韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2015.54.1.13
2015. 02. 제 54권, 제 1호, 13-30.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2015, Vol. 54, No. 1, 13-30.

증명에서 경험적 관점의 한계에 대한 중학교 3학년 학생들의 이해 연구

노은환(진주교육대학교)
강정기(남산중학교)†

Ⅰ. 서론

수학적 개념은 관념적 성격을 지닌다. 수학적 개념은 관념적으로 논할 수 있는 존재이지 실재하는 것이 아니다. 심지어 수학적 개념뿐 아니라, 절차와 논증까지 관념적 성격을 지니고 있다. 이를테면, 원이나 정다각형은 개념적 의미에서만 완전성이 고려될 수 있는 정신적인 구성물일 뿐이다(장혜원, 1997). 하지만 수학적 개념, 절차, 논증들이 관념적 성격을 지닐지라도 학생들은 그 성격을 잘 이해하지 못하는 듯 보인다. 특히 논증은 더욱 그러해 보인다.

이러한 원인 중 한 가지는 초등 논증과 중등 논증의 성격 차이로부터 기인하는 것으로 생각된다. 초등의 논증은 경험적 활동이 곧 논증의 논거로서 자리매김하고 있는 경우가 대부분이다. 그러나 초등에서와 달리 중등에서 논증은 경험에 입각한 관점을 탈피하고 논리만이 논증의 논거로서 작용하게 된다(교육과학기술부, 2011). 이를테면, 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같음에 대한 초등의 정당화는 측정과 같은 시각적 확인에 의하며, 반면 동일 명제에 대한 중등의 증명은 논리적 방식을 취한다(교육과학기술부, 2010b; 이준열 외, 2009).

경험적 활동에 기반한 초등의 논증 방식은 학생들의 인지적 발달 단계를 고려한 교육 취지로 말미암은 것이다. 초등의 경험 중심의 정당화는 중등에서 논리 중심의 논증으로 변모하게 되며, 중등 증명을 올바르게 이해하기 위해서는 초등에서의 경험에 기반한 관점 탈피가 요구된다. 그러나 문제는 이들 사이의 차이점 인식을 위한 충분한 기회 없이, 경험 중심의 교육적 관점에서 논리 중심의 수학적 관점으로의 이행이 급진적으로 이루어진다는 것이다. 이로 인해 학생들은 경험 중심의 관점을 버리지 못한 상태에서, 논리 중심의 증명을 학습해야 하는 상황에 처하게 된다. 따라서 학생들은 논리적 증명은 실험 및 관찰과 더불어 존재하는 또 다른 증명 양식이라고 생각하기 쉬우며, 논리적 증명의 위력을 모른 체 증명 학습에 임하게 될 수 있다.

증명 학습의 어려움을 감안하여 초등학교의 정당화는 실험과 관찰 위주로 교수학적으로 변환되었지만, 이것이 도리어 중등학교에서 논리적 증명 학습의 당위성 인식에 방해 요인이 될 수 있는 것이다. 인지적 수용이 용이한 실험과 관찰의 강렬함이 도리어 관념적 관점으로의 이행에 방해 요인으로 작용하게 되는 것이다. 이런 경우 교육 과정 입안자들이 애초에 의도한 교육 취지를 살리지 못하는 결과가 초래된다. 즉, 실험과 관찰이라는 교수학적 수단의 본질이 오도되고, 도리어 실험적 방법 역시도 수학적 증명의 한 방편이 될 수 있다는 오개념, 이른바 메타 인지적 이동[2](meta cognititive shift)이 발생할 수 있게 된다. 보조수단으로 사용된 고안물이 수학적 증명의 본질 이해에 방해 요소가 될 수 있는 것이다. 따라서 증명의 본질 이해를 돕기 위해서는 실험 및 관찰이 지닌 한계 인식에서 비롯된 논증 학습이 요구된다. 실험 및 관찰이 갖는 주관성의 한계를 인식하고 이를 극복하기 위한 노력을 강구할 기회가 제공되어야 하며, 그 누구도 부인할 수 없는 방법으로서 논증의 위력과 필요성을 실감하는 경험이 필요하다.

이에 본 연구에서는 경험적 활동에 기반하여 수학적 사실을 정당화하는 관점을 경험적 관점으로, 수학적 대

* 접수일(2014년 12월 31일), 수정일(2015년 02월 17일), 게재확정일(2015년 02월 22일)
* ZDM분류 : E53
* MSC2000분류 : 97D70
* 주제어 : 경험적 관점, 관념적 관점, 실험적 방법의 한계
† 교신저자

2) 메타 인지적 이동이란 교사의 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식 그 자체로부터 그가 만들 교수학적 고안으로 이동한 것을 말한다(김부윤,정경미, 2007).

상은 이상적 존재이므로 경험적 활동에 기반한 정당화는 한계가 있음을 인식한 관점을 관념적 관점으로 정의한다. 더불어 논리에 기반하여 수학적 사실을 논증해야 함을 이해하는 관점을 논리적 관점으로 정의한다. 이러한 정의에 따르면 증명의 관점 발달은 경험적 관점에서 관념적 관점, 그리고 논리적 관점 순으로 발달해 갈 것이다. 본 연구에서는 이들 중 경험적 관점에서 관념적 관점으로의 이행을 다루어보고자 한다.

현 교육 과정의 증명에서 경험적 관점에서 논리적 관점으로의 이행에 있어 관점 전환이 너무도 급진적이라는 것을 감안할 때, 이들 사이의 이행 논의는 증명 교수 학습 개선의 기초가 될 수 있을 것이다. 즉, 경험적 정당화에서 형식적 증명으로의 이행에서 급진적 비약 완화를 돕기 위한 목적으로 '전형식적 증명(Preformal proof)'이 제안되었듯(류성림, 1998; 홍진곤・권석일, 2004; Blum & Kirsch, 1991), 경험적 관점에서 관념적 관점으로의 이행을 논의함으로써, 논리적 관점으로의 급진적 이행이라는 비약을 완화할 기회를 갖게 되는 것이다. 이에 본 연구에서는 증명에 있어 경험적 관점에서 관념적 관점으로의 이행을 위한 교육 논의의 기초를 마련하는 것을 목적으로 다음의 연구문제를 설정하였다.

연구문제 1. 중등 증명을 학습한 중학교 3학년 학생들은 경험적 관점의 한계를 어떻게 인식하는가?

연구문제 2. 연구문제1에서 경험적 관점의 한계를 인식하는 한 학생과 그렇지 못한 세 학생의 인지적 특성은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 증명의 수준

증명 수준은 기하 학습 수준으로 대표되는 Van Hiele의 이론에서 찾아볼 수 있다. Van Hiele는 기하 학습에는 다섯 수준의 존재를 주장하며, 학생들은 각각의 수준을 통해 발달해 간다고 주장하였다. 제 1수준은 시각적 인식 수준, 제 2수준은 분석 수준, 제 3수준은 비형식적 연역 수준, 제 4수준은 형식적 연역 수준, 제 5수준은 엄밀한 수준으로 구분하였으며, 사고 수준이 한 수준에서 다른 수준으로 발전하기 위해서는 학생들의 생물학적 성숙이나 발달보다는 교수·학습 방법에 보다 의존한다고 주장하였다(Van Hiele, 1986).

Van Hiele의 기하 학습 수준 이론은 증명 수준 도약이 점진적 과정으로 이루어진다는 점을 분명히 하였으며, 따라서 그에 따른 교수·학습의 과정 역시 점진적 발달에 맞추어 진행될 것을 주장한다. 그는 기하 학습 수준 이론에 이어 교수·학습 과정까지 제시하였는데, 그 과정은 점진적 발달을 위한 안내를 골자로 한다.

한편, Branford(1908)는 증명의 수준을 실험적 증명, 직관적 증명, 과학적 증명의 세 범주로 구분하였다. 첫 번째 단계인 실험적 증명은 감각에 의존한 측정 중심의 정당화로, 특정한 사실만을 보여주는 수준이다. 이 단계에서는 보편적이고 일반적인 증명은 할 수 없으며, 단지 제안하는 기능을 수행할 수 있다. 두 번째 단계인 직관적 증명은 일반적이고 보편적 사실을 입증하지만 암암리에 감각적 경험에 의존하는 단계이다. 그러나 감각 외에 통찰이 작용하기 때문에 보편성과 일반성 확보가 가능하다. 세 번째 단계인 과학적 증명은 공리나 다른 기본적인 정리들로부터 논리적인 추론만을 사용하여 완전한 연역을 수행하는 단계를 의미한다.

Bell은 발달 심리학적 관점에서 증명 수준을 5 단계로 구분하였다. 제0단계는 관련성과 규칙성을 전혀 인식하지 못하는 수준, 제1단계는 관련성이나 규칙성을 인식하기는 하지만 적용 가능 영역을 조사할 필요성을 인식하지 못하는 수준, 제2단계는 관련성에 대한 명제가 한 부류의 사례에 적용됨을 인식하고 다양한 사례를 조사하는 수준, 제3단계는 모든 사례를 다루어야 하는 필요성을 인식하고, 경험적 방법의 한계를 분명하게 인식하는 수준, 제4단계는 추론의 출발점과 사용된 정의를 분명하게 언급할 필요성을 인식하는 수준이다(나귀수, 2011, 재인용).

또한 Balacheff(1988)은 13~14세 학생들의 증명 형태를 분석함으로써, 증명 수준을 '소박한 경험주의(navtive empiricism)', '결정적 실험(crucial experiment)', '포괄적 예(generic example)', '사고 실험(thought experiment)'으로 범주화하였다. 소박한 경험주의 방식은 적은 수의 사례에 대한 조사로부터 일반적 결론을 내리는 것이다. 결정적 실험 방식은 몇 가지 사례에 대한 검사만으로는 추측을 정당화하기에 부족하며, 광범위한 사례를 고찰하여

정당화를 시도하는 것이다. 포괄적 예는 설명에 있어서 비록 특별한 사례를 이용하지만, 다른 모든 사례에도 적용될 수 있는 정당화를 시도하는 것이다. 사고 실험 방식은 연역적 추론에 의한 정당화 방식을 의미한다.

