$와 $\angle CPB$가 '공통'이 되는 경우만 문제로 출제되었음에도 굳이 '맞꼭지각 또는 공통'이라고 교과서의 표현을 그대로 쓴 경우가 많이 있었다.

둘째로, 가정과 결론이 뒤바뀐 경우, 즉 제시된 명제의 역을 증명한 경우가 발견되었다.

2. 학생의 답안에 따른 오류유형의 실제와 그에 따른 원인 분석 및 지도 방안

여기에서는 실제로 학생이 작성한 증명문제의 답안을 분석하여 그 답안에서 나타난 오류를 위에서 제시한 5가지의 오류유형, 16가지의 세부유형을 기준으로 분석하고 그 오류의 원인을 분석하며 그에 따른 지도 방안을 구체적으로 제시하고자 한다.

1) 문항 1-1에 대한 분석



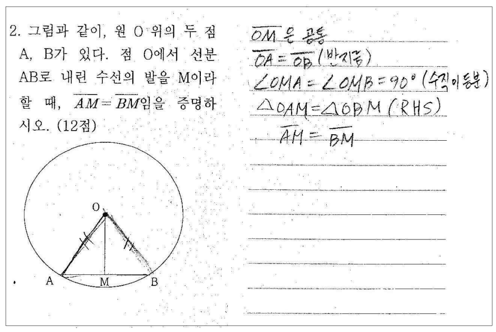
[그림 1] 문항1-1 유형
[Fig. 1] Types of Problem1-1

문항분석) 문항1-1 유형에서 $\triangle ABE \equiv \triangle DBC$임을 보이기 위해 필요한 3가지 요소 중 $\overline{AB} = \overline{BD}$, $\overline{EB} = \overline{BC}$를 찾아내었으나, 한 요소가 부족하여 $\overline{AE} = \overline{CD}$라는 요소를 채워 넣었다. 하지만 이는 주어진 조건으로부터 직접적으로 얻을 수 없는 요소이다. 따라서 이는 근거 없는 진술(B5)에 해당한다.

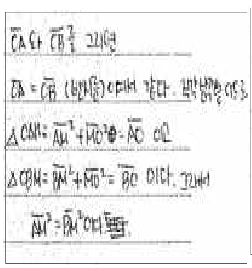
지도방안) 문항1-1 유형에 대한 오류 분석 결과 근거 없는 진술에 해당한다. 정삼각형의 성질을 이용하여 두 변의 길이가 같음을 알아냈지만 SSS 합동을 되도록 결론을 내리는 과정에서 발생한 오류이다. SS조건이 얻어지면 SSS합동 SAS 합동 등 가능한 방법들을 모두 논리적으로 생각해 보도록 지도할 필요가 있다.

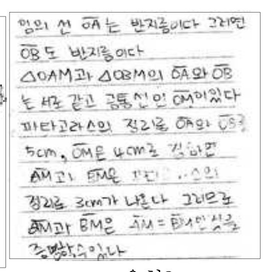
2) 문항 1-2에 대한 분석

문항분석) 문항1-2 유형1을 보면, 첫째, $\angle OMA = \angle OMB = 90°$인 이유를 말할 때 '수직이등분'이라고 했는데, 무엇이 무엇을 수직 이등분하는지 명시하지 않았다는 점은 표현의 부정확(C4)에 해당한다. 둘째, 그보다 심각한 오류는, 문제에는 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$만 제시되었으며 $\overline{OM}$이 $\overline{AB}$를 이등분한다는 것은 결론이라는 점이다. 학생도 이를 파악하였음에도 불구하고 결론을 이유로 이용하였는데, 이는 근거 없는 진술(B5)에 해당한다. 셋째, 삼각형의 합동을 등호(=)로 표현하였다. 이는 기호 및 용어의 혼동(D1)에 해당한다.



유형 1





유형2 유형3

[그림 2] 문항1-2 유형
[Fig. 1] Types of Problem 1-2

문항1-2 유형2에서는 첫째, 결론 미진술(C1)이 발견된다. 둘째, '$\overline{OM}$와 $\overline{ON}$을 그리면'이라고 답안에 쓴 것은 불필요한 기술(C3)이다.

문항1-3 유형3에서는 첫째, 첫 문장에서 잘못된 단어 사용(D2)이 두 번 발견된다. 특정한 선분인 $\overline{OA}$를 '임의선'이라고 한 것은 '임의'라는 말을 학생이 제대로 알지 못하고 사용한 것으로 보인다. '그리고'를 써야 할 자리에 '그러면'이라는 단어를 사용하였다. 둘째, 피타고라스의 정리를 이용하면서 $\angle OMA$와 $\angle OMB$가 직각임을 언급한 내용이 그림에만 표시되어 있고, 답안에는 명확히 제시되지 않았다. 이는 요소의 타당성 미확보(A2)에 해당한다. 마지막으로 비논리적 전개(A3)가 발견된다. 일반적으로 이용되는 RHS 합동조건을 이용하는 대신, 피타고라스의 정리를 이용하여 $\overline{AB}=\overline{BM}$임을 증명하는 창의성은 인정되지만, 이를 논리적으로 올바르게 표현하는 방법을 고안하지 못하였다.

