논리연구 18-3(2015) pp. 307-335

증명론적 타당성의 사소성 문제* **

정 인 교

【국문요약】 논증의 타당성에 대한 덤밋과 프라위츠의 증명론적 정의의 핵심 사항 중의 하나는 열린 논증은 그 전제들에 대한 타당한 논증들을 그 결론에 대한 타당한 논증으로 전환하는 효과적인 방법이 있을 경우 타당하다는 조건이다. 그러나 그들의 정의에서 이 조건은 적절한 의미에서 결정 불가능한 전제들을 지니는 열린 논증들은 모두 사소하게 타당하게 된다는 부적절한 귀결을 지닌다. 필자는 프라위츠의 정의를 중심으로 증명론적 타당성 개념을 설명한 후, 이에 대한 사소성 문제를 제기하고 검토할 것이며, 이에 의거하여 프라위츠의 정의에 대한 수정안을 제시할 것이다.

【주요어】 증명론적 타당성, 증명론적 의미론, 프라위츠, 덤밋, 결정불가능성

접수일자: 2015.09.15 심사 및 수정완료일: 2015.10.12 게재확정일: 2015.10.12
* 본 연구는 2014학년도 고려대학교 문과대학 특별연구비에 의해 수행되었음.
** 익명의 심사위원들의 논평과 조언에 감사드린다.

1. 서론

추론은 우리의 지식을 확장하기 위한 중요한 수단이다. 논증은 추론들의 연쇄로서, 올바른 논증은 그 전제들이 정당한 한, 결론의 정당성을 보장하는 것이어야 한다. 그렇지 않으면, 올바른 논증을 통해 지식이 확보될 수 없을 것이기 때문이다. 볼차노(B. Bolzano)와 타르스키(A. Tarski)의 전통에서 논증은 그 전제들이 참인 경우 결론 또한 참임이 보장되는 경우 타당하다고 여겨진다. 그러나 모형론적으로 발전되어 고전논리를 뒷받침하는 이런 고전적 타당성개념은 지식을 확보하는 논증의 주된 역할을 제대로 설명하지 못한다는 비판을 받아왔다.[1] 실제로, 인식초월적인 진리값의 보존이 지식획득을 위해 할 수 있는 역할도 의심스러울 뿐 아니라, 고전논리가 그런 진리값을 보존한다는 논증자체도 인식초월적인 진리개념에 호소해야지만 그 타당성을 인정받을 수 있을 것이다. 지식을 확보하는 수단으로서의 논증의 역할을 제대로 설명하기 위해서 필요한 사항은, 올바른 논증에 의해 보존되어야하는 것은 인식초월적인 진리값이 아니라 인식적 정당성이라는 점이다. 또한 그런 설명이 효력을 지니기 위해서는 인식적 정당성이 어떤 추론규칙이나 논증에 의해 보존된다는 점이 인식초월적인 진리개념에 의존하지 않고 정당화될 수 있어야 한다. 수학적 진술의 경우, 인식적 정당성은 구성적 증명에 의해 확보된다. 따라서 적어도 수학적 논증의 타당성 및 일반적인 논리적 타당성은 인식초월적인 진리값의 보존에 해당하는 고전적 타당성이 아니라, 인식적 정당성의 보존에 해당하는 구성적 타당성에 의해 설명되어야 한다. 이와 같은 논지는 직관주의자들의 고전수학 및 고전논리에 대한 비판의 한 요지로 이해될 수 있을 것이다.

---

[1] 예컨대 Prawitz (1985), (2005), (2015) 등을 볼 것.

의미론적 관점에서 보자면, 고전논리와 고전적 타당성 개념은 어떤 진술의 의미는, 우리의 인지가능성과는 무관하게, 어떤 경우에 그 진술이 참인지를 규정함으로써 결정된다는 진리조건적 의미론에 의해 뒷받침된다. 반면에 직관주의 논리와 구성적 타당성 개념은 어떤 진술의 의미는 어떤 경우에 그 진술이 인식적으로 완전히 정당화되는지를 규정함으로써 결정된다는 검증주의적 의미이론에 의해 뒷받침된다.[2)]

검증주의적 의미이론에 입각한 이런 구성적 타당성 개념을 엄밀히 포착하기 위해, 프라위츠(D. Prawitz)와 덤밋(M. Dummett)은 겐첸(G. Gentzen)의 선구적 작업에 힘입어 증명론적 타당성 개념을 정의하였다.[3)] 그들의 정의는, 프라위츠에 의하면 '본질적으로 같다'고 할 만큼 기본적으로 같은 통찰에 기인하고 유사하며,[4)] 많은 장점들을 지니고 있다. 그렇지만, 그들의 정의가 충분히 만족스러운 것이 되기 위해서는 보완되어야 할 사항들이 있을 뿐 아니라, 몇 가지 어려운 문제들에 직면한다.[5)] 이 글에서 필자는 '사소성의 문제'라고 부를 문제를 검토하고, 이에 의거해 그들의 타당성 정의에 대한 한 잠정적인 수정안을 모색해 볼 것이다. 2절에서 프라위츠의 정의를 중심으로 증명론적 타당성 개념을 설명한 후, 3절에서 사소성 문제를 제기하고 그 해결책을 논의할 것이며, 이에 입각하여 4절에서 프라위츠의 정의에 대한 잠정적인 수정안을 제시할 것이다.