이상에서 학자들의 증명 수준에 대해 살펴보았지만, 수학에서 추구하는 증명은 단연 추론을 기반으로 이루어지는 연역적 증명일 것이다. 그러나 증명 수준에 대한 논의는 증명의 수준 상승이 급진적일 수 없으며, 각 단계를 거침으로써 점진적으로 발달될 수 있음을 함의한다. 이런 이유로 증명 학습의 비약적 도약 완화를 목적으로 실험적 증명과 연역적 증명 사이에 직관적 증명으로서 전형식적 증명을 제안하기도 하였다(류성림, 1998; 홍진곤,권석일, 2004; Blum & Kirsch, 1991; Miyazaki, 2000; Semadeni, 1984).

증명 수준에 대한 논의는 학습자에 대한 이해를 목적으로 하는 측면도 있지만, 증명 학습의 비약적 어려움에 중간 매개적 활동을 추가함으로써 도약 완화를 위한 것이기도 하다. 그 대표적 예가 곧 전형식적 증명이라고 볼 수 있다. 본 연구에서도 비약적 도약의 완화 취지로 초등의 경험적 활동에 기반한 정당화에서 중등의 논리적 증명으로의 비약적 이행에 발판을 마련해 보고자 한다. 특히 Bell이 주장한 경험적 방법의 한계 인식이 결여된 제3단계에 주목하여, 경험과 논리 사이에 경험의 한계 인식이라는 매개 활동을 추가함으로써 비약적 도약의 완화를 위한 논의를 시도하고자 한다.

구체적으로 Bell의 제3단계는 '모든 사례를 다루어야 하는 필요성을 인식하고, 경험적 방법의 한계를 분명하게 인식하는 수준'이다. 증명해야 할 사례가 유한이 아닌 무한이라면, 모든 사례를 개별적으로 확인은 불가능하다. 또한 경험적 방법으로는 관념적 대상의 특성을 증명할 수 없다. 이를테면, 삼각형의 내각의 합은 180°라는 명제는 증명해야 할 대상이 무한개이므로 개별적 삼각형에 대한 내각의 합을 직접 확인하는 것은 불가능하다. 또한 이것이 가능할지라도, 하나의 삼각형에 대한 내각의 합이 180°라는 것을 측정 활동으로 증명하는 것은 불가능하다. 측정 활동은 오직 삼각형의 내각의 합이 180° 일 것이라는 개연적 추론을 가능케 한다. 이에 본 연구에서는 경험이 갖는 한계 인식과 더불어 논리의 위력을 실감하고, 이를 통해 논증의 실제적 의미와 필요성 인식을 기반으로 진행되는 증명 학습의 토대를 마련해 보고자 한다.

2. 경험적 관점과 관념적 관점

수학적 개념은 추상화(Abstracting)의 과정을 거쳐 형성되는바, 수학적 대상은 이상적으로 존재하는 추상물(Abstraction)이다(Skemp, 1987). 추상물은 실재하는 것이 아니며, 관념적으로 다룰 수 있는 사고 대상이다. 따라서 비록 수학적 대상이 종이 위에 그려질지라도 우리는 그것을 관념적 성격으로써 인식할 수 있어야 한다. 이에 대해 Fischbein(1993)은 도형의 개념적 특성과 표현이 갖는 특성의 양면성을 지적하기도 하였다. 시각적 표현을 통해 흔히 접하게 되는 도형은 종이 위에 그려진 단순한 이미지가 아니라 정의에 의해 통제된 개념이다. 이러한 도형의 이중적 특성은 도형의 개념적 실체와 물리적 대응물 사이의 완전한 연결이 불가능하기 때문에 발생하는 것이다(장혜원, 1997).

도형의 이중적 특성은 기하 논증에도 고스란히 반영되어, 개념에 대한 물리적 대응물을 이용한 확인만으로 개념이 갖춘 성질을 증명하기에는 불충분하게 된다. 그러나 증명 학습의 초기부터 개념의 본질적 특성인 관념적 성격에 입각한 교수는 바람직하지 않다. 전술하였듯, Branford, Bell, Balacheff의 세 학자의 연구에서 볼 수 있듯, 감각에 의존한 측정 중심의 정당화는 형식적 증명 이전의 수준으로 자리 매김하고 있다. 따라서 학습자는 경험적 정당화 수준에서 형식적 증명의 수준으로의 원활한 이행 과제를 당면하게 된다.

문제는 이와 같은 이행 과정에서 경험적 정당화와 형식적 증명이 혼재될 가능성을 지닌다는 것이다. 즉, 형식적 증명 학습 이후 논리적 방식의 증명이 가능하게 되었지만, 감각적 경험에 입각한 경험적 정당화 역시도 하나의 증명 방식일 수 있다는 그릇된 인식이 가능하게 될 수 있다. 이는 경험적 정당화와 형식적 증명 사이의 원활한 이행을 돕기 위해서는 경험적 정당화가 갖는 한계 인식이 필요함을 시사하며, 따라서 이 두 가지를 구분하여 다룰 필요성이 제기되는 것이다. 이에 본 연구에서는 논증에서 개념을 인식하고 다루는 관점을 다음과 같이 구분하여 논의하고자 한다. 여기에서 경험적 관점은 Branford의 실험적 증명, Balacheff의 소박한 경험주의와

관련된 것이다. 또한 관념적 관점은 Bell이 제안한 모든 사례를 다루어야 하는 필요성을 인식하고, 경험적 방법의 한계를 분명하게 인식하는 제3단계와 관련되며, 논리적 관점은 Branford의 과학적 증명, Bell의 제4단계, Balacheff의 사고실험과 관련된 것이다.

- 경험적 관점 : 수학적 개념은 실재하는 것으로 생각하며, 모든 수학적 개념에 대해 경험적 실재의 존재가 있고, 이것을 확인하고 식별할 수 있다고 믿는 관점을 의미한다. 따라서 이 관점에서 수학적 결과의 타당성을 확보하는 것은 경험적으로 가능하다고 생각하게 된다.
- 관념적 관점 : 수학적 개념이란 실재할 수 없는 것으로 인식의 차원에서 이상적으로 존재하고 다루어질 수 있는 관념적 대상임을 인식하는 관점을 의미한다. 따라서 이 관점에서 수학적 결과의 타당성은 경험적 확인으로는 불가함을 인식할 수 있어야 한다.
- 논리적 관점 : 수학적 개념이란 실재할 수 없는 이상적인 것이므로 그와 관련된 수학적 결과는 오직 논리에 의해 증명 가능함을 인식하는 관점을 의미한다. 따라서 이러한 관점은 경험적 방식의 한계만을 인식하고 논리의 필요성까지 도달하지 못한 관념적 관점과는 구별된다.

수학적 개념인 추상물을 이해하는 방식이 존재하며, 그것이 바로 본 연구에서 지향하는 관념적 관점이다. 관념적 관점이란, 수학적 개념이 실재하지는 않는 것이며, 그것을 사고 속에 다룰 수 있는 사고 조작의 대상임을 이해하는 관점이다. 즉, 관념적 관점은 추상물을 경험과 따로 떼어서 생각하고 다룰 수 있는 능력을 의미한다. 따라서 이 관점에서 논증은 경험적 활동으로 대신할 수 없는 것이다.

이를테면, 삼각형의 내각의 합이 180°라는 명제 증명에서 각의 측정을 이용하거나, 종이를 찢어 붙여보는 활동에 입각한 정당화가 가능하다고 믿는다면 이는 경험적 관점에 해당한다. 반면, 동일 명제 증명에서 각의 측정이나 종이를 찢어 붙이는 활동으로 삼각형의 내각의 합이 180°이라는 추론은 가능하지만, 정확히 180°임을 밝힐 수는 없음을 인식한다면 이는 관념적 관점에 해당한다.

수학적 결과에 대한 정당화의 진정한 의미를 이해하기 위해서는 경험적 관점에서 관념적 관점으로 승격이 반드시 요구된다. 특히 중등에서 논리적 증명을 다루기 위해서는 더 없이 관점 전환이 필요하다. 따라서 초등 교육에서 활동 중심의 여러 경험이 다루어진 이후, 그 경험들이 중등으로 원활히 이행되기 위해서는 경험의 한계를 인식하는 단계가 필요하다. 이른바 관념적 관점을 가질 수 있어야 하며, 이것은 논리를 이해하기 위한 기초 발판이 될 것이다.

증명의 오류와 관련한 선행 연구(김양희, 2008; 류성림,정창현, 1993; 이호철, 2007; 홍인선, 2002)는 증명 그 자체에서 빚어지는 오류에만 주목해 왔다. 이를테면, 가정을 잘 이용하지 못하는 오류, 도형에 집착하여 생기는 오류, 연산자의 잘못된 적용 등은 증명 자체에서 학생들이 보여준 오류이다. 따라서 기존의 선행 연구는 학생들이 중등의 증명을 접하면서 초등에서 학습해 온 경험적 정당화를 어떻게 이해하는지 파악하는데 한계를 보인다. 이에 본 연구에서는 중등 증명을 학습한 중학교 학생을 대상으로 경험적 활동에 대한 인식을 조사해 봄으로써, 기존 연구의 한계를 극복해 보고자 한다.