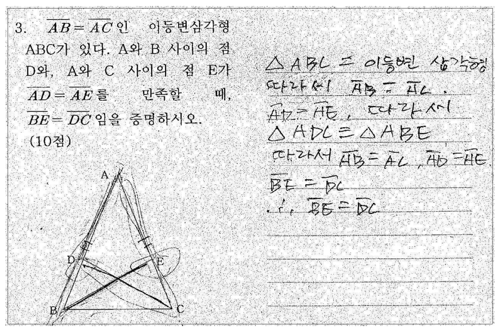
지도방안) 문항1-2 유형1의 경우, 이등분이라는 말을 삭제하면 논리적으로 증명이 성립하는데, 증명 과정에 비해 결론이 직관적으로 쉽게 눈에 띄기 때문에 이런 실수를 많이 하기 쉽다. 알고 있는 사실 중에서 이미 증명된 사실이면서 지금 필요한 사실만을 추려 내어야 한다는 점을 학생에게 알려 주어야 한다. 학생들은 등호를 '~는' 혹은 '같다'라는 말로 기억하고 쓰는 경향이 있다. 따라서 교사는 학생이 한국어의 조사 '~은', '~는'을 비롯하여 등호를 쓸 수 없는 곳에 등호를 함부로 쓰지 않도록 지도해야 한다. 특히 삼각형의 합동, 닮음, 넓이가 같다의 셋을 구분하여 써야 함을 주지시켜야 한다.

문항1-2 유형2에서 결론 미진술 문제를 해결하기 위해서는 증명에서는 결론까지 답안을 작성해야 함을 수업시간을 통해 지도하여야 한다. 또한 수학에서 말하는 선분이나 직선은 눈에 보이는 굵기를 가진 것이 아니므로, 두 점이 주어지면 선분은 이미 정의됨을 학생에게 설명해 줄 수 필요가 있다.

문항1-2 유형3에서 D2 오류를 해결하기 위해 교사는 '그리고', '그러면' 등 논리와 관련된 단어를 잘 파악하여 사용하도록 지도하여야 한다. A2 오류를 해결을 위해서 답안을 분석해 보면, 학생이 '직각삼각형' 조건이 필요하다는 것을 인지하고는 있으나 그것을 당연히 주어진 것으로 생각했다고 볼 수 있다. 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라고 한다고 문제에 주어져 있으나, 이로부터 $\angle OMA$와 $\angle OMB$가 직각임을 언급하는 것과 언급하지 않는 것은 논리 구조상 약간의 차이가 있다. 교사는 학생에게 이 차이를 이해시켜야 한다. 마지막으로 A3 오류와 관련하여 볼 때, 변의 길이가 5cm, 4cm인 경우를 예로 들어 설명하는 것에서 그쳐 증명의 일반성을 확보하지 못하였으므로 일반성을 확보할 수 있는 지도가 요구된다.

3) 문항 1-3에 대한 분석

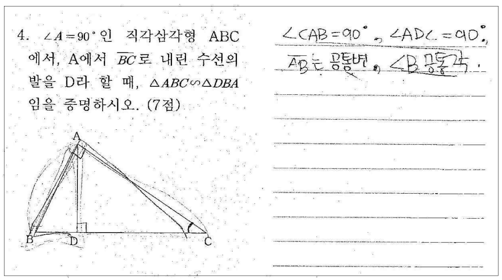
문항분석) 문항1-3 유형에서는 첫째, '$\triangle ABC=$이등변삼각형'이라는 표현은 잘못된 것으로 기호 또는 용어의 혼동(D1)에 해당한다. 둘째, 가장 큰 문제는 가정 이해 부족(E1)이 발견된다는 점이다. $\triangle ABC$가 이등변삼각형이라고 해서 $\overline{AB}=\overline{AC}$가 성립하는 것도 아닐뿐더러, 가정인 $\overline{AB}=\overline{AC}$를 다른 조건을 이유로 들어 설명하였다.



[그림 3] 문항1-3 유형
[Fig. 3] Types of Problem1-3

지도방안) 문항1-3 유형의 경우, 이러한 오류를 예방하기 위하여 교사는 증명 지도 시 문장에서 사용하는 조사 '는'과 등호 '='를 혼동하여 사용하지 않도록 지도해야 한다. 또한, 삼각형의 증명을 언급한 이후에, 필요한 결론은 $\overline{BE}=\overline{DC}$ 뿐인데 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{AE}=\overline{AD}$가 다시 언급되어 있어 문제에 제시되어 있던 가정에 대한 이해를 명확하게 하는 지도가 필요하다.

4) 문항 1-4에 대한 분석

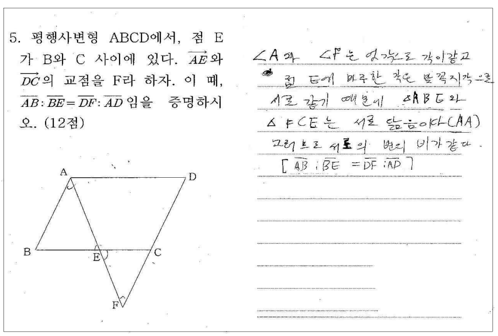


[그림 4] 문항1-4 유형
[Fig. 4] Types of Problem1-4

문항분석) 문항1-4 유형에서는 증명을 완성하지 못하였으며, 실제로 성립하지 않는 ASA라는 닮음조건을 이용하고 있어 증명 미완성(B1), 불필요한 요소(B2), 지식 부족(B4)이 동시에 나타난다.