---

2) 직관주의 논리를 뒷받침하는 검증주의적 의미이론은 대표적으로 덤밋에 의해 발전되었으며, 이는 고전논리를 수용하는 논리실증주의의 검증주의적 의미이론과 구분되어야 한다.

3) Prawitz (1971), (1973), (1974), (2006), (2014) 및 Dummett (1991)을 볼 것.

4) 예컨대 Prawitz (2006) pp. 517-519 및 Prawitz (2007)를 볼 것.

5) 정인교 (2007a) 및 (2007b)를 참조할 것.

2. 프라위츠와 덤밋의 타당성 정의

1) 타당성에 대한 설명적 우선성: 도입규칙, 논증, 일반적 추론규칙

타당성은 논증과 추론규칙에 부여되는 속성이다. 논증의 타당성과 추론규칙의 타당성 중 어느 것이 설명적으로 우선하는가? 형식화된 논증의 경우, 논증을 구성하는 추론은 추론규칙의 적용으로 이루어진다. 따라서 이런 형식화된 논증의 경우, 추론규칙의 타당성을 먼저 설명한 후, 주어진 논증은 거기서 적용된 추론규칙이 모두 타당한 경우에 타당하다는 설명이 자연스러울 수 있다. 그러나 프라위츠와 덤밋은 일반적인 추론규칙의 타당성보다 논증의 타당성을 설명적으로 우선하는 역방향의 전략을 택한다. 그 이유로는 우선, 다른 독립적인 논거가 없는 한, 타당성이 부여되는 논증의 범위가 특정한 형식체계의 추론규칙들의 적용에 의해 얻어지는 것들로 제한되지 않아야 한다는 점을 들 수 있을 것이다. 그러나 보다 중요한 이유는 추론규칙의 타당성에 대한 구성적 혹은 증명론적 이해에 기인한다. 이런 이해 하에서는, 어떤 추론규칙은 그 전제들에 대한 타당한 논증들이 주어지면 결론에 대한 타당한 논증을 얻는 효과적인 방법이 있는 한에서 타당하다. 추론규칙의 타당성에 대한 이런 이해를 그대로 반영한다면, 추론규칙의 타당성을 논증의 타당성보다 설명적으로 우선하는 것은 순환적이 된다. 추론규칙의 타당성은 그 전제들에 대한 타당한 논증들을 결론에 대한 타당한 논증으로 변환하는 효과적인 방법의 존재에 의해 설명되어야 하는데, 이런 설명은 전제나 결론에 대한 타당한 논증이 무엇인지 이미 이해된 것으로 전제해야하기 때문이다. 반면, 논증의 타당성이 정의된다면, 추론규칙은 많은 경우 한 단계의 간단한 논증에 해당하는 추론들의 도식으로 여겨질 수 있기 때문에, 추론규칙은 그 적용 사례들이 모

두 타당할 경우 타당하다고 간단히 정의될 수 있다.

따라서 프라위츠와 덤밋의 증명론적 타당성 정의에서는 논증의 타당성이 일반적인 추론규칙의 타당성보다 설명적으로 우선한다. 그렇지만 논증의 타당성이 모든 추론규칙의 타당성보다 설명적으로 우선하는 것은 아니다. 논증의 타당성은 그 논증을 구성하는 진술들의 의미에 의해 설명되어야 한다. 검증주의적 입장에서 한 진술의 의미는 무엇이 그 진술의 직접적이고 완전한 정당화에 해당하는지를 규정함으로써 설명된다. 어떤 논리상항을 주된 연산자로 하는 논리적 복합문에 대한 직접적이고 완전한 정당화의 조건은 그 논리상항의 도입규칙에 의해 제시된다. 즉, 도입규칙의 결론에 대한 직접적이고 완전한 정당화는 그 규칙의 전제들에 대한 (직접적이고) 완전한 정당화들로 이루어진다. 이런 도입규칙은 결론에 도입되는 논리상항의 의미를 규정하는 역할을 하는 그 자체로 타당한 규칙이다. 도입규칙에 대한 이런 이해는, 겐첸에 기인하는 것으로, 검증주의적 의미이론에 입각한 증명론적 의미론의 한 핵심 논제라고 할 것이다.[6] 겐첸의 직관주의 자연연역체계의 도입규칙들이 이렇게 이해될 때, 이는 직관주의 논리상항에 관한 표준적 설명인 BHK 해석을 표현하는 한 방식에 해당한다.[7] 이런 점에서 프라위츠와 덤밋의 타당성 정의는 BHK 해석을 보다 엄밀하고 일반적인 것으로 전개하는 한 방식으로 여겨질 수 있다.[8]

프라위츠와 덤밋의 타당성 개념에 대한 설명의 의존성은 다음과

---

6) ‘도입규칙이 자체적으로 정당하다’는 논제의 한 검토를 위해서는 정인교 (2003)를 볼 것.