본 연구에서 경험 한계 인식이 필요하다고 주장하지만, 초등의 구체적이며 경험적 활동 그 자체를 부정하는 것은 아니다. 본 연구에서는 초등의 정당화에서 중등의 논증으로의 비약적 도약으로, 학생들이 논리적 증명의 필요성에 대한 인식이 결여된 체 증명 학습에 임하는 결과가 초래될 수 있다는 것이 문제라고 보았다. 이에 본 연구에서는 증명에서 경험적 관점의 한계 인식에 초점을 두고 이를 다루어 봄으로써 초등과 중등 사이의 비약적 도약 완화를 위한 교수학적 기반을 마련하고자 하는 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

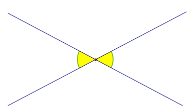
1. 검사 문항

우리는 연구 대상자들이 자명한 명제에 대한 증명의 필요성을 인식하고, 또 자명한 명제에 대한 경험적 논증의 한계를 인식하는지를 알아보기 위해 검사문항 1을 개발하였다. 검사 문항 1의 자명성을 두드러지게 하기 위해 명제 자체만 제시한 것이 아니라, 명제에 관한 그림

까지 제공하였다. 또한 자명하지 않은 명제에 대한 경험적 논증의 한계를 인식하는지를 살펴보고자, 경험적 논증이 제시된 검사 문항 2를 개발하였다. 이를 통해 연구 대상자들이 자명한 명제와 자명하지 않은 명제에 대한 경험적 논증의 한계를 인식할 수 있는지를 보고자 한다. 특히 검사 문항 2에 제시된 경험적 논증은 초등학교 4학년 1학기 교과서(교육과학기술부, 2010a)에 있는 증명으로 경험적 확인에 기반한 방식이다. 동시에 두 명제는 모두 중학교 1학년에서 논리적 증명이 제공되는 것이기도 하다. 따라서 검사 문항은 논리적 증명 학습에도 불구하고 경험적 논증의 한계를 인식하는지를 살펴보기에 적절한 문항이다. 학생들이 초등에서 경험한 소재를 활용함으로써, 중등 증명의 학습을 통해 경험적 관점을 탈피하였는지를 살펴보고자 하는 것이다. 또한 각 문항에 대하여 기술한 답에 대한 이유를 제시하게 함으로써, 연구자의 자의적 해석을 방지하고자 하였다.

[표 1] 검사 문항
[Table 1] Inspection items

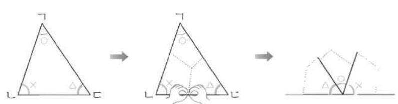
1. ‘두 직선이 교차할 때, 맞꼭지각의 크기는 같다.’는 명제의 증명은 어떻게 해야 하는가?



① 당연하므로 증명할 필요가 없다.
② 각의 크기를 재어보면 된다.
③ 각의 크기를 재어서 될 일이 아니다.

그 이유는?

2. 다음은 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180° 임을 증명하는 과정이다.
증명) 삼각형 ㄱㄴㄷ을 아래와 같이 잘라서 세 각의 꼭짓점을 이어 붙이면 직선 위에 꼭 맞추어진다.



여기서 각 ○, ×, △은 삼각형의 세 내각이므로, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 가 된다.

2-1) 이 증명은 타당합니까?

2-2) 타당하다고 생각하면 타당한 이유를, 타당하지 않다고 생각하면 타당하지 않은 이유를 쓰시오.

2. 자료 수집 및 분석

28명의 연구 대상자에게 2013년 7월 17일 아침 자율 학습시간을 이용하여 검사 문항 투입하여 자명한 명제와 그렇지 않은 명제에 대한 경험적 방식의 한계에 대한 인식 여부를 조사하였다. 연구 문제 1에 답하기 위한 자료 분석 과정은 제시된 이유를 바탕으로 수집된 자료를 유형별로 분류하는 것으로 시작된다. 이후 각 유형에 대한 도수 및 비율을 구함으로써 경험적 관점의 한계 인식에 대한 학생들의 인식을 파악하고자 하였다.

또한 연구 문제 2에 답하기 위하여 경험적 관점의 한계 인식에 성공한 하나의 사례와 그렇지 못한 몇몇 연구 사례를 선정하여 개별 면담을 실시하였다. 구체적으로 2013년 7월 24일 한 차례의 면담과 7월 28일 세 차례의 면담을 실시하였다. 면담 시간의 제한은 없었으며, 세 차례의 관찰에서 매회 약 1시간 정도의 시간이 소요되었다. 기록지의 학생 반응에 대하여 열린 발문을 함으로써, 학생의 생각을 이해하고자 하였으며, 학생과의 모든 대화는 필드노트에 기록하였다. 그리고 이러한 관찰 기록은 학생들의 인지적 특성 파악을 위한 기초 자료로 이용되었다.

반구조화된 면담을 사용하였으며, 그 자세한 내용은 다음과 같다. 개별면담은 1차적으로 구조화된 절차를 따르며, 2차적으로 후속 발문으로 연구 대상의 인식을 명료하게 파악하고자 하였다. 구조화된 절차는 기록지의 제공과 그에 대한 이유 파악으로 시작되었으며, 연구 대상자들이 경험에 기반한 증명을 어떻게 인식하는지를 살피고자 하였다. 또한 연구자가 사전에 준비한 발문들이 경험의 한계 인식이 결여된 대상에게 도움이 될 수 있는지를 살펴보고자 하였다.

구체적으로 ‘재어서 하면 오차가 나지 않을까?’, ‘아무리 정교하게 정확하게 하더라도 그 결과에 오차가 나지 않을까?’, ‘다른 사람이 못 믿겠다고 하면 어떻게 하지?’, ‘현미경으로 들여다보면 오차가 나지 않을까?’ 등과 같이 경험적 방법의 오차에 주목하게 하는 발문들을 준비하였다.

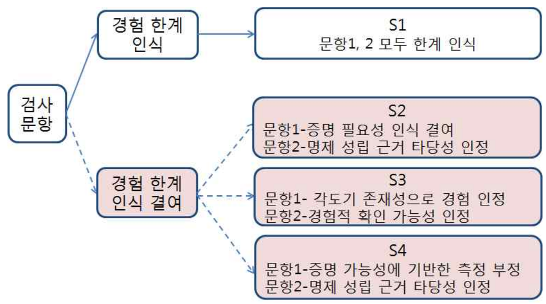
개별 면담에 대한 자료 분석은 잠정적 항목 추출로써 특징 지워진다. 잠정적 항목 추출은 최초 기록지로부터 해석적 방법으로 시작되며, 이는 그 다음 사례 분석의 초점이 된다. 이전 사례에서 추출된 항목은 그 다음 사

례 분석의 주요 초점이 되며, 추출된 항목에 나타나지 않는 특징은 추가적 잠정적 항목으로 추출된다. 이러한 방식을 취함으로써 추출된 항목을 점차 늘려갔으며, 논의에서 이를 정리하였다. 구체적으로 S2에게서 관찰된 ‘오차를 명제에 합치시키려는 특징’이 잠정적 항목으로 추출되면, 이는 S3의 사례 관찰의 초점이 되며 동일 현상이 나타나는지를 살펴보고, 그와 별개의 특징이 관찰되면 이는 추가적 잠정적 항목으로 분류되는 방식을 취하였다. 특히, 각 사례의 특징을 대표하는 항목을 사례의 제목으로 기술함으로써, 각 사례의 주요 특징을 명료화하고자 하였다. 이들 특징을 바탕으로 경험적 방법에 대한 대상 인식을 논의하였으며, 이는 경험적 관점의 한계 인식을 돕기 위한 교수학적 시사점을 얻는 기초로 활용되었다. 또한 준비된 발문이 한계 인식에 도움이 될 수 있는지를 살펴봄으로써, 그에 따른 교수학적 시사점을 얻고자 하였다.

3. 연구 대상

연구 참여자는 경남 창원의 N중학교 3학년 한 학급 28명으로 선정하였다. 중학교 3학년 학생을 대상으로 하는 이유는 중학교 2학년에서부터 시작되는 본격적 증명 학습으로 인해 연역적 증명을 충분히 학습한 상태로 판단되기 때문이다. 앞서 제시된 검사 문항을 28명의 연구 참여자에게 적용하였으며, 학생들의 반응을 경험적 관점의 한계 인식에 실패한 그룹과 성공한 그룹으로 구분하였다. 경험적 관점의 한계 인식에 성공한 하나의 대표적 사례와 어려움을 보인 그룹에서 임의로 3명을 추출함으로써 개별 면담의 연구 대상자 4명을 최종 선정하였다. 일반학급 28명의 학생은 연구 문제 1에 답하기 위한 연구 대상이며, 남학생으로 구성된 표준적인 학급의 중학교 3학년 학생들이다. 전술한 바와 같이 이들은 초,중학교의 교육과정을 통해 초등의 정당화와 중등의 증명을 모두 학습한 경험이 있는 학생들이다.

개별 면담을 가진 4명의 학생은 경험적 관점의 한계 인식에 성공한 대표적 사례 S1, 경험적 관점의 한계 인식에 실패한 사례 S2, S3, S4로 구분된다. 보다 자세히 S2는 1번 문항에 대해서는 자명성을 근거로 자명한 명제의 증명의 필요성을 인식하지 못하고, 2번 문항에 대해서는 명제 성립을 근거로 경험에 기반한 증명의 타당성을 인정한 사례이다. S3는 1번 문항에 대해서는 각도기의 존재성을 이유로, 2번 문항에 대해서는 경험적 확인 가능성에 기반하여 경험에 기반한 증명을 모두 인정한 대표적 사례이다. S4는 1번 문항에 대해서는 증명의 가능성에 기반하여 측정을 부정하였지만, 2번 문항에 대해서는 명제 성립을 기반으로 경험에 기반의 증명을 인정한 사례이다. S1, S2, S3, S4는 수학 학업 성취도가 각각 중상, 중, 중, 중위권에 해당하는 학생들이었다.



[그림 1] 연구 참여자의 선정
[Fig. 1] The selection of study participants

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 연구 문제 1: 경험적 관점의 한계 인식 결여

수학적 증명은 경험을 통해 추측할 수는 있지만, 경험으로 확신을 가질 수는 없다. 이는 수학적 개념 및 대상이 갖는 관념적 성격 때문이다. 수학적 개념은 실재하지 않는 것으로, 오직 관념 속에만 다룰 수 있는 정신적 구성물이다. 따라서 수학적 개념이 갖는 성격 역시 경험적 확인을 통해 확증하는 것은 불가능하며, 논리를 통해 증명하는 방식을 취하여야 한다. 그러나 본 연구에서 검사 문항을 28명의 연구 대상자에게 적용한 결과 다음의 결과를 얻을 수 있었다. 자명한 명제에 대한 반응은 [표 2]와 같다.