지도방안) 문항1-4 유형의 경우, 삼각형의 닮음을 증명하는 문제인 것에서 착안하여 공통변과 공통각을 찾아본 것은 올바른 방향이었으나, 알아낸 사실들을 조합하여 삼각형의 닮음을 결론으로 이끌어내는 데는 성공하지 못하였고, 필요치 않은 요소인 공통변까지 서술하였다. 근본적인 원인은 삼각형의 닮음조건을 제대로 알지 못한 것이다. 따라서 수업시간에 합동조건과 닮음조건이 왜 그렇게 되는지 생각해 보게 하고 이해시켜야 한다.

5) 문항 1-5에 대한 분석

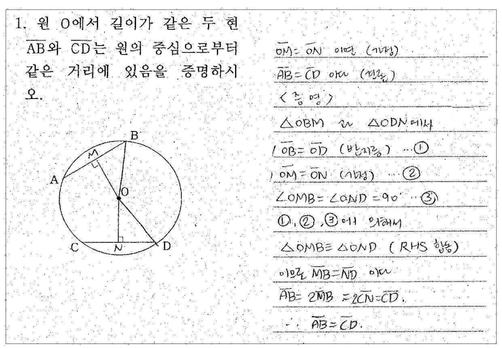


[그림 5] 문항1-5 유형
[Fig. 5] Types of Problem1-5

문항분석) 문항1-5 유형에서는 추론능력 또는 지식의 부족(유형 B)과 의사소통 불명확(유형 C)이 발견된다. 첫째로, '$\angle A$와 $\angle F$는 엇각이므로 같다'고 하였는데, 이는 지식이 부족한 경우(B4)에 해당한다. 둘째로, $\angle AEB$, $\angle CEF$를 일컬으면서 '점 E에 마주한 각'이라는 표현을 썼는데, 이는 표현이 부정확한 경우(C4)에 속한다. 셋째, $\triangle ABE \sim \triangle FDA$를 이용해야 하는데 $\triangle ABE \sim \triangle FCE$를 이용하였다. 이는 잘못된 요소를 이용한 경우(B3)에 해당한다.

지도방안) 문항1-5 유형의 경우, 첫째, 엇각이라고 해서 반드시 크기가 같은 것은 아니며, 엇각의 크기가 같다는 것은 평행선의 특징이다. 따라서 그저 '엇각'이라고만 해서는 안 되고 '평행선의 엇각'이라고 평행선을 반드시 언급해 주어야만 타당한 이유가 된다. 이 부분은 학생들이 학습을 하면서 흔히 놓치는 부분이다. 따라서 중1 과정에서 동위각, 엇각의 정의와 성질을 설명할 때에는 평행일 때에만 동위각, 엇각이라는 용어를 쓰는 것은 아니며, 그 크기가 같다는 것만이 평행일 때의 성질임을 분명히 구분하여 지도해야 한다. 둘째, 각이 한 점에 마주한다는 용어는 수학적으로 정의된 용어가 아니며, 학생이 임의로 사용한 말인데, 그림의 표시를 보지 않고는 어떤 각을 가리키는 것인지도 알기 힘들며, 특히 $\angle AEC$, $\angle BEF$를 말할 때와 구별이 되지 않는다. 따라서 $\angle AEB$와 $\angle CEF$라는 정확한 용어를 사용하여야 한다. 셋째, 결론인 $\overline{AB}:\overline{BE}=\overline{DF}:\overline{AD}$를 이끌어내기 위해 필요한 요소가 무엇인지 먼저 생각해 보고 그것이 성립하는 이유를 찾아내는 방법인 분석법 등을 연습시키면 많은 도움이 될 것으로 보인다.

6) 문항 2-1에 대한 분석

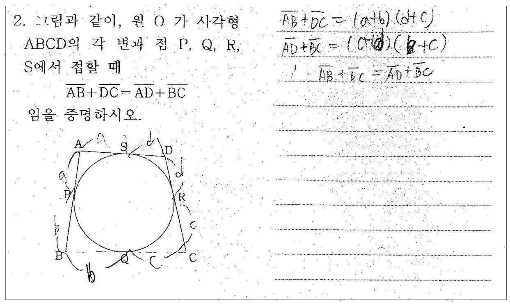


[그림 6] 문항2-1 유형
[Fig. 6] Types of Problem2-1

문항분석) 문항2-1 유형에서는 의사소통 불명확(유형 C)과 문제 파악 실패(유형 E)가 발견된다. 동일한 문항에 대하여 매우 많은 학생들이 본 예시와 같이 두 가지 오류를 범하였다. 첫째, O에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 놓았으나, 이를 그림에만 표시한 후 말로는 정확히 정의하지 않고 곧바로 사용하고 있다. 매우 많은 학생이 이와 같은 오류를 범하였는데, 이는 문자를 도입하면서 그 의미를 명시하지 않은 경우(C2)에 해당한다. 둘째, O에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 놓을 때, $\overline{AB}=\overline{CD}$가 가정, $\overline{OM}=\overline{ON}$이 결론인데, 이를 반대로 파악하여 문제에서 증명하라고 한 명제가 아니라 그 역을 증명하였다. 이는 유사 문제로 오인한 경우(E2)에 속하는 오류이다. 특히 이 문제의 경우는 학생이 문제를 자세히 읽어보지 않고 언뜻 살펴본 뒤 교과서에 증명이 나와 있었던 것과 같은 명제로 단정지어버린 것이 원인으로 보인다.