7) BHK 해석에 대한 한 설명으로는 Troelstra and Van Dalen (1988), p. 10을 볼 것.

8) 프라위츠는, Prawitz (2016 예정)에서, BHK 해석은 하이팅(A. Heyting)의 증명개념을 보다 명료히 한 것으로 여겨질 수 있으며, 이런 증명개념에 기초한 타당성 개념과 겐첸에 기인하는 타당성개념은 그 외연에 있어서 달라질 수 있다고 주장한다.

같이 요약될 수 있다. 도입규칙은 도입된 표현의 의미를 규정하는 정의에 해당하는 것이므로, 그 자체로 타당하다. 논증은 그 전제들에 대한 정당화가 주어졌을 때 그 결론에 대한 정당화를 얻는 효과적인 방법이 있을 경우 타당하며, 이런 의미의 타당성은 궁극적으로 진술의 의미를 규정하는 도입규칙에 의거해 정의되어야 한다. 마지막으로 도입규칙에 해당하지 않는 추론규칙은 그 사례에 해당하는 논증들이 모두 타당할 경우 타당하다. 이런 기획에서 물론 가장 중요한 단계는 논증의 타당성에 대한 올바른 정의를 제시하는 일이다.

2) 예비적 개념들: 논증골격, 논증, 원자체계

일반적인 의미의 논증은 추론들의 연쇄로 이루어지며, 이는 겐첸의 자연연역체계에서의 도출과 같은 나무(tree)의 형태로 제시될 수 있다. 프라위츠는 이런 일반적인 의미의 논증을 ‘논증골격(argument skeleton)’이라 부르고, 논증은 논증골격과 정당화 연산들의 집합으로 이루어지는 것으로 여긴다. 즉, 프라위츠의 의미에서 논증을 제시하기 위해서는, 논증골격과 더불어 그 논증골격의 각 추론단계가 도입규칙의 적용에 해당하지 않는 경우 이를 정당화하는 방법을 그 추론단계에 할당하여야 한다. 형식적으로 ‘논증’은 논증골격 D와 정당화 연산들의 집합 J의 순서쌍 <D, J>로 정의된다. 논증골격으로부터 논증골격으로의 함수인 정당화 연산의 표준적인 예는 겐첸의 자연연역 체계에서의 도출들의 정형화(normalization)를 위해 필요한 주된 환원절차들로서, 덤밋의 조화(Harmony)의 원칙 혹은 프라위츠의 전도원칙(Inversion Principle)에 의해, 주어진 추론의 전제들에 대한 직접적인 정당화가 주어지면, 즉, 도입규칙의 적용에 의한 전제들의 도출이 주어지면, 결론에 대한 정당화가, 즉, 도입규칙의 적용에 의한 결론의 도출이 얻어질 수 있음을 보이는 연산이

다.[9] 프라위츠가 논증을 이렇게 정의하는 이유는 어떤 진술에 대한 논증의 진정한 정당화 효력은 그 논증에서의 추론들의 정당화에 기인한다고 여기기 때문이다. J에 속한 정당화 연산들을 D에 유한번 적용하여 D'을 얻는 경우, <D, J>는 <D', J>로 '환원된다'고 한다. 해지되지 않은 전제에 의존하는 논증을 '열린 논증(open argument)'이라 하고, 그렇지 않은 논증을 '닫힌 논증(closed argument)'이라 한다. 어떤 논증의 '직접적인 부속논증(immediate subargument)'이란 그 논증의 결론과 그 결론에 이르는 마지막 추론단계를 제거함으로써 얻어지는 논증들을 말한다.

겐첸의 자연연역체계에서와 같은 도입규칙은 논리상항의 의미를 규정하는 역할을 하며, 이들은 논증의 타당성 정의를 위해 필요한 표준 논증(canonical argument)의 정의에서의 귀납적 단계에 활용된다. 귀납적 정의의 기초에 해당하는 것으로, 원자문장의 의미를 규정하는 역할은 '원자적 기반(atomic base)' 혹은 '원자체계(atomic system)'가 담당한다. 프라위츠는 한 원자체계 S를, 원자문장들을 구성하기 위한 어휘들로서 닫힌 항들의 집합 T와 관계술어들의 집합 R, 그리고 원자식들 간의 추론규칙들의 집합 *S*로 이루어진 삼중체 <T, R, *S*>로 간주한다.[10]

3) 표준 논증

검증주의적 의미이론에 따르면, 한 진술의 의미는 무엇이 그 진술의 직접적이고 완전한 정당화에 해당하는 지를 규정함으로써 설명된다. 이런 직접적이고 완전한 정당화를 엄밀히 나타내기 위해

---

9) 조화의 원칙 및 전도원칙에 대한 보다 자세한 설명과 논의를 위해서는 정인교 (1999)를 참조할 것.