[표 2] 자명한 명제 증명의 필요성에 대한 반응별 비율
[Table 2] The rate by reaction for the need to prove an trivial statement

반응	학생 수(명)	비율(%)
증명할 필요가 없다	16	57.14
각의 크기를 재어보면 된다	5	17.86
각의 크기를 재어서 될 일이 아니다	5	17.86
무응답	2	7.14

자명한 명제에 대하여 57.14%의 절반 이상의 학생들이 명제를 증명할 필요성을 인식하지 못하였으며, 증명할 필요성을 인식한 학생들은 측정을 통해 증명 가능하다는 경험적 관점을 가진 학생들과 측정을 통해 증명이 불가능하다는 관점으로 대별되며, 이들의 비율은 동등하게 17.86%로 나타났다. 무응답을 제외한 반응에서 각 반응에 대한 이유를 분석하여 [표 3]과 같이 근거별로 범주화할 수 있었다.

[표 3] 자명한 명제의 각 반응에 대한 이유 유형
[Table 3] The type by the reason of each reaction for an trivial statement

반응	그 이유는? 이유의 근거 유형	그 이유는? 이유	학생 수(명)	비율(%)
증명할 필요가 없다	자명성	- 맞꼭지각은 크기가 같기 때문에 - 각이 마주보고 있어서 - 누구나 설명 없이 아니까 - 딱 보면 같기 때문에 - 두 직선이 교차하므로 - 당연하므로	13	50
	일반성	- 어떤 예를 들더라도 성립하기 때문에	1	3.85
	증명 가능성	- 한 각을 □라고 하면 나머지 각이 180-□이므로	2	7.69
각의 크기를 재어보면 된다	각도기의 존재성	- 만약 다른 이유라면 각도기의 존재가 필요 없기 때문에	1	3.85
	측정 가능성	- 재어보면 각도가 같으므로 - 재어보면 각의 크기가 나오기 때문에	4	15.38
각의 크기를 재어서 될 일이 아니다	논리적 증명 가능성	- 증명하는 방법이 있으므로 - 왠지 각도를 재면 안 될 것 같다. 두 직선을 활용해야 될 것 같다.	2	7.69
	일반성	- 각만 재서는 모두 다 재어보아야 하기 때문에 사실상 불가능하다. 하나의 가설을 세우는 것이 효율적 - 교차할 때 위치에 따라 각의 크기가 달라질 수 있으므로	2	7.69
	경험적 관점의 한계	- 각도기로 잰다고 하면 오류가 날 수 있기 때문에	1	3.85

주목할 만한 점은 ‘증명할 필요가 없다’는 반응에서 증명 가능한 이유를 들고 있다는 점이며, 이는 자신의 이유가 곧 증명이라는 것과 이를 통해 자명성을 논리적으로 극복할 수 있음을 인식하지 못한 탓이다. 또한 ‘각의 크기를 재어서 될 일이 아니다’라는 반응에서 경험적 관점의 한계를 인식한 것은 1명에 불과하며, 나머지 4명은 논리적 증명의 가능성과 일반성의 이유를 들고 있다. 이미 학습한 다른 증명 방법이 있다는 논리는 만약 논리적 증명을 학습하지 않았다면 어떠한 반응을 보였을지 의구심이 든다. 또한 여러 경우를 고려한 일반성의 논리 역시 가능성이 무한하지 않다면 얼마든지 측정으로 가능하다는 측정을 통한 확인을 인정한 사례로 볼 수 있다. 이러한 점을 고려할 때, 위의 결과는 다수의 학생들이 경험적 관점의 한계를 인식하지 못하고 있음을 알 수 있다.

한편, 자명하지 않은 명제에 대한 반응은 [표 4]와 같다.

[표 4] 자명하지 않은 명제에 대한 반응별 비율
[Table 4] The rate by reaction for the need to prove an nontrivial statement

반응	학생 수(명)	비율(%)
타당하다	23	82.14
타당하지 않다	2	7.14
무응답	3	10.72

자명하지 않은 명제에 대하여 무려 82.14%에 해당하는 학생들이 타당하다는 반응을 보였으며, 타당하지 않다는 반응을 고작 7.14%에 불과하였다. 이는 연구 대상자 대다수가 경험적 관점의 한계를 인식하지 못하고 있음을 보여주는 결과이다. 무응답을 제외한 반응에서 각 반응에 대한 이유를 분석하여 [표 5]와 같이 근거별로

범주화할 수 있었다.

[표 5] 자명하지 않은 명제의 각 반응에 대한 이유 유형
[Table 5] The type by the reason of each reaction for an nontrivial statement

반응	그 이유는? 이유의 근거 유형	이유	학생 수 (명)	비율 (%)
타당하다	명제의 성립	- 삼각형의 내각의 합은 180°이므로 잘라 붙이면 180°가 된다.	11	42.31
	권위	- 세 내각의 합은 180°이라고 배웠어요.	1	3.84
	일반성	- 모든 예를 들었을 때 성립하므로	1	3.84
	경험적 확인 가능성	- 색종이를 오려 붙여 위의 모형을 만들면 딱 들어맞기 때문에 - 그림으로 되니까 - 삼각형의 각을 180° 돌린 거니까 - 가장 확실하기에 - 직선은 180°이기 때문에 세 각을 모아서 180°이 되었다면 삼각형의 내각의 합은 180°인 것이다	8	30.77
	기타	- 삼각형 세 각의 크기가 같으므로 - 내심을 중심으로 원을 그어 보면 알 수 있다.	2	7.69
타당하지 않다	일반성	- 저런 식으로 하려면 모든 삼각형의 예를 들어야하기 때문에	1	3.84
	경험적 관점의 한계 인식	- 오류가 날 수 있기 때문에	1	3.84

주목할 만한 점은 ‘타당하다’는 반응에서 명제가 성립하므로 증명이 타당하다는 이유를 든 학생이 무려 42.31%에 해당하는 것으로 나타났으며, 이는 그 만큼 증명이 무엇인지를 잘 이해하지 못하는 학생들이 많다는 증거일 것이다. 또한 ‘타당하다’는 반응에서 경험적 확인이 가능하다는 이유를 든 학생이 30.77%로 적지 않은 것으로 나타났다. 한편, ‘타당하지 않다’는 반응에서 경험적 관점의 한계 인식은 1명에 불과하며, 나머지 1명은 일반성에 기반하여 타당성을 비판하였는데, 이 역시 가능성이 무한하지 않은 경우 경험적 활동을 통한 증명이 가능함을 인정한 사례로 볼 수 있다. 이상의 결과를 볼 때, 많은 학생들이 경험적 관점의 한계를 인식하지 못하고 있음을 알 수 있다.

2. 연구 문제 2

경험적 관점의 한계를 인식한 한 사례와 그렇지 못한 세 명의 사례에 해당하는 학생들과 개별 면담을 가짐으로써, 이들의 인식의 특징을 파악해 보고자 하였다. 그 결과 경험적 관점의 한계를 명확히 인식한 S1의 사례와 경험적 한계 인식이 결여된 S2, S3, S4의 사례로 구분해 볼 수 있었다. 특히 경험적 한계 인식이 결여된 사례는 명제 성립을 가정하여 오차를 명제에 합치시킨 S2의 사례, ‘거의 같은 것’을 ‘같은 것’으로 인정한 S3의 사례, 경험적 관점과 관념적 관점의 혼돈을 보여준 S4의 사례로 구분해 볼 수 있었다.

1) 경험적 관점의 한계 인식 : S1의 사례

S1은 두 문항 모두에서 경험적 관점의 한계를 정확하게 인식한 사례이다. S1과의 면담의 시작은 기록지의 답변에 대한 이유 설명 요청으로 시작되었다.

RS: 1번 문항을 왜 이렇게 답했는지 설명해주겠니?
S1: 사람이 눈으로 볼 때, 오류가 날 수 있기 때문이에요. 사람은 신이 아니잖아요.
RS: 각도기로 재면 어때?
S1: 저는 그렇게 하면 절대로 안 된다고 생각해요.
RS: 왜 그렇게 생각하지?
S1: 오류가 날 가능성이 안 날 가능성보다 훨씬 더 높으니까요.
RS: 그러면 2번 문항은 왜 이렇게 답했는지 설명해 주겠니?
S1: 이것은 실제로 잘라서 붙이는 거잖아요. 이것 역시도 사람 이니까 오류가 날 수 있어요.

S1은 두 문제에서 경험적 관점의 한계를 명확하게 인식하고 있음을 알 수 있다. 이후 연구자는 S1이 경험의 대안으로 무엇을 생각하는지 알아보고자 하였다.

RS: 그러면 이런 증명에서 오류가 나지 않도록 하려면 어떻게 해야 하니?

S1: 저는 공식으로 나타내야 한다고 생각해요. 각을 임의의 수로 정해놓고 하면 오류 없이 할 수 있어요.
RS: 그게 무슨 말이니?
S1: 그러니까 그 명제를 증명할 때, 그냥 바로 증명하는 게 아니라, 임의의 수라고 정해놓고 증명을 시작하잖아요. 그 말이에요.
RS: 그럼 이것(1번 문항)을 네 말대로 하면 어떻게 증명할 수 있니?
S1: 두 직선이 만날 때, 이 두 직선에서 양쪽으로 선을 그으면 이렇게 마주보고 있는 삼각형이 두 개가 나와요. 이 두 삼각형이 합동인 삼각형이라 가정하면 이 두 각이 같잖아요.
RS: 왜?
S1: 합동이라는 것은 두 삼각형이 완전히 일치한다는 뜻이니까요.
RS: 앞의 것(재는 것 또는 잘라서 붙이는 것)과 너의 방법의 차이는 뭐니?
S1: 음.....저는 앞에서는 생겨날 수 있는 오류를 생각해서 그 식을 만든 거고, 여기서는 오류가 없다고 하고 식을 세웠기 때문에 둘은 차이가 있어요.
RS: 네가 말하는 식이 뭐니?
S1: 이 명제를 설명할 때, 두 삼각형이 합동이라고 하고, 이 두 각이 같다 라고 한 거요.