지도방안) 문항2-1 유형의 경우, 첫째, 문제에 제시되지 않았던 새로운 점을 이용하기 위해 문자를 도입할 경우 그 문자가 가리키는 점이 어떤 점인지 반드시 그림이 아니라 정확한 표현으로 설명해야 함을 알려 주어야 한다. M, N을 그림에만 표시할 경우, M이 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발로서 정의된 것임을 확실히 알 수 없다. 따라서 증명을 비롯하여 수학에서 답안을 작성할 때에, 그림은 보조도구일 뿐이며 모든 것은 글과 기호로 정확히 표기하여야 함을 학생이 분명히 알도록 해야 한다. 둘째, 이러한 오류는 증명문제 뿐 아니라 다른 문제를 풀 때에도 항상 주의해야 할 사항이므로, 증명 지도 시에는 물론 수업 전반에 걸쳐, 문제를 찬찬히 읽고 올바로 파악한 후에 풀이에 나서도록 하는 차분함을 기르도록 지도해야 한다. 또한 증명지도나 문제해결 지도 시, 교과서에 나온 풀이과정 혹은 교사의 풀이 과정을 무작정 암기하는 것이 아니라, 항상 자신 스스로 무엇을 해야 할지 생각할 수 있도록 발문하고 생각할 시간을 충분히 주어야 한다. 또한 이를 위하여 때로는 성공적인 답이 나올 때까지의 과정에서 겪을 수 있는 시행착오를 수업과정 중에 자연스럽게 경험하게 하는 것도 필요하다.

7) 문항 2-2에 대한 분석



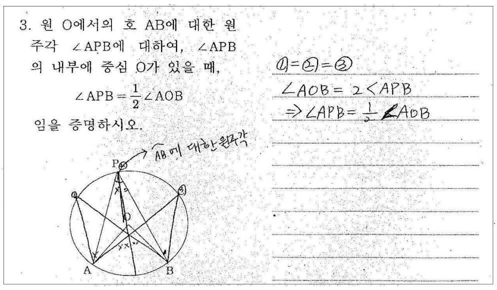
[그림 7] 문항2-2 유형
[Fig. 7] Types of Problem2-2

문항분석) 문항2-2 유형에서는 의사소통의 불명확(유형 C)과 논리적 타당성 결여(유형 A)가 발견된다. 첫째, 선분의 길이를 표현한 a, b, c, d를 설명 없이 사용하고 있는데, 이는 문자의 의미를 밝히지 않은 경우(C2)에 해당한다. 둘째, 증명의 첫 두 줄이 성립하기 위해서는 $\overline{AS}=\overline{AP}$ 등 요소가 필요하며, 또 그에 대한 이유도 필요한데 이것이 모두 빠져 있다. 이는 필요 요소 결여 혹은 논리적 비약, 요소의 타당성 미확보의 경우(A2)에 해당한다.

지도방안) 문항2-2 유형의 경우, 첫째, 문자를 선분의 길이로서 사용했다는 것을 그림에 표시하는 것으로 충분하다고 학생이 생각한 것으로 보인다. 그러나 점을 문자로 놓을 때와 마찬가지로 '$\overline{AP}=a$, $\overline{BP}=b$, $\overline{CR}=c$, $\overline{DR}=d$라 놓자'라는 언급이 반드시 필요하다는 점을 학생에게 주지시켜야 한다. 둘째, $\overline{AS}=\overline{AP}$ 등 네 쌍의 길이가 같은 선분을 언급해 주어야 하는데 답안에 그에 대한 언급이 전혀 없다. 그림에는 $\overline{AS}$와 $\overline{AP}$를 똑같이 a로 표기하였으나, 마치 $\overline{AS}=\overline{AP}$가 이미 주어진 성질인 것처럼 당연하게 사용하고 있다. 그러나 $\overline{AS}=\overline{AP}$라는 성질이 논리적으로 타당성을 갖기 위해서는 '한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같다'라는 보조정리가 필요하다. 그러나 답안에는 이러한 보조정리가 쓰여 있지 않을 뿐 아니라 원의 접선이라는 용어조차 등장하지 않고 있다. 이는 학생이 '선분의 길이가 같다'는 것을 당연하게 생각하여 그 이유를 서술할 필요성을 느끼지 못

하였기 때문으로, 예시 4에서와 마찬가지로 이유를 서술해야 하는 부분이 어디까지인지 증명 지도 시에 꾸준히 다루어야 한다.