10) 혹은 보다 단순히 원자체계는 원자문장들에 대한 회귀적으로 열거가능한 증명들의 집합으로 간주되기도 한다. 덤밋은 원자체계를 명시적으로 도입하지 않지만, 그의 한계규칙들(boundary rules)은 원자식들 간의 추론규칙들이다.

필요한 개념이 표준 논증(canonical argument)이다. 연언 도입규칙, 선언 도입규칙 혹은 일차양화사 도입규칙과 같이 부속논증이 요구되지 않으며 전제에의 의존이 해지되지 않는 도입규칙들만 적용한 논증은 그 결론에 대한 직접적인 정당화에 해당한다. 이런 표준 논증은 각 추론 단계가 그 추론의 결론의 의미에 의해 다른 정당화가 필요 없는 타당한 논증이다. 그러나 조건문 도입규칙과 같이 부속논증이 요구되고 전제에의 의존이 해지되는 도입규칙을 적용한 추론의 경우, 그 타당성은 부속논증의 타당성에 의존하게 된다. 덤밋은 표준 논증에 대해, 간단히 말해, 궁극적으로 해지되는 전제에 의존하지 않는 문장은 모두 도입규칙이나 한계규칙에 의해 추론되기를 요구하며, 프라위츠는 그 마지막 추론단계가 도입규칙의 적용에 해당하는 논증을 표준 논증이라고 정의한다. 일반적으로 보다 더 단순한 프라위츠의 정의가 표준 논증의 정의로 더 자주 채택되고 있다. 덤밋의 정의에 의거한 것을 '유전적 표준 논증'이라 할 때, 프라위츠는 그의 표준 논증에 의거하든 덤밋의 유전적 표준 논증에 의거하든 타당한 논증에 대한 그와 덤밋의 정의는 외연적으로 일치한다고 주장한다.[11]

4) 논증의 타당성

타당한 논증에 대한 프라위츠의 기본적인 생각을 개략적으로 설명하자면 다음과 같다. 어떤 진술에 대한 타당한 닫힌 논증은 그 진술에 대한 완전한 정당화에 - 수학적 진술의 경우 증명에 - 해당한다. 어떤 논증이 한 진술에 대한 완전한 정당화가 되기 위해서는 그 진술의 의미에 해당하는 직접적인 정당화를 얻는 방법을 제시해

---

[11] Prawitz(2006), p. 517. 프라위츠의 주장은 덤밋에 의하면 '표준 논증이 해지되지 않은 원자문장을 전제로 지닐 수 있다'는 3절에 지적될 차이를 무시할 경우에만 옳을 것이다.

야 한다. 이는 곧 주어진 닫힌 논증이 타당하기 위해서는 그 논증이 표준 논증으로 환원될 수 있어야 한다는 것을 의미한다. 그러나 앞서 지적한대로 모든 표준 논증이 무조건적으로 타당한 것은 아니다. 많은 경우 표준 논증의 타당성은 그 부속논증이 되는 열린 논증들의 타당성에 의존한다. 열린 논증은 그 전제들에 대한 타당한 닫힌 논증이 주어지면 결론에 대한 타당한 닫힌 논증을 얻는 방법을 제시하는 경우에 타당하다. 원자문장에 대한 표준 논증은 원자체계에 의해 제시되므로, 우선적으로 정의되어야 할 타당성 개념은 어떤 논증이 원자체계 S에 상대적으로 타당하기 위한 조건이다. 이를 'S-타당성'이라 할 때, 프라위츠의 기본 생각을 S-타당성에 대한 회귀적 정의로 제시하면 다음과 같은 형태가 된다.[12] 다음의 정의에서 S는 임의의 원자체계이다.

Ⅰ. 닫힌 표준 논증은 그 직접적인 부속 논증들이 모두 S-타당할 경우, S-타당하다.

Ⅱ. 표준 논증이 아닌 닫힌 논증은 그 논증이 같은 결론에 대한 닫힌 표준 논증으로 환원될 경우, S-타당하다.

Ⅲ. 열린 논증 <D, J>는, J'이 J의 일관적인 확장이고 D'이 D의 적절한 S-사례라고 할 때, 모든 <D', J'>이 S-타당한 경우, S-타당하다.

(D의 '적절한 S-사례'란 D에 나타나는 자유변항들을 S의 닫힌 항들로 대치한 후, 해지되지 않은 전제들을 이들에 대한 S-타당한

12) Prawitz (2006) p. 515. Prawitz (2014) section 4에서 프라위츠는 마틴뢰프의 유형론에서의 증명항과 유사한 '해석된 증명항(interpreted proof term)'을 도입하여 그의 타당성 정의를 약간 수정한다. 그의 이런 수정의 주된 동기는 정당화 연산이 논증골격에 적용되는 것이 아니라 논증에 적용되게 하기 위한 것이며, 3절에서 제기될 문제는 이렇게 수정된 정의에도 마찬가지로 적용된다.

닫힌 논증들로 대치한 논증을 말한다.)