이상에서 S1은 경험적 한계 인식과 아울러, 비록 논리라는 표현을 사용하지는 않았지만 경험적 방법이 아닌 논리적 방법이 필요함을 잘 인식하고 있었다. S1이 말한 임의의 수라고 정해놓고 하는 증명 방식은 논리에 기반한 방식인 것이다. 한편, S1이 검사 문항 1에 대해 제시한 증명을 보면, 논리적 방법에 의한 증명의 필요성을 인식하더라도 논리적으로 타당한 증명 방법을 고안하는 것은 구별되는 문제임을 알 수 있다. 즉, 경험적 관점에 대한 한계 인식이 곧 증명 능력 전이로 이어지는 것은 아니다.

2) 경험적 관점의 한계 인식 결여

(1) 명제 성립을 가정하여 오차를 명제에 합치 : S2의 사례

S2는 1번 문항에 대해서는 자명성에 근거하여 ‘당연하므로 증명할 필요가 없다’고 반응하였으며, 2번 문항에 대해서는 삼각형의 내각의 합에 대한 명제의 성립을 근거로 ‘주어진 증명은 타당하다’고 답한 사례이다. S2 역시 기록지의 답변에 대한 설명 요청으로부터 시작되었다.

RS: 1번 문항을 왜 이렇게 답했는지 설명해주겠니?
S2: 두 선이 이렇게 딱 그어져 있잖아요. 이때 서로 마주 보는 각은 크기가 같다고 배웠기 때문이에요.
RS: 배워도 증명해야 되는 거 아니니?
S2: 만약 증명이 필요한 상황이라면 2번에 있는 것처럼 각의 크기를 재어보면 되겠죠.
RS: 왜?
S2: 사람들은요 정확하게 구해지지 않고 그냥 보이는 상태에서 설명하면 그게 왜 맞는지 이해를 잘 못해요. 맞꼭지각의 크기가 같은 줄 모르는 학생에게 같다고 하면 왜 같은지를 이해하지 못하잖아요. 그래서 각의 크기를 재어줘서 서로 서로 마주보는 각이 같다고 보여주어야 되요.
RS: 2번 문항을 왜 이렇게 답했는지 설명해주겠니?
S2: 이런 식으로 삼각형을 잘라서 붙어주면 180° 가 나와요.

이상에서 S2는 1번 문항에 대해서는 권위에 호소하며 성립의 근거를 들었으며, 만약 굳이 증명하자면 측정으로 가능하다는 경험적 관점을 지향하고 있음을 알 수 있다. 또한 2번 문항에 대해서도 경험적 관점을 고수하고 있음을 알 수 있다. 연구자는 측정의 한계를 인식시켜주기 위해 다음과 같은 발문을 제기하였다.

RS: (2번 문제를 가리키며) 그런데 측정해서 오차가 나면 어쩌지?
S2: 그 때는 다시 재어야죠.
RS: 정확하게 잰다고 하더라도 현미경으로 보면 오차가 날 수 있는 것 아니니?
S2: 그러면 현미경으로 오차가 없을 정도로 깔끔하게 그어주면 되요.
RS: 오차가 안 생길 수 있을까?
S2: 만약 선이 정확하게 그어진 상태에서 재는 사람이 실수하지 않는다면 오차가 나지 않아요.
RS: 정확하게 긋고, 정확하게 재었다고 하자. 그런데 누군가가 와서 그게 정확한지 어떻게 아냐는 묻는다면 어떻게 하지?
S2: 그 때는 그 사람에게 재어보라고 하면 되죠. 자신이 한 게 남이 한 것 보다 믿을 수 있잖아요.
RS: 그럼 엄청 비판적인 사람이 0.000001 정도 차이가 날 수도 있는데, 육안으로는 구분할 수 없다고 하면서 측정

을 믿을 수 없다고 하면 어떻게 하지?
S2: 각도기에 현미경을 대라고 하면 되요.

이상에서 S2는 경험적 관점의 한계를 인식하지 못하고 있음을 알 수 있으며, 심지어 연구자의 의도적인 한계 인식을 돕는 발문에도 자신의 관점을 쉽게 철회하지 않는 경향을 지녔음을 알 수 있다. 이에 연구자는 오차의 발생을 어떻게 극복해야 할지를 물음으로써 S2의 생각을 보다 자세히 알아보고자 하였다.

RS: 오차가 안 생긴다는 것을 어떻게 알 수 있을까?
S2: 여러 수학자들이 각각 한 번씩 각도를 재어 봐요. 그래서 다 맞으니까 학자들에게 퍼트려요.
RS: 이렇게 하더라도 오차가 날 수 있는 것 아니니?
S2: 사람마다 눈이 다르거나 오차가 날 때, 그럴 때는 오차가 안 나는 사람과 오차가 나는 사람의 비율을 재서 높은 쪽으로 하면 되죠.
RS: 오차가 나는 사람이 더 많으면?
S2: 일단은 자신의 계산 실수가 있을 수 있기 때문에 여러 번 재면 되죠.
RS: 우리가 어떤 것의 수치를 정확히 잴 수 있니? 예를 들어 소숫점 이하 10째 자리까지.
S2: 정확하게 잴 수는 없겠죠. 사람에게 한계가 있으니까요. 그래서 도움이 되는 컴퓨터 기기가 있어요. 거기서 각도를 측정해서 믿게 해 주면 되요.
RS: 그럼 컴퓨터는 정확하니?
S2: 프로그램에 오류가 없으면 정확해요.
RS: 삼각형의 세 내각을 잘라 붙였는데, 만약 179.9999가 나오면 어쩌지?
S2: 그러면 반올림해야죠.
RS: 그 때는 삼각형의 내각의 합은 179.9999라고 해야 되는 거 아니니?
S2: 그리될 리는 없어요.
RS: 왜?
S2: 정삼각형의 한 내각의 크기는 60°라는 것을 다 알잖아요. 이것을 모두 더하면 180°이에요. 그러니까 그렇게 될 수는 없어요.

이상에서 S2는 경험적인 측정에서 오차가 빚어질 수 있다는 사실을 인식하고 있음에도 불구하고, 컴퓨터 기기나 반올림을 통해 문제를 해결할 수 있다는 시각을 가지고 있음을 알 수 있다. 즉, 오차가 빚어지는 것은 인정하지만, 그것도 하나의 증명이 될 수 있다고 보는 것이다. 이는 분명 경험적 관점의 한계 인식이 결여된 모습이다. 이것은 S2가 증명 이전에 증명해야 할 명제가 이미 성립함을 가정하고 있었기 때문에 빚어진 현상으로 생각된다. 이런 이유로 측정에서 오차가 난다면 그것을 알고 있는 결과와 합치시키는 반올림의 과정이 필요하다고 본 것이다.

(2) '거의 같은 것'을 '같은 것'으로 인정 : S3의 사례

S3는 1번 문항에 대해서는 각도기의 존재성에 근거하여 '각의 크기를 재어보면 된다'고 반응하였으며, 2번 문항에 대해서는 '색종이를 오려 붙이면 딱들어 맞기 때문이라는 사실'을 근거로 '주어진 증명은 타당하다'고 답한 사례이다. 즉, S2는 두 문항 모두에서 경험적 관점을 보여준 대표적 사례이다. S3 역시 기록지의 답변에 대한 설명 요청으로부터 시작되었으며, 설명으로부터 S3의 경험적 관점을 확인할 수 있었다. 이후 연구자는 오차의 발생을 어떻게 극복해야 할지를 물어봄으로써 S3의 생각을 보다 자세히 알아보고자 하였다. S3는 오차에 대해 '다른 각도기를 사용하면 된다', '종이 위에 두 선 그어놓고 반으로 접어보면 딱 겹치니까 맞꼭지각이 같다는 것을 증명할 수 있다' 등으로 오차를 인정하려 들지 않았다. 이에 연구자는 현미경의 존재를 이야기함으로써 언제든 오차가 날 수 있음을 인식시켜 주려 하였다.

RS: 현미경으로 보면 오차가 날 수 있지 않니?
S3: 현미경은 일단 정확하니까 오차가 날 수 없겠죠.
RS: 현미경도 오차가 날 수 있는 것 아니니?
S3: 그러면 현미경으로 다시 측정해야죠. 초점을 이상하게 맞추면 오류가 날 수 있으니까요.
RS: 모든 것이 이상하지 않게 맞추어져 있으면?
S3: 오차가 안나요.

S3는 현미경으로 측정하면 오차가 나지 않고 정확하게 측정할 수 있다고 생각하고 있었다. 이는 명백히 경험적 관점의 한계 인식이 결여된 전형적 모습이라고 볼 수 있다. 이에 연구자는 보다 자세한 현미경을 거듭 거론하여 현미경 역시 오차가 날 수 있는 도구임을 인식시켜주려고 하였다.

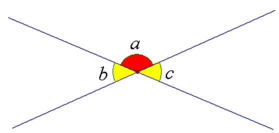
RS: 어떤 현미경이 있으면 반드시 그 현미경 보다 더 자세

히 측정할 수 있는 현미경이 있는 것 아니니?
S3: 더 자세한 현미경이 있죠. 그러나 더 자세한 현미경으로 잴 필요는 없어요.
RS: 왜?
S3: 웬만한 현미경이 오차가 나지 않으니까요.
RS: 더 자세히 잴 수 있다는 것은 항상 오차가 있다는 것 아니니?
S3: 오차가 있긴 있는데요. 그래서 반올림하잖아요.
RS: 반올림해서 이것(1번 문항)이 같다는 것을 어떻게 알지?
S3: 무슨 소리에요?
RS: 현미경으로 각도를 재었는데 오차가 안나니?
S3: 몇 만 분의 일 정도 오차가 나겠죠. 그런데 그걸 반올림하잖아요. 그러니까 거의 같겠죠.
RS: 거의 같은 것이지 같은 것은 아니지 않니?
S3: 각의 크기는 거의 같은데 반올림했으니까 그 값은 같겠죠.
RS: 그러면 이 명제는 '맞꼭지각의 크기는 반올림하면 같다' 라고 해야 되는 것 아니니?
S3: 그런데 몇 만분의 일정도 오차가 났다고 해서 도형 문제를 푸는데 전혀 지장이 없어요.
RS: 같다는 것을 증명하려면 몇 만분의 일이라도 오차가 나면 안 되는 것 아니니?
S3: 어...오차가 났지만 거의 거의 같잖아요. 그러니까 증명을 해도 상관없을 것 같은데요.
RS: 그런데 어떤 사람이 오차가 나니까 다르다고 하면 어쩌지?
S3: 그러면 몇 만분의 일은 다른데 몇 만분의 구천구백구십구는 같잖아요. 그러니까 그걸 다르다고 할 수는 없어요.
RS: 몇 만분의 일이라도 다르면 다른 것 아니니?
S3: 어... 다르지만, 거의 같죠.
RS: 수학에서 거의 같은 것이 있니? 다른 것 아니니?
S3: 수학에서 3.14랑 3.1415926…을 거의 같잖아요.