8) 문항 2-3에 대한 분석

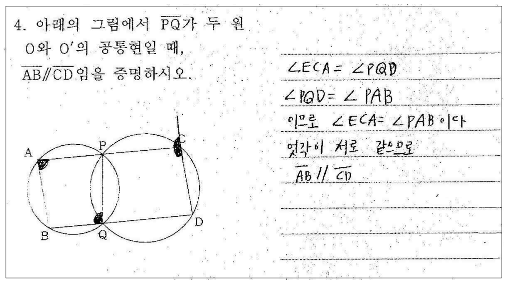


[그림 8] 문항2-3 유형
[Fig. 8] Types of Problem2-3

문항분석) 문항2-3 유형에서는 논리적 타당성 결여(유형 A)와 추론 능력 또는 지식의 부족(유형 B)이 발견된다. 첫째, 위 학생의 답안을 보면 '한 호의 원주각은 그 크기가 같다'는 것을 정확하게 표현하지 않고 그림에 몇 개의 각을 그린 후 답안에 ①=②=③만 표기하였다. 이는 증명의 전개 방식이 잘못된 경우(A3)에 해당한다. 답안 자체만 보면 ①, ②, ③이라는 기호의 의미를 파악할 수 없다는 점에서도 문제가 있지만, 그림에 나타난 세 개의 각이 같다고 하여 $\widehat{AB}$의 모든 원주각이 같은 것도 아니다. 따라서 올바른 서술이 필요한데, 이 점을 학생에게 주지시켜야 한다. 또한, 이 정리는 논리적으로 문제에 주어진 명제로부터 연역되는 것인데 이를 보조정리로 거꾸로 이용하고 있다. 둘째, $\angle AOB = 2\angle APB$임이 거의 설명되지 않고 있는데, 몇 가지 요소를 빠뜨린 것이 아니라 증명의 대부분을 건너뛰었으므로 이는 증명 미완성의 경우(B1)에 해당한다.

지도방안) 문항2-3 유형의 경우, 학생이 증명을 구상하려고 노력한 흔적이 그림에 나타나고 있으나 결국 증명을 완성하는데 실패하였다. 이는 기본적인 추론 능력의 문제이므로, 많은 연습을 시키는 것과 함께 추론의 방법을 가르쳐야 한다. 이 문제에서는 이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같다는 성질을 이용하여야 하므로 반직선 PO, 즉 원 O의 지름이 보조선으로 필요하다. 이를 학생 스스로 생각해 낼 수 있도록 분석법의 학습이 필요하다.

9) 문항 2-4에 대한 분석



[그림 9] 문항2-4 유형
[Fig. 9] Types of Problem2-4

문항분석) 문항2-4 유형에서는 의사소통 불명확(유형 C)과 논리적 타당성 결여(유형 A)가 발견된다. 첫째, 선분 DC의 연장선 위의 한 점으로서 E라는 점을 도입하여 사용하고 있으나, 그에 대한 언급이 없다. 이는 문자를 도입하면서 그 의미를 명시하지 않은 경우(C2)에 해당한다. 제시된 문제는 교과서에 나와 있던 문제인데, 수업 시간에 문제를 다루면서 위와 같이 점 E를 이용하였다. 이 과정에서 학생은 E라는 표기 자체로 그 의미가 설명된다고 생각했을 가능성이 있다.

둘째, 또한 $\angle ECA = \angle PQB$, $\angle PQD = \angle PAB$를 언급하면서 그 이유를 말하지 않았다. 이는 요소의 타당성을 확보하지 않은 경우(A2)에 해당한다.

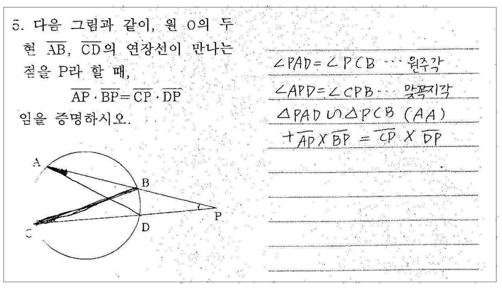
지도방안) 문항2-3 유형의 경우, 첫째, 문자의 의미 불명은 문항2-1에도 나타났으나, 본 예시에서는 문자 E가 어떤 점인지 답안에도 드러나 있지 않을 뿐 아니라 그림에조차 표시되어 있지 않다는 점에서 문항2-1에 비하여 문제가 더욱 심각하다. 따라서 어떤 문자를 사용할 때, 그 문자가 문제에 제시되어 있는 것이 맞는지 확인하도록 지도하여야 한다.

둘째, E를 선분 DC의 연장선 위의 점으로 정의했다면 $\angle ECA = \angle PQB$, $\angle PQD = \angle PAB$는 모두 정확한 사실이며 논리 전개상 필요한 요소로 적절한 위치에 들어가 있다. 하지만 이 요소를 갑자기 언급하기에는 논리적으로 다소 공백이 있어 보이므로, 요소가 타당성을 얻기 위해서는 '사각형의 한 외각의 크기는 그 내대

각의 크기와 같다'는 보조정리를 적어 줄 필요가 있다. 오류유형 A와 오류유형 B는 증명의 본질적인 부분에 있어서의 오류이므로 단시간에 바로잡기는 쉽지 않다. 특히 '요소의 타당성 미확보'의 경우, 어떤 요소를 언급할 때는 이유를 설명하는 것이 필요하다고 설명할 수는 있지만, 어느 정도까지 이유가 필요한지 파악하는 것은 학생들에게 그리 쉬운 일이 아니다. 따라서 학생에게 중학교 전체 기간 동안 많은 증명경험을 제공하여야 한다.

10) 문항 2-5에 대한 분석

문항분석) 문항2-5 유형에서는 문제 파악 실패(유형 E)가 발견된다. 동일한 각인 $\angle APD$와 $\angle CPB$가 크기가 같다고 언급하면서 그 이유를 맞꼭지각이라고 하였다. B와 D의 위치가 반대일 때의 증명을 학생이 이전에 다루어 보았다는 사실에 비춰볼 때, 이는 문제를 유사한 다른 문제로 오인한 전형적인 경우(E2)에 해당한다.