프라위츠는 초창기에 Ⅲ 대신 Ⅲ'을 고려하였다.[13]

Ⅲ' (단조 조건) 열린 논증 <D, J>는, 원자체계 S의 임의의 확장인 S'에 대해, J'이 J의 일관적인 확장이고 D'이 D의 적절한 S'-사례라고 할 때, 모든 <D', J'>이 S'-타당한 경우, S-타당하다.

(원자체계 S'=<T, R, *S'*>이 S=<T, R, *S*>의 확장이란 것은 *S*가 *S'*의 부분집합, 즉, S의 규칙들은 모두 S'의 규칙임을 뜻한다.)

슈뢰더하이스터(P. Schroeder-Heister)를 비롯한 다수의 증명론적 의미론자들은 Ⅲ보다 Ⅲ'을 선호한다.[14] 그렇지만, 필자는 3절에서 지적할 이유에서 Ⅲ'은 적절하지 않다고 생각한다.

원자체계 S에 상대적으로 논증의 S-타당성이 정의되면, 모든 원자체계 S에 대해 S-타당한 논증은 논리적으로 타당하다고 정의되며, 추론규칙은 그 적용사례들이 모두 논리적으로 타당할 경우 논리적으로 타당한 규칙으로 정의될 수 있다.

겐첸의 직관주의 일차논리의 도입규칙들이 주어지면, 제거규칙들은 정형화 정리(normalization theorem)에서 필요한 주된 환원절차에 해당하는 정당화 연산에 의해 쉽게 정당화된다. 이로부터 겐첸의 직관주의 일차논리 NJ의 제거규칙들은 모두 논리적으로 타당한 규칙이라는 점과, NJ에서의 닫힌 도출은 모두 논리적으로 타당한 논증이라는 점과, NJ의 정리들은 모두 논리적으로 타당한 문장이라는 건전성 정리가 따라 나온다. 프라위츠는 NJ의 제거규칙들은 그에 대응하는 도입규칙들에 의해 정당화될 수 있는 가장 강한 추론규칙들이라는 추측을 하였다.[15] 이 추측이 옳다면 NJ의 도입규칙들

---

[13] Prawitz (1971), p. 287.

[14] 예컨대 Schroeder-Heister (2006), de Campos Sanz, W. et al. (2013) 및 Piecha, T. et al. (2015)를 볼 것.

에 상대적으로 논리적으로 타당한 논증은 NJ의 규칙들에 의해 모두 도출된다는 완전성을 함축한다. 프라위츠의 추측은 원자문장과 원자체계를 어떻게 규정하는지, Ⅲ과 Ⅲ' 중 어느 조건을 택하는지 등의 세부적 규정에 따라 달라질 수 있다.[16] 그러나 이 글에서 우리의 논의는 S-타당성 정의의 적절성 여부에 관한 문제에 집중될 것이다.

5) 표준 논증과 정당화 연산의 예

앞 절에서의 정의들의 몇 가지 사례들을 살펴보자.[17] <표 1>에서 1.1의 tonk 도입규칙은 문장연결사 tonk의 의미를 규정하는 자체적으로 정당한 규칙으로 여겨질 수 있다. 이 규칙 및 겐첸의 ⊃와 &에 관한 도입규칙이 주어졌을 때, 1.2의 논증들은 오직 도입규칙들의 적용에 의해 구성된 논증들이므로 (유전적) 표준 논증이며 다른 정당화가 필요 없이 타당하다. 1.3의 논증은 그 마지막 단계가 ⊃I의 적용 사례이므로 표준 논증이다. 그렇지만, 프라이어(A. N. Prior)[18]의 tonk 제거규칙의 사례에 해당하는 그 첫 단계는 도입규칙의 적용이 아니므로 정당화 연산을 필요로 하지만 결핍되어 있다. 1.3에서 적용된 tonk 제거규칙에 대한 정당화연산이 있을 수 없다는 점은 그 규칙의 결론이 tonk의 의미를 규정하는 도입규칙의 전제에 의해 정당화될 수 없다는 점에 의해 조화의 원칙으로부터 따라 나온다. 마지막으로, 1.4의 열린 논증은 비표준적 논증이고,

---

15) Prawitz (1973), (2014) 등을 볼 것.

16) 기존의 논의는 대부분 Ⅲ대신 Ⅲ'(단조조건)을 채택한다. 프라위츠의 추측에 대한 긍정적 논증으로 Litland (2012), 부정적 논증으로 Piecha, T. et al. (2015)를 볼 것.

17) <표 1>과 <표 2>의 증명도식 표기 방식은 일반적인 것으로 그 설명을 위해서는 예컨대 Prawitz (1965)를 볼 것.

18) Prior (1960).

그 전제 p tonk q에 대한 닫힌 타당한 논증은 모두 p에 대한 타당한 닫힌 표준 논증으로 환원되므로, 주어진 정당화 연산 *에 의해 정당화되는 타당한 논증이다.