이상에서 S3는 '거의 같은 것'을 '같은 것'으로 인정하고 있음을 알 수 있으며, 때문에 측정 역시도 좋은 증명 방법이 될 수 있다고 생각하고 있음을 알 수 있다. S3의 이러한 경향은 두 번째 문항에서도 마찬가지로 나타났다.

RS: (2번 문항을 가리키며) 이렇게 잘라서 붙였는데, 아슬아슬하게 평평하지 않으면 어쩌지?
S3: 그렇게 될 수가 없어요.
RS: 왜?
S3: 색종이를 오려서 붙여봤을 때, 무조건 평평하게 되요. 그러니까 오차 없이 평평하게 되요.
RS: 가위가 정확하니?
S3: 가위는 측정도구가 아니에요.
RS: 가위로 자를 때, 삐뚤 삐뚤 자를 수도 있잖아!
S3: 에이~ 정확해요.
RS: 현미경으로 봐도?
S3: 예. 현미경으로 봐도 바르게 되어 있어요.
RS: 왜?
S3: 어....백 번 정도 잘라 가위날이 무뎌지면 바르지 않지만, 가위날이 날카로우면 무조건 바르죠.
RS: 현미경으로 봐도?
S3: 아...현미경이 대체 뭔데? 현미경으로 봤는데 오차가 난다 거거죠?
RS: 응.
S3: 그렇게 따지면 가위로 자를 때 모든 종이가 삐뚤 삐뚤하다는 거잖아요. 그러면 삐뚤 삐뚤한 채로 붙여야 해요.
RS: 그러면 저 증명을 믿을 수 없는 것 아니니?
S3: 몇 사람만 못 믿지 거의 대부분은 다 믿어요.

S2와 마찬가지로 S3는 쉽게 오차를 인정하려 들지 않는 경향을 지녔음을 알 수 있으며, 설사 오차가 나더라도 대부분의 사람들은 경험적 확인에 의한 증명을 믿는다고 생각하고 있었다. 그러나 다음의 사례는 오차를 잘 인정하지 않으려는 경향이 논리적 증명의 제시 이후, 급격히 변화할 수 있음을 보여준다. 연구자는 1번 문항에 대해 다음의 증명을 제시해 주었는데, 이로부터 S3는 경험적 관점의 한계를 인정하기에 이르렀다.



$a+b=180^\circ$
$a+c=180^\circ$ 이므로
$\therefore b=c$

[그림 2] 논리적 관점에 기반한 증명
[Fig. 2] The proof based on logical viewpoint

RS: 이렇게 하면 측정 안 하고도 믿을 수 있는 것 아니니?
S3: 믿을 수 있죠.
RS: 왜 그렇다고 생각하니?
S3: 그 값은 오차가 나지 않잖아요.
RS: 왜?
S3: 그러니까 값은 1하면 무조건 1이니까 그것처럼 값은 정

확해요.
RS: 이 방법은 앞의 방법과 어떤 차이가 있다고 생각하니?
S3: 어....측정하는 것은 측정도구를 사용하기 때문에 엄청 약간의 오차가 날 수 있어요. 그런데 이렇게 하면 오차가 날 수 없고 정확해요.
RS: 앞의 증명에 대해 어떻게 생각하니?
S3: 오차가 난다고 생각하는 사람한테는 측정으로는 안 되고 이런 걸로 설명해야 해요.
RS: 그러면 측정으로 증명 가능하다는 거니?
S3: 음.....불가능해요.
RS: 왜?
S3: 거의 맞다고 해도 그것은 엄연히 다른거니까요.
RS: 앞에서는 이렇게 이야기 안했잖아!
S3: 생각해 보니까 다른 것 같아요.
RS: 어떻게 생각이 갑자기 바뀐거니?
S3: 말 들어보니까 몇 만분의 일이 달라도 그게 오차가 나면 증명이 안 되는 것 같아요.

경험적 관점의 한계를 인정하긴 하였지만, 그 역시도 하나의 증명으로 인정한 S3은 드디어 측정 방식의 문제점을 허용하기 시작했으며, 그것은 논리적 증명의 제시 덕분이었음을 알 수 있다.

3) 경험적 관점과 관념적 관점의 혼돈 : S3의 사례

S4는 1번 문항에 대해서는 증명 가능성에 기반하여 '각의 크기를 재어서 될 일이 아니다'라고 반응하였으며, 2번 문항에 대해서는 '삼각형의 내각의 합은 180° 이기 때문에, 주어진 증명은 타당하다'고 답한 사례이다. S4 역시 기록지의 답변에 대한 설명 요청으로부터 시작되었으며, S4는 1번 문항에 대해서는 '증명을 이미 해놓았으므로 그 증명을 깰 수 없기 때문에 각의 크기를 재어서 될 일이 아니다'라고 설명하였다. 또한 2번 문항에 대해서는 '삼각형의 내각의 합에 대한 명제 때문'이라고 기록지의 말을 재 언급하였다.

한편, 2번 문항에 대해 증명에서 삐둘 삐둘하게 잘릴 수 있음을 언급하자, 이 증명은 그런 것은 말하지 않는 것이라고 답하였다. 즉, 그런 오차를 허용하지 않는 증명이라는 것이다. 이것은 명제의 성립에 기반하여 오차를 명제에 합치시켜 설명한 S2의 사례와 동일한 경우이다. 이후 연구자는 잘라서 붙였는데 아슬아슬하게 일직선이 되지 않는 경우에 대해 언급하였는데, 이로부터 S4의 증명에 대한 오개념을 확인할 수 있었다.

RS: 잘라서 붙였는데 아슬아슬하게 일직선이 되지 않는다면 어쩌지?
S4: 삼각형의 내각의 합이 180° 인데, 자른 사람이 잘못 자른 거죠.
RS: 그런데 잘못 자른 것을 어떻게 알지?
S4: 삼각형의 내각의 합이 180° 이기 때문에요.
RS: 이것은 증명해야 할 사실이잖아!
S4: 예.
RS: 그러면 모든 수학 증명은 이미 알고 하는거니?
S4: 기본적인 개념은 알고 있어야 수학 증명을 할 수 있어요.
RS: 여기서는 무엇을 알아야 하는거니?
S4: 예를 들면, 삼각형의 내각의 합이 180° 이라는 거요.

S4는 주어진 명제를 이미 알고 있다는 가정 하에 증명하므로, 경험 활동에서 발생한 오차는 이 명제에 합치되는 방향으로 제어되어야 한다고 생각하고 있었다. 이후 연구자는 현미경의 존재를 언급함으로써 어떤 것이든 측정에서는 오차가 발생할 수 있음을 주지시켜주었는데, 이것은 놀랍게도 관념적 개념에서의 혼돈을 초래하게 되었다.

S4: 그러면 직각삼각형에서 한 각은 왜 90° 죠?
RS: 무슨 말이야?
S4: 선생님이 말했듯, 그것도 90° 가 아니라, 89.9° 가 될 수 있는 것 아니에요.
RS: 그렇지.
S4: 그럼 그건 직각삼각형이라고 말할 수 없는 것 아니에요.
RS: 어떤 그림이 직각삼각형이라고 하면, 우리는 그것을 직각이라고 믿어준다. 다만 우리가 이것이 직각임을 증명하는 경우에는 직각임을 증명해야하는 것이지.
S4: 그럼 이것도 내각의 합이 180° 라고 믿어주면 될 것 아니에요.

S4는 언제든 오차가 발생할 수 있다면, 관념적 대상 역시도 오차가 나는 것이므로 믿을 수 없는 것이 될 수도 있다고 생각하였다. 즉, 그는 경험적 관점에서 오차의 허용은 곧 관념적 대상의 존재 역시 인정하지 못한다고 생각함으로써, 경험적 관점과 관념적 관점에서 혼돈을 초래하기에 이르렀다. 이후 연구자는 삼각형의 내각의 합이 180° 라는 사실에 대해, 평행선을 이용한 논리적 증명을 제시하였으며, 이후의 S4의 인식 변화를 살펴보고자 하였다.

RS: (논리적 증명을 가리키며) 이 증명은 어떻니?
S4: 오차가 없기 때문에 정확해요.
RS: 왜 오차가 없는거니?
S4: 자르지 않고 엇각을 이용해서 180° 임을 증명하였기 때문에요.
RS: (경험에 기반한 증명 가리키며) 그럼 이 증명은 어때?
S4: 증명이 될 수 없는 것 같아요.
RS: 왜?
S4: 오차가 있기 때문에요.
RS: 어떻게 생각을 바꿨니?
S4: 오차는 없을 수 없다고 했잖아요. 오차 없이 자를 방법이 없는 것 같아요.
RS: 앞에서는 이렇게 생각 안했잖아! 어떻게 생각을 바꿀 수 있었니?
S4: 앞에서 선생님께서 엇각으로 180° 가 되는 것을 증명하였잖아요. 그래서 생각이 바뀌었어요.
RS: 왜?
S4: 오차를 감안하지 않고 좀 더 정확하게 증명할 수 있는 방법이 있었기 때문이에요.

경험적 관점의 한계를 인정하지만 그것이 증명이 될 수 있다고 생각한 S4는 논리적 증명의 제시 이후, 경험에 기반한 증명은 증명이 될 수 없음을 인정하기 시작했다. 이후 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다'라는 증명에 대해 반으로 접어서 보여주는 증명이 가능함을 물어봄으로써 S4의 상태 변화를 확인해 보고자 하였다.