[그림 10] 문항2-5 유형
[Fig. 10] Types of Problem2-5

지도방안) 문항2-5 유형의 경우, 문제에서 P는 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 연장선이 만나는 점이라고 명시되어 있고 그림에도 그와 같이 표시되어 있고, 그에 따라 학생은 $\angle PAD$와 $\angle PCB$가 원주각으로 크기가 같음을 정확히 알아내었다. 그러나 $\angle APD$와 $\angle CPB$가 크기가 같음을 설명하면서 학생은 점 P가 $\overline{AD}$와 $\overline{CB}$의 교점일 때의 증명과 혼동하였다. 이는 증명을 할 때에 이전에 했던 증명에 대한 기억에 지나치게 의존했기 때문이다. 따라서 증명을 할 때에 기억에 의존하지 않고 문제 자체를 정확히 파악하고 그에 맞추어 증명을 하도록 지도해야 한다.

3. 결과 논의

본 연구에서 학생들의 증명의 서술과정에 나타난 오류유형을 분석한 결과 유형에 따라 발생 빈도를 정리하여 보면 <표 1>과 같다. 이 표를 보면 각 오류 유형에 따른 차이가 현격하게 차이가 있음을 알 수 있다. 다섯 가지 유형 중에서는 유형 A(논리적 타당성 결여)와 유형 C(의사소통 불명확)가 가장 높은 빈도를 차지하였고, 그다음으로는 유형 B(추론 능력 또는 지식의 부족)로 나타났다. 상대적으로 유형 D와 유형 E는 낮은 빈도를 보였다. 이를 통해 볼 때, 중학교 학생들의 증명 능력에서 논리적인 사고능력이 부족하고, 추론능력이 현저히 떨어지는 것으로 분석된다. 더불어 자신이 가진 수학적인 언어로 증명 내용을 명확하게 전달하는 능력도 낮은 것으로 나타났다.

[표 2] 오류 유형 분석
[Table 2] Analysis of error type

오류 유형	빈도수	비율(%)
오류유형 A: 논리적 타당성 결여	**165**	**40.74**
(A1) 논리적 비약	48	11.85
(A2) 요소의 타당성 미확보	96	23.70
(A3) 비논리적 전개	21	5.19
오류유형 B: 추론능력/지식의 부족	**48**	**11.85**
(B1) 증명 미완성	26	6.42
(B2) 불필요한 요소	3	0,74
(B3) 잘못된 요소 이용	5	1.23
(B4) 지식 부족	5	1.23
(B5) 근거 없는 진술	9	2.22
오류유형 C: 의사소통 불명확	**150**	**37.04**
(C1) 결론 미진술	25	6.17
(C2) 문자의 의미 불명	83	20.49
(C3) 불필요한 기술	3	0.74
(C4) 표현의 부정확	39	
오류유형 D: 기술상의 오류	**31**	**7.65**
(D1) 기호 또는 용어의 혼동	26	6.42
(D2) 잘못된 단어 사용	5	1.23
오류유형 E : 문제 파악 실패	**11**	**2.72**
(E1) 가정 이해 부족	3	0.74
(E2) 유사 문제로 오인	8	1.98
총 합	405	

세부유형으로 살펴보면, 먼저 유형 A의 경우, 요소의 타당성 미확보(A2)가 23.70%로 절대적으로 높은 빈도를 보였다. 논리적 타당성 결여의 원인이 증명 내용에 제시

된 내용을 왜 증명과정에서 반드시 필요한지 정확하게 인식하지 못하는 것으로 분석된다. 학생들이 증명을 위해 어떤 내용을 서술하지만 서술된 내용의 당위성에 대한 근거를 충분히 제시하지 못하는 것으로 나타났다. 유형 B에서는 증명 미완성(B1)이 6.42%로 가장 많은 빈도를 보였으며 근거 없는 진술(B5)이 상대적으로 높은 빈도를 보였으며, 잘못된 요소 이용, 지식 부족은 비슷한 비율을 보였다. 유형 C에서는 문자의 의미 불명(C2)이 20.49%로 절대적으로 높은 빈도를 보였으며, 결론 미진술(C1)이 그 다음으로 높은 비율을 보였다. 유형 D의 경우에는 기호 또는 용어의 혼동이 6.42%로 높은 비율을 보였고, 유형 E에서는 세부 항목별 차이가 크지 않았다.

V. 결론 및 제언

중학교 2학년 과정인 삼각형의 합동과 닮음을 이용하는 문제와, 중학교 3학년 과정인 원의 성질을 이용하는 문제로 학생들에게 시험을 실시한 후, 학생들의 기하 증명에서 나타나는 오류를 분석하여 오류를 5가지 유형으로 분류하고 세부유형을 16가지로 분류하였다.

위에서 분류한 오류유형을 토대로, 학생들이 작성한 답안에서 논의의 가치가 있는 10개의 문항을 예시로 택하여 그에서 발견되는 오류를 분류하고, 그 원인을 분석하고 그에 따른 지도 방안을 찾아보았다. 결과를 종합해 볼 때, 학교 수학 교육에 있어 중점적으로 지도하여야 할 부분은 다음과 같다.