<표 1>

<table>
<tr><td>1.1 tonk 도입규칙</td><td colspan="2">1.2 타당한 표준 논증</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{A}{A\ \text{tonk}\ B}$</td><td>$\dfrac{\dfrac{[p]}{p\ \text{tonk}\ q}}{p \supset (p\ \text{tonk}\ q)}$</td><td>$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]}{p\ \text{tonk}\ q} \quad [r]}{(p\ \text{tonk}\ q)\ \&\ r}}{r \supset ((p\ \text{tonk}\ q)\ \&\ r)}}{p \supset (r \supset ((p\ \text{tonk}\ q)\ \&\ r))}$</td></tr>
<tr><td>1.3 타당하지 않은 표준 논증</td><td colspan="2">1.4 타당한 비표준 논증</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\dfrac{[p\ \text{tonk}\ q]}{q}}{(p\ \text{tonk}\ q) \supset q}$</td><td>$\dfrac{p\ \text{tonk}\ q}{p}\ *$</td><td>정당화 연산 *
$\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma}{p}}{p\ \text{tonk}\ q}}{p} \twoheadrightarrow \overset{\Sigma}{p}$</td></tr>
</table>

<표 2>는 삼항 문장연결사 ite의 의미를 규정하는 것으로 간주될 수 있는 도입규칙과 이에 의해 정당화되는 제거규칙들을 보여주고 있다. 이 예가 보이듯이, 프라위츠와 덤밋의 타당성 정의는 어떤 특정한 논리상항 도입규칙들만 염두에 둔 것이 아니고, 도입된 표현의 의미를 규정하는 것으로 여겨질 수 있는 도입규칙들은 모두 자체적으로 정당하며 다른 규칙들은 조화의 원칙 혹은 전도원칙에 의해 정당화될 수 있어야 타당하다. 물론 NJ의 규칙들이 주어졌다

면, ite(A,B,C)는 (A⊃B)&(¬A⊃C)로 정의될 수 있다.

<표 2>

<table>
<tr><td>ite 도입규칙</td><td colspan="2">ite 제거규칙</td></tr>
<tr><td>$$\dfrac{\begin{matrix}[A] & [\neg A]\\ \vdots & \vdots \\ B & C\end{matrix}}{ite(A,B,C)}$$</td><td>$$\dfrac{ite(A,B,C) \quad A}{B}$$</td><td>$$\dfrac{ite(A,B,C) \quad \neg A}{C}$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ite 제거규칙의 정당화</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A] & [\neg A]\\ \Sigma & \Pi \\ B & C\end{matrix}}{ite(A,B,C)} \quad \begin{matrix}\Delta\\ A\end{matrix}}{B} \quad \twoheadrightarrow \quad \begin{matrix}\Delta\\ A\\ \Sigma\\ B\end{matrix}$$
$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A] & [\neg A]\\ \Sigma & \Pi \\ B & C\end{matrix}}{ite(A,B,C)} \quad \begin{matrix}\Delta\\ \neg A\end{matrix}}{C} \quad \twoheadrightarrow \quad \begin{matrix}\Delta\\ \neg A\\ \Pi\\ C\end{matrix}$$</td></tr>
</table>

3. 사소성 문제

프라위츠와 덤밋의 정의에서 조건문 A⊃B에 대한 타당한 논증은 A를 가정으로 하고 B를 결론으로 하는 타당한 열린 논증을 필요로 한다. 그런 타당한 열린 논증은, 프라위츠의 경우, A에 대한 타당한 닫힌 논증이 주어지면 B에 대한 타당한 닫힌 논증으로 전

환될 수 있는 논증이다. 이는 조건문의 의미에 관한 BHK 설명과 유사하다. 후자에 의하면, A⊃B의 증명은 A의 증명에 적용되어 B의 증명을 산출하는 효과적인 절차이다. 그런데 BHK 설명에서의 ‘증명’과 ‘효과적인 절차’는 어떤 특정한 형식체계에서의 도출과는 독립적인 의미로 이해되어야 한다. 반면에 프라위츠의 S-타당한 논증은 특정한 원자체계 S에 상대적으로 정의되었다. 어떤 문장에 대한 증명을 그 문장에 대한 타당한 (닫힌) 논증으로 간주하고, 타당성을 귀납적으로 정의하려고 할 때, 이런 전략은 불가피해 보인다. 복합문을 형성하는 연산자를 도입하는 규칙, 따라서 그런 연산자의 의미는 원자문장의 의미와 무관하게 제시될 수 있지만, 그런 규칙들은 어떤 형식의 문장들의 증명조건을 제시할 뿐, 구체적인 문장들의 증명조건을 완전히 제시하지는 못한다. 구체적인 문장들의 증명조건이 제시되기 위해서는 원자문장의 증명조건이 타당성에 대한 귀납적 정의의 기초단계로 제시되어야 한다. 원자문장의 의미를 규정하는 역할을 하는 원자체계가 달라지면, 원자문장의 의미가 달라지므로, 원자문장의 증명조건, 즉 원자문장에 대한 타당한 논증은 원자체계에 상대적으로 제시되어야 한다고 여겨질 수 있다. 이런 점에서 증명론적 타당성 정의에서의 원자체계의 역할은 모형론적 타당성 정의에서의 모형의 역할과 유사하다. 모형론적 타당성 정의에서 원자문장의 진리값이 모형에 상대적으로 정의되어야 하듯이, 증명론적 타당성 정의에서 원자문장의 증명조건이 원자체계에 상대적으로 정의되어야 하는 것으로 보인다. 그리하여 열린 논증의 S-타당성에 관한 프라위츠의 정의는 결과적으로 그 논증의 전제들에 대한 증명들을 원자체계 S 및 다른 논리규칙들에 의해 정당화될 수 있는 수단들을 사용해 구성될 수 있는 논증들로 제한하고 있다. 특히, 원자문장에 대한 S-타당한 논증은 결과적으로 S의 추론규칙들만 사용해 구성될 수 있는 논증이어야 한다. 프라위츠의 이런 상