RS: 이 증명은 가능하니?
S4: 예
RS: 왜?
S4: 접어서 딱 맞으면 두 각이 같겠죠.
RS: 현미경으로 보면 차이가 날 수도 있지 않을까?
S4: 음...날 것 같네요.
RS: 그러면 이 증명은 옳은 거니?
S4: 아니오.

이상의 대화로부터 S4의 경험적 관점의 한계 인식이 다른 문제로까지 전이된 것은 아님을 알 수 있으며, 연구자의 물음을 통해 경험적 관점의 한계를 다른 문제로까지 전이할 수 있었다. 이는 한 문제로부터 경험적 관점의 한계 인식이 다른 문제로까지 반드시 전이되는 것은 아님을 시사한다. 이후, 이 증명을 스스로 해 볼 것을 제안하였는데, 어려움을 겪어 꼭지각의 이등분선을 이용한 논리적 증명을 제시해 주었다. 그런데 S4는 또 다시 경험적 관점과 논리적 관점에 대한 혼돈 현상을 보여주었다.

RS: (논리적 증명 방법을 가리키며) 이 방법은 어떻니?
S4: (각의 이등분선을 가리키며) 이것도 각의 이등분선이 정확하지 않을 수 있잖아요.

이것은 경험적 한계 인식으로부터 관념적 개념 역시 오차를 지닐 수 있다고 생각하는 현상으로, 경험적 한계 인식의 강조로부터 생겨날 수 있는 부작용임을 알 수 있다.

V. 결론 및 제언

수학에서 논리에 기반한 증명은 그리스 수학에서부터 유래되었지만, 논리에 기반한 증명이 어느 한 순간에 완성된 것은 아니다. 연역적 증명의 원류라 할 수 있는 Euclid의 '원론' 이전부터 사람들은 경험적, 또는 직관적인 소박한 형태의 정당화를 해왔다. 고대 이집트, 바빌로니아, 고대 중국 사람들이 이룩한 초보적 형태의 기하학은 논리적 정당성이나 정합적인 체계를 갖춘 학문의 모습으로 나아가지 못하고, 논리적 정합성을 탐구하기 시작한 '실험적 단계'에 해당한다(홍진곤,권석일, 2004). 이후 그리스의 Thales, Pythagoras, Euclid 등의 노력으로 오늘날의 논리에 기반한 증명 양식이 완성될 수 있었다. 실험과 경험에 기반한 양식이 논리에 의한 방법으로 전환될 수 있었던 것은 경험적 방식의 굳건하지 못한 논증의 한계 인식 때문이다. 즉, 경험에 내재된 오차를 극복하는 대안으로서 논리에 기반한 논증 방식이 탄생할 수 있었다.

현 교육체계 역시 이러한 역사 흐름에 발맞추어 초등에서는 경험적 활동 위주의 논증, 중등에서는 논리적 방식의 논증이 다루어지고 있다. 그러나 문제는 역사 속에 있어 왔던 경험적 방식의 한계 인식의 기회가 우리의 교육에서 다루어지지 않고, 경험적 활동에서 곧 바로 논리적 방식으로 논증이 전환된다는 점이다. 이에 본 연구에서는 초등과 중등에서의 양 갈래의 논증 방식을 모두 학습한 중학교 3학년 학생을 대상으로 경험적 관점에 입각한 증명에 대한 인식을 조사해 보았다. 그 결과 자명한 명제와 자명하지 않은 명제에 대해 다수의 학생들이 경

험적 관점의 한계 인식이 결여되어 있음을 확인할 수 있었다. 이러한 결과는 경험적 양식에 대한 한계 인식의 기회가 제공되지 않는 교육 현실로 부터 빚어진 문제라고 생각된다.

한편, 경험적 한계를 인식한 1명의 연구 대상자와 그렇지 못한 3명의 연구 대상자들과 개별 면담을 가짐으로써, 다음과 같은 특징을 파악할 수 있었다.

첫째, S1의 사례로부터 중등수준에서도 경험적 관점의 한계 인식이 가능함을 확인할 수 있었다. S1은 중상위권 수준의 수학학업성취도를 가진 학생이라는 점을 감안하면, 경험적 관점의 한계 인식이 중등수준에서 결코 불가능한 일이 아님을 확인할 수 있다. 한편, S1의 사례와 S4의 사례에서 보듯 경험적 관점의 한계 인식과 논리적 증명의 고안은 별개의 문제임을 알 수 있다. 즉, 경험적 관점의 한계 인식이 곧 논리적 증명 고안으로 이어지는 것은 아니며, 경험적 관점의 한계 인식은 논리적 증명의 위력을 인식시킬 수 있는 중간 매개체로서의 역할을 갖는 것이다.

둘째, 명제 성립을 가정하여 오차를 명제에 합치 시키려는 특징을 S2, S3, S4의 사례 모두에서 발견할 수 있었다. S2의 경우 오차가 나면 반올림하면 된다고 생각하고 있었다. 또한 S2는 현미경과 같은 정밀한 측정도구나 컴퓨터와 같은 현대 기기가 오차를 해결해 줄 수 있다고 믿고 있었다. 이것은 명제 성립을 가정하고 오차를 명제에 합치하게끔 만들어주면 된다는 인식에서 비롯된 것이다. 또한 S3는 '거의 같은 것'을 '같은 것'으로 간주하는 경향을 보인 것도 같은 이유에서 이다. 1%만 다르지 99%가 같으므로 '거의 같은 것'을 '같은 것'으로 인식하였던 것이다. 이러한 현상은 초등에서 어림, 측정 등의 단원을 통해 형성된 일종의 오개념일 수 있다. S4 역시 명제 성립을 이유로 나타난 증명은 오차를 가정하지 않는 것으로 생각하였다. 이것은 증명의 의의에 대한 인식 부족에서 비롯된 것으로 보인다. 이미 명제의 성립을 가정하고 증명하는 것은 증명의 취지에 부합하지 않는 것임에도, 세 연구 대상자들은 이를 올바르게 인식하지 못하였다.

셋째, 경험적 관점의 한계를 쉽게 인정하지 않는 경향을 확인할 수 있었다. 이는 S2, S3, S4 모두에게서 관찰된 현상이며, 논리적 방법의 제시 이전에는 경험의 한계를 인정할지언정 그 방식으로의 증명은 가능하다는 주장을 고수하였다. 그러나 S3, S4의 사례에서 보듯, 공교롭게도 논리적 방법의 제시 이후에는 경험적 방식의 증명이 불가함을 인정하기 시작했다. 이러한 현상은 경험적 관점 이외의 대안적 방법이 제시되지 않음으로써, 기존의 것을 버릴 수 없는 입장에 처해있었기 때문인 것으로 생각된다. 이는 마치 한 가지 길 밖에 모르는 사람에게 그것은 잘못된 길이 아니라고 언급함으로써, 진퇴양난에 처하게 만든 것과 같은 것으로 생각된다. 결국 다른 대안이 없으므로, 경험적 관점의 한계를 인정하였음에도 그 증명 방법을 포기할 수 없었던 것이다.

넷째, S4의 사례로부터 경험적 관점과 관념적 관점의 혼돈 현상이 초래될 수 있음을 확인할 수 있었다. 경험 한계 인식이 도리어 증명에서 보조선과 같은 관념적 대상까지 그을 수 없다고 생각할 위험이 있을 수 있음을 알 수 있었다. 증명에서 보조선은 관념적으로 그을 수 있는 대상이지, 경험적으로 긋는 것은 불가한 대상이다. 그러나 S4는 경험적으로 불가한 일을 관념의 범위까지 확장하여 관념 속에서도 불가하다는 지나친 일반화를 행하였던 것이다. 이는 경험적 관점의 한계 인식에 관한 지도의 교육적 부작용으로 생각된다.

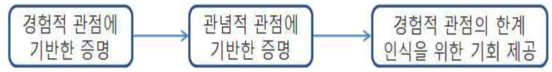
다섯째, S4의 사례에서 보듯, 관념적 관점이 반드시 다른 문제로 전이되는 것은 아님을 확인할 수 있었다. S4에게 기존 검사지 증명의 경험적 방식의 한계를 인식시켜 줌으로써, 관념적 관점을 형성하게 만들었지만, 이후의 또 다른 문제에서 경험적 활동에 기반한 증명을 또 다시 인정하는 현상이 나타났다. S4는 이등변 삼각형의 두 밑각의 크기가 같음을 보이는 과정에서 포개어 접는 방법을 또 다시 인정하고 말았다. 이것은 단 하나의 문제를 통해 경험적 활동의 한계 인식이 또 다른 문제로 반드시 전이되는 것은 아님을 시사하는 결과이다.

이상에서 개별 면담 사례에서 특징적으로 관찰된 현상에 대해 논의해 보았는데, 경험적 관점에 대한 한계의 인식 없이 논리적 방법을 제시하는 교수만으로는 경험에 기반한 논증과 논리에 기반한 논증을 동시에 허용하는 현상을 낳게 함을 알 수 있었다. 이러한 부작용을 고려할 때, 경험적 관점의 한계 인식을 위한 기회가 제공되어야 할 것이다. 이에 본 연구에서는 앞서 논의한 결과를 바탕으로 몇 가지 교수학적 시사점을 제시할 수 있었다.

첫째, 경험적 관점의 한계 인식이 가능하지만, 인지적 수용이 쉽지 않은 만큼, 경험적 관점의 한계 인식을 위한 충분한 기회가 제공되어야 할 것이다. 경험과 논리에 기반한 양 갈래의 논증이 모두 허용되는 인식하에서는 왜 논리적 증명을 학습하는지 이유를 모른 체 그것을 학습하게 된다. 이런 경우 학생은 측정해서 재어보면 될 일인데, 왜 저렇게 어려운 방식을 택하는지 이유를 알지 못하며 맹목적으로 논리적 증명을 학습하게 된다. 따라서 두 방식의 차이를 인식할 충분한 기회 제공되어야 할 것이다. 본 연구자는 이를 위해 개별 면담에서 현미경의 존재를 통해 한계 인식을 유도하고자 하였지만, 그것이 뜻대로 되지 않은 점을 고려하면 한계 인식을 위한 다양한 방식으로의 접근이 필요하다고 생각된다.