첫째, 수업에서 증명을 다룰 때에 오류 유형에 따른 맞춤형 지도가 필요하다. 구체적으로 제시하면, ① 논리적인 허점이나 비약이 생기지 않도록 지도한다. 증명을 지도할 때에 증명의 각 단계의 필요성을 인식하고, 필요한 단계가 누락되지 않았는지 확인하도록 지도한다. ② 논리적으로 증명을 전개해 나아갈 수 있도록 지도한다. 학생이 스스로 추론을 할 능력을 가질 수 있어야 하며, 그 내용을 원인과 결과 등의 논리적 순서로 재구성하는 것도 훈련을 통해 익히도록 하여야 한다. 특히 생각의 순서와 답안 작성의 순서가 다를 수 있음을 명심하게 한다. ③ 교과내용을 지도할 때에, 기초 개념에 대한 오해가 발생하지 않도록 지도한다. 특히 학생이 쉽게 오인할 수 있는 부분을 미리 파악하여 주의 깊게 지도하여야 한다. ④ 자신의 생각을 명확히 표현할 수 있도록 쓰기 훈련을 시켜야 한다. 학생이 자신의 풀이를 발표를 통해 다른 사람에게 이해시키고, 다른 사람의 풀이를 보고 이해하거나 불명확한 부분을 지적하는 활동을 통하여 이를 지도할 수 있다. ⑤ 증명이나 문제 해결 등을 비롯한 모든 활동에 있어서 용어나 기호 등을 정확히 사용하도록 지도한다. ⑥ 문제의 가정과 결론을 먼저 정확히 파악하도록 지도한다.

둘째, 수업시간에 논리적 사고 과정을 강조하여야 한다. 학생은 시행착오를 포함하여 논리적 사고 과정을 거쳐 보아야 하며, 교사는 이 과정에서 학생이 범하는 오류를 교정해 주고, 학생이 어떠한 성질을 논리적 흐름에 맞춰 설명할 수 있도록 지도하여야 한다.

셋째, 학생의 기하 증명에서의 오류유형에 관한 후속 연구가 필요하다. 본 연구는 112명의 학생들을 대상으로 하였으며, 연구자가 직접 개발한 검사지를 이용하였고, 이 검사의 결과에 초점을 맞추어 오류를 분석하고 분류하였다. 따라서 다른 학생들을 대상으로 하거나 다른 검사지를 이용한 연구에서는 본 연구의 결과와 차이가 있을 수 있다. 학생의 사고 과정에 따른 실질적인 오류유형 분류에 대한 심화된 연구와 학교 수업을 통하여 오류를 방지하고 교정할 수 있도록 하는 지도 방법에 대한 폭넓은 연구가 지속적으로 이루어져야 한다.\

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 2009 개정교육과정에 따른 수학 교육과정, 서울: 교육과학기술부.

The Ministry of Education, Science, and Technology (2011). *2009 reformed mathematics curriculum*, Seoul: MOST.

강완, 백석윤 (1998). 초등수학교육론. 동명사.

Kang, W. & Baek, S.Y. (1998). *Mathematics education*, Seoul, Dongmeong Publishers.

김부미 (2004). 인지심리학의 관점에서 수학적 오류의 분석가능성 탐색, 수학교육학연구 14(3), 239-266.

Kim, B. M (2004). Cognitive psychological approaches on analysing students' mathematical errors, *The journal of educational research in mathematics 14*(3), 239-266.

김범석 (2009). 공간도형의 문제해결과정에서 나타나는 수학적 오류 유형 연구. 석사학위논문, 한국교원대학

교.

Kim, B. S. (2009). *A study on mathematical error types in problem solving process of space figures.* Master's thesis, Korea National University of Education.

김양희 (2007). 교사를 위한 수학교육론 특강, 경문사

Kim, Y. H.(2007) *Lectures on mathematics education for teachers*, Kyungmoon Books

김양희 (2008). 기하 증명 과정에서 발생하는 오류 분석 :중학교 8-나 도형의 성질을 중심으로. 석사학위논문, 연세대학교.

Kim, Y. H. (2008) *A study of errors patterns of middle school stidents in proof geometry – arounds the field of geometry at mathematics 8-second grade in middle schools*, Master's thesis, Yonsei University.

김창일 (2004). 중학교 2학년 증명지도방법에 관한연구, 수학교육논문집 18(1), 123-136.

Kim. C. (2004) A study on teaching of proof for the second grade students of middle school. *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E, 18*(1), 123-136.

김홍기 (1998). 중학교 수학에서 증명지도에 관한 연구, 수학교육 37(1), 55-72

Kim, H. K. (1998). A note on teaching of proof in middle school mathematics *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A, 37*(1), 55-72

노영아, 안병곤 (2007). 도형 영역의 오류 유형과 원인 분석에 관한 연구 – 초등학교 4학년을 중심으로, 한국초등수학교육학회지 11(2), 199-216.

No, Y. A. & Ann, B. G. (2007). An analysis on error of fourth grade student in geometric domain, *Journal of elementary mathematics education in Korea 11*(2), 199-216.

나귀수 (2014). 수학교사의 증명과 증명지도에 대한 인식 - 대학원에 재학 중인 교사를 중심으로, 수학교육논문집 28(4), 513-528.