대화는 일견 합당해 보이지만 곧 지적할 바와 같이 열린 논증 및 조건문의 타당성에 관한 사소성 문제를 야기한다.

1) 결정 불가능한 원자문장

어떤 문장 A와 어떤 원자체계 S에 대해, A에 대한 S-타당한 닫힌 논증이 있는 경우, A를 'S-타당한 문장'이라고 하자. 검증주의적 시각에서 볼 때, S-타당한 문장은 그 의미에 의해서 참인 문장이다. 어떤 원자체계 S의 언어에 속하는 원자문장 P가 S-타당하지 않으며 그 부정 ￢P도 S-타당하지 않다고 하자. 즉, P나 ￢P를 결론으로 하는 S-타당한 닫힌 논증은 없다고 하자. 다시 말해, P는 S에 상대적으로 결정불가능한 원자문장이다. 이 경우, 프라위츠의 정의에 의하면 임의의 문장 A에 대해, P를 전제로 하고 A를 결론으로 하는 논증은 S-타당한 열린 논증이 되므로, P⊃A는 S-타당한 문장이 된다. 이는 P에 대한 S-타당한 닫힌 논증이 없으므로, P를 전제로 하고 A를 결론으로 하는 열린 논증에 대한 적절한 S-사례가 없어서, 프라위츠의 열린 논증의 S-타당성에 관한 조건 Ⅲ을 사소하게 만족하기 때문이다. 이는 명백히 잘못된 결과이다. 원자체계 S가 원자문장의 의미를 규정하는 역할을 하고, 이를 기반으로 하여 다른 도입규칙들이 복합문들의 의미를 규정하는 역할을 한다고 할 때, P가 그 의미에 의해 참인 문장이 아니라고 해서 임의의 문장이 P로부터 따라 나온다고 할 수는 없기 때문이다. 물론 ￢P가 타당한 문장인 경우는 직관주의적으로나 고전적으로나 임의의 문장이 P의 귀결이지만, 가정에 의해 ￢P도 S-타당하지 않은 문장이다.

앞서 Ⅲ의 대안으로 언급된 단조조건 Ⅲ'은 이런 문제를 피하기 위해 제안되었다.[19] 원자문장 P가 Ⅲ의 의미에서 S-타당하지 않더라도, S의 어떤 확장 S'에서 P를 공리로 택하면 Q가 S'-타당하지

19) Prawitz (1971) p. 285 참조.

않은 한 P⊃Q는 Ⅲ'의 의미에서 S-타당하지 않게 되기 때문이다. 프라위츠는 초창기에 Ⅲ'을 고려했으나 그 후 별다른 언급 없이 Ⅲ을 고수하였으며,[20] 슈뢰더하이스터를 비롯한 많은 이들은 Ⅲ'을 택한다. Ⅲ'은 직관주의 논리에 대한 크립키 모형에서의 조건문에 관한 조건과 유사하다. 그러나 원자체계가 원자문장의 의미를 규정하는 역할을 하기 위해서는 Ⅲ'은 적절한 조건이 되지 못한다. 원자문장들 간의 추론규칙이 달라지면 원자문장들의 의미 또한 달라지기 때문이다. 실제로 초창기의 프라위츠나 슈뢰더하이스터는 Ⅲ'을 고려하면서 원자체계가 정보 혹은 지식상태를 반영하는 것으로 여겼다.[21] 이는 직관주의 논리에 대한 크립키 모형(Kripke model)에서의 가능한 상태(가능세계)에 관한 직관적 해석과 유사하다. 그러나 그 경우, 원자문장의 의미가 어떻게 규정되는지는 설명되지 못한다. 슈뢰더하이스터는 덤밋과 프라위츠의 타당성 정의를 증명 개념에 의거해 의미 설명과 추론의 정당화를 꾀하는 증명론적 의미론의 고전적 형태로 간주한다.[22] 덤밋과 프라위츠의 검증주의적 시각에서 한 논리상항의 의미는 그 도입규칙에 의해 규정된다. 증명론적 의미론이 검증주의적 의미이론의 완전한 한 형태가 되기 위해서는 원자문장의 의미도 유사한 방식으로 규정된다는 점을 보일 수 있어야 한다. 덤밋과 프라위츠 모두 원자체계의 구체적인 형태에 대해서 자세히 언급하지 않았지만, 원자체계는 원자문장의 의미를 규정하는 역할을 수행해야 할 것이며, 그런 한에서 Ⅲ'은 올바른 조건이 되지 못한다.