둘째, 오차를 언급하여 오차가 빚어질 것을 인정하게 만들지라도, 오차를 명제에 합치시키려는 경향을 지닌 만큼, 증명의 의의에 대한 지도가 요구된다. 증명이란, 이것이 성립할지 안할지 모르는 사실을 증명해 들어가는 것임을 숙지시켜야 할 것이다. 교과서의 대다수의 증명은 이미 참이라고 잘 알려진 명제에 대한 것이다. 이런 이유로 본 연구의 사례에서 연구 대상자들은 명제의 성립을 가정하고 명제의 증명을 시도하고자 하였다. 따라서 참인지 거짓인지를 파악하기 쉽지 않은 명제를 이용한 지도가 오차를 명제에 합치시키려는 경향을 탈피하게 도울 수 있지 않을까 생각된다.

셋째, 경험적 관점의 한계를 쉽게 인정하지 않는 경향을 지닌 만큼, 오차를 인정하게 만들 대안적 방법이 필요하다. 본 연구자는 사실 개별 면담을 갖기 이전에는 경험적 활동의 한계 인식 이후, 논리의 필요성 인식에 입각한 논증 도입이 최선이라고 생각했지만, 연구 결과로부터 다음과 같이 대안을 수정할 수 있었다. 학생들이 한계를 쉽게 인정하려 들지 않는 것은 대안이 없기 때문으로 생각된다. 따라서 경험적 논증 제시와 논증적 방법 제시 이후, 경험적 활동의 한계에 대한 논의가 오차 가능성 허용에 훨씬 효과적일 것으로 생각된다. 즉, 다음의 지도를 제안한다.



[그림 3] 경험적 관점의 한계 인식을 위한 교수 단계
[Fig. 3] The teaching step for the cognition of viewpoint based on experiment

넷째, 경험적 관점의 한계 인식을 돕는 지도가 도리어 경험적 관점과 관념적 관점의 혼돈 위험이 초래할 수 있는 만큼, 이를 위한 세심한 교수가 요구된다. 따라서 경험적 관점의 한계 인식과 아울러 논증에서 사용하는 관념적 대상과의 차이점을 논의하는 기회가 제공되어야 할 것이다. 각의 이등분선에 대해 그것이 각의 이등분선임을 증명하는 과정은 각의 측정을 통한 경험적 방식으로는 불가하다. 즉, 각의 이등분선은 실재 속에 존재하는 대상이라고 보기 어렵다. 그러나 이는 엄연히 우리의 관념 속에 하나의 인식의 대상으로 자리 잡고 있다. 따라서 논리적 증명 속에서 관념적으로 이러한 선은 언제든지 증명을 위한 보조도구로 긋는 것이 가능하다. 이는 명백히 관념적 대상이므로, 경험적 활동에 기반한 증명 대상이 될 수 없을 뿐이다. 이러한 점을 명백히 인식하는 기회가 제공되어야 할 것이다. 즉, 수학적 대상은 관념적 성격을 지닌 것임에도 측정과 같은 경험의 방식으로 증명하고자 하는 것이 문제이므로, 관념적 관점에서는 관념적 성격을 지닌 것을 다루어야만 문제가 발생하지 않음을 주지시켜주어야 할 것이다.

다섯째, 관념적 방식이 반드시 다른 문제로 전이되는 것은 아니므로, 여러 문제에서 경험적 관점의 한계 인식을 위한 기회 제공되어야 할 것이다. 교수자는 하나의 문제를 통해 경험적 관점의 한계 인식과 아울러 관념적 관점의 획득을 지향하지만, 그것은 학습자에게 무리를 초래할 수 있다. 따라서 다양한 문제에서 측정 활동, 종이를 접어서 확인해 보는 활동 등의 경험적 활동에 대해 논의해 봄으로써 어떤 것이 경험으로 분류될 수 있는 것인지를 명확히 하는 시간이 제공되어야 할 것이다. 이를 통해 어떤 것이 경험적 활동인지를 분명히 인식할 수 있어야 할 것이다.

이상에서 경험적 관점에서 관념적 관점의 이행에 대해 논의하였는데, 중등 교사는 교수학적으로 변환된 초등의 경험적 활동 위주의 교수에도 관심을 갖고, 중등

증명 지도에 앞서 경험의 한계 인식을 돕는 별도의 노력을 기울여 경험적 관점에서 관념적 관점으로의 원활한 이행을 도와야 할 것이다.

본 연구에서는 28명의 중학교 3학년 학생을 대상으로 했다는 점과 기하 영역의 2문제로 연구 결과를 도출한 제한점이 있다. 그러므로 보다 많은 학생을 대상으로 광범위한 영역에 걸친 후속 연구가 필요하리라 본다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2010a) 초등학교 수학 4-1. 서울: 두산동아.

The Ministry of Education, Science and Technology (2010a). *Elementary school mathematics 4-1*. Seoul: Dusandonga.

교육과학기술부 (2010b) 초등학교 수학 4-2. 서울: 두산동아.

The Ministry of Education, Science and Technology (2010b). *Elementary school mathematics 4-2*. Seoul: Dusandonga

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8].

The Ministry of Education, Science and Technology(2011). *Curriculum of mathematics department*. Notification No. 2011-301 of the Ministry of Education, Science and Technology [the extra number 8]

김부윤, 정경미 (2007). 수학 교실에서 나타나는 극단적 교수 현상에 대한 고찰. 수학교육 논문집 21(3), 407-430.

Kim, B.Y., Jeong, K.M (2007). Review on the Extreme Didactic Phenomena in the Mathematical Class. *Communications of Mathematics Education 21*(3), 407-430.

김양희 (2008). 기하증명과정에서 발생하는 오류 분석: 중학교 8-나 도형의 성질을 중심으로. 연세대학교 교육대학원 석사학위논문.

Kim, Y.H. (2008). *A study on error patterns of middle school students in proof geometry : around the field of geometry at mathematics 8-second grade in middle school*. Master's thesis, YSU.

나귀수 (2011). 수학 영재 학생들의 발견과 증명에 대한 연구. 수학교육학연구 21(2), 105-120.

Na, G.S. (2011). Analysing the Processes of Discovery and Proof of the Mathematically Gifted Students. *The Journal of Education Research in Mathematics, 21*(2), 105-120.

류성림 (1998). 전형식적 증명의 의의와 교수학적 의의에 관한 연구. 대한수학교육학회 논문집 8(1), 313-326.

Ryu, S.R. (1998). A study on the meaning of preformal proof and its didactical significance. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics 8*(1), 313-326.

류성림, 정창현 (1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구. 수학교육 32(2), 137-149.

Ryu, S.R, Jeong, C.H. (1993). A Study on Proof-Writing Abilities and Errors of Middle School Students in Geometry. *The Mathematical Education 32*(2), 137-149.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미 (2009). 중학교 수학 2. 서울: 천재교육.

Lee, J.Y., Choi, B.R., Kim, D.J., Song, Y.J., Yoon, S.H., & Hwang, S.M. (2009). *Middle school mathematics 2*. Seoul: Chunjae education.

이호철 (2007). 중학교 기하 증명과정에서 학생들이 보이는 오류분석: 8-나의 사각형의 성질중심으로. 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

Lee, H.C. (2007). *A study on the analysis of errors in proof of middle school geometry*. Master's thesis, DKU.

장혜원 (1997). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구: 표상 모델 개발을 중심으로. 서울대학교 박사학위논문.

Chang, H.W. (1997). *A Study on the Representations in Mathematics Learning - Focused on the Development of a Representation Model -*. Doctoral dissertation, SNU.

홍인선 (2002). 중학생의 기하 증명에 관한 의식과 증명과정의 오류 경향 연구: 제주도 중3 학생을 중심으로. 제주대학교 교육대학원 석사학위논문.

Hong, I.S. (2002). *A Study on the Attitude about the Proof-writing and Error patterns of Middle school students in Geometry : around the 3rd year students of Middle School in Jejudo*. Master's thesis, JJU.

홍진곤, 권석일 (2004). 전형식적 증명의 교수학적 의미에 관한 고찰. 수학교육 43(4), 381-390.

Hong, J.G., Kwon, S.I. (2004). On the Didactical Meaning of Preformal Proofs. *The Mathematical Education 43*(4), 381-390.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In D. Pimm(Ed.), *Mathematics, teachers and children*. London: The Open University, 216-235.

Branford, B. (1908). *A Study of Mathematical Education*, Oxford: Clarendon Press.

Blum, W., & Kirsch, K. (1991). Preformal Proving: Example and Reflections. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 183-203.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics 24*, 139-162.

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics, *Educational Studies in Mathematics, 41*, 47-68.

Semadeni, Z. (1984). Action Proof in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. *For the Learning of Mathematics, 4*(1), 32-34.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc. New Jersey. 황우형 역 (1998). <u>수학학습심리학</u>. 서울: 민음사.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight - A theory of mathematics education*, Academic press.

A study on the understanding of limitations of experiential viewpoints for 9th grade students

Rho, Eun Hwan
Department of Mathematics Education, Chinju National University of Education, 660-756, Korea
E-mail : ehroh@cue.ac.kr; idealmath@gmail.com

Kang, Jeong Gi†
Namsan Middle School, Chang-Won 642-110, Korea
E-mail : jeonggikang@gmail.com

The mathematical object is conceptual. Thus we can not prove the property of mathematical object in experimental viewpoint but in conceptual viewpoint. We performed the experiment for 28 middle school students to investigate whether they understand this. As a result, the majority of student didn't cognize the limit of experimental method. We had also individual interviews with four students. As results, one student was exactly cognizing the limit of experimental method, but he couldn't prove logically. The others didn't cognize the limit of experimental method. They thought that the proposition was already true regardless of the error. And one of them even thought that to be equal approximately was the same of to be equal exactly. Also, one student has confused between the experimental viewpoint and the conceptual viewpoint. This implies that it is necessary to help students understand the limit of experimental method.

* ZDM Classification : E53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : Viewpoint based on the experiment, Viewpoint based on the concept, Limit of experimental method
† Corresponding Author