Na, G. S (2014). Mathematics teachers' conceptions of proof and proof-instruction, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E. 28*(4), 513-528.

류희찬 외 5인 역 (2007). NCTM 2000, 학교수학을 위한 원리와 규준, 경문사.

Ryu, H. C. et al. (2007) NCTM 2000, *Principles and standards for school mathematics*, Seoul, Kyungmoon Books.

류성림, 정창현 (1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구, 수학교육 32(2), 137-149

Ryu, S. L. & Jung, C. H. (1993) A study on abilities and errors in processes of geometry proof for the middle school students, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A 32*(2), 137-149

서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 - 중학교 수학을 중심으로. 석사학위논문, 서울대학교.

Seo, D. Y. (1999) *Analysis of composition of proofs and investigation of proof learning – focus on middle school mathematics*, Master's thesis, Seoul National University.

우정호 (2006). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교출판부.

Woo, J. H. (2006). *Mathematics instructional principles and methods*. Seoul, SNU press.

이용하, 박지현 (2011). 학습자의 오개념과 오류에 대한 수학 교사들의 PCK, 교과교육학연구 15(1), 223-242.

Lee, Y. H. & Park, J. H. (2011). A study of mathematics teacher's pck with respect to students' misconceptions and errors, *Pedagogical content research 15*(1), 223-242.

이춘분 (2007). 증명에서의 명제에 대한 오류 분석 - 중학교 8-나 도형 중심으로. 석사학위논문, 단국대학교.

Lee. C. B. (2007) *An error analysis about the proofs of statements – focused on the Figure of 8-B*. Master's thesis, Dangook University.

이호철 (2007). 중학교 기하 증명과정에서 학생들이 보이는 오류분석 :8-나의 사각형의 성질 중심으로, 석사학위논문, 단국대학교.

Lee, H. C. (2007). *A study on the analysis of errors in proof of middle school geometry – focused on the properties of rectangles in 8-나*. Master's thesis, Dangook University.

전현미 (1996). 기하 증명 과정의 오류 경향 연구 - 중2 수학을 중심으로. 석사학위논문, 경북대학교.

Jun, H. M. (1996) *A study on errors in processes of geometry proof – of the second grade students of middle school*, Master's thesis, Kyungpook National Univ.

이정자, 조정수 (2006). 증명보조카드를 활용한 중학생의 증명지도에 관한 연구, 한국수학교육학회 전국수학교육연구대회프로시딩 36, 147-161.

Lee, J. J. & Jo, J. S. (2006) A note on teaching of proofs using pac(proof assisted cards) for middle school students, *Korea Soc. Math. Ed. Proc. of National Meeting of Math.*

Ed. 36, 147-161.

추지영 (2009). 중학교 논증기하 증명의 효과적인 지도방안. 석사학위논문, 경희대학교.

Choo, J. Y. (2009). *The direction of effective teaching in Euclidean geometry of middle school mathematics.* Master's thesis, Kyung Hee University.

한경민, 고상숙 (2014). 원의 방정식에서의 오류 극복 학습에 관한 연구 : 고등학교 1학년을 중심으로, 학교수학 16(1), 57-81.

Han, K, M. & Go, S. S. (2014). An analysis on the types of errors in mathematics and how to overcome the errors in the area of the equation of a circle in the high school, *School Mathematics 16*(1), 57-81.

한혜숙, 문수진 (2009). Freudenthal의 안내된 재발명원리를 적용한 증명지도방안에 대한 연구, 수학교육논문집 23(1) 85-108

Han, H. S. & Moon, S. J. (2009), A study on the teaching of proofs based on Freudenthal's guided reinvention principle, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E. 23*(1) 85-108

황혜정 외 (2012). 수학교육학 신론, 서울: 문음사.

Hwang H. et al. (2012). *New theories of mathematics education*, Seoul: Mooneumsa

Becker, G. (1982). Diffiiculties and errors in geometric proofs by grade 7 pupils. In Alfred Vermandel(ed.), *Proceedings of the Sixth Internationl Conference for the Psychology of Mathematical Education*, pp.123-127.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of teaching mathematics*(Revised American Edition), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

An Analysis of Types of Errors Found in the Proofs for Geometric Problems – Based on Middle School Course

Hwang, Jae-woo
Gao High school, Daejeon, Korea
E-mail : javert31@edurang.net

Boo, Deok Hoon†
Chungnam National University, Daejeon, Korea
E-mail : dhboo@cnu.ac.kr

By analysing the examination papers for geometry, we classified the errors occured in the proofs for geometric problems into 5 main types – logical invalidity, lack of inferential ability or knowledge, ambiguity on communication, incorrect description, and misunderstanding the question – and each types were classified into 2 or 5 subtypes.

Based on the types of errors, answers of each problem was analysed in detail. The errors were classified, causes were described, and teaching plans to prevent the error were suggested case by case.

To improve the students' ability to express the proof of geometric problems, followings are needed on school education. First, proof learning should be customized for each types of errors in school mathematics. Second, logical thinking process must be emphasized in the class of mathematics. Third, to prevent and correct the errors found in the proofs for geometric problems, further research on the types of such errors are needed.

* ZDM classification : G13
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : proofs for geometric problems, errors occured in the proofs, types of errors
* This work was supported by the Chungnam National University.
† Corresponding Author