프라위츠는 Ⅲ을 고수하면서도 앞서 언급된 결정불가능한 원자

---

20) 슈뢰더하이스터 등의 보고에 의하면, 프라위츠가 단조조건 Ⅲ'대신 Ⅲ을 고수한 이유는 '원자술어에 관한 규칙들이 정의적 역할을 한다'고 여겼기 때문이다. de Campos Sanz et al. (2013), note 5를 볼 것.

21) Prawitz (1971) 및 Piecha et al. (2014)을 볼 것.

22) Schroeder-Heister (2012) 참조.

문장에 기인하는 사소성의 문제가 어떻게 해결될 수 있는 지 설명하지 않는다. 그는 Ⅲ에 의거한 S-타당성 조건이 사소하게 성립할 수 있으므로 Ⅲ이 ‘약한’ 조건이라 한 바 있다.[23] 아마 그는 특정한 원자체계 S에 상대적인 S-타당성 개념보다는 논리적 타당성에 주된 관심이 있었고, 논리적으로 타당한 논증은 모든 원자체계 S에 상대적으로 S-타당한 논증이므로, ‘약한’ S-타당성 개념을 용인할 수 있다고 생각했는지도 모른다. 그러나 프라위츠의 S-타당성 개념은 단순히 약한 타당성 개념이 아니라, 부적절한 타당성 개념이다. S에서 결정불가능한 문장을 전제로 하는 논증을 모두 S-타당하다고 할 수는 없기 때문이다.

필자는 결정불가능한 원자문장에 기인하는 사소성 문제는 프라위츠의 표준 논증 개념을 약간 확장함으로써 해결될 수 있다고 생각한다. 2-(4)에서의 프라위츠의 타당성 정의는 결과적으로 표준 논증을 닫힌 논증으로 제한한다. 표준 논증의 외연을 닫힌 논증으로 제한하지 않고, 덤밋이 그랬던 것처럼 원자문장들을 전제로 하는 열린 논증을 포함할 수 있도록 확장하자.[24] 즉, A에 대한 표준 논증은 그 전제들이 모두 원자문장이면서, A가 원자문장인 경우 원자체계의 추론규칙만을 적용해서 얻어진 논증이며, A가 복합문인 경우 마지막 단계에 그 복합문을 도입하는 규칙의 적용에 의해 얻어진 논증이다. 그러면 결정불가능한 원자문장이 야기하는 문제는 쉽게 해결된다. P가 원자체계 S에서 결정불가능한 원자문장일 경우, P의 가정 자체가 P에 대한 표준 논증이기 때문에, P로부터 Q로의 추론이 S의 추론규칙의 적용에 의해 얻어지지 않는 한, P에 대한

---

23) Prawitz (1971) p. 285.

24) Dummett (1991) p. 261 참조. 덤밋이 결정 불가능한 원자문장에 기인하는 사소성 문제 때문에 표준 논증을 이렇게 정의한 것은 아닌 것으로 보인다. 타당성에 관한 덤밋과 그의 정의를 비교하면서, 프라위츠는 이런 차이를 무시한다. (Prawitz (2006) p. 517.)

S-타당한 논증을 Q에 대한 S-타당한 논증으로 전환하는 방법이 없으며, 따라서, P⊃Q는 S-타당하지 않다.

이렇게 확장된 표준 논증은, 비록 해지되지 않은 전제를 원자문장들에 국한하지만, 증명과 일치하지는 않는다. 어떤 논증이 문장 A에 대한 증명으로 간주되기 위해서는 A가 정당화되지 않은 전제에 의존해서는 안 될 것이므로, 그 논증은 타당한 닫힌 논증이 되어야 할 것이다. BHK 의미론을 따르면, A⊃B의 증명은 A의 증명을 B의 증명으로 전환하는 효과적 방법에 해당한다. 증명을 타당한 닫힌 논증으로 간주하면 프라위츠의 정의는 BHK 의미론에 상응한다.[25] 반면 확장된 표준 논증에 의거하면, A⊃B는 A를 그 결론으로 하고 원자문장을 전제로 지닐 수도 있는 타당한 논증을 이와 같은 전제들만 지니고 B를 결론으로 하는 타당한 논증으로 전환시킬 수 있을 때 타당한 문장이 된다. 어떤 문장이 오로지 그 의미에 의해 정당화될 수 있다면, 그 정당화, 즉 증명은 닫힌 타당한 논증이 되어야 할 것이다. 그러나 A의 정당화를 위해 언어 외적인 조건이 필요하다면, A의 정당화를 위한 논증의 역할은 제한될 수밖에 없다. 그런 문장에 대한 논증의 경우, 언어 외적 조건의 만족을 전제하는 원자문장에 의존하는 정당화, 즉 여기서의 타당한 열린 논증을 넘어서는 정당화의 역할을 요구할 수 없을 것이다.

대표적인 예로, 경험적 진술에 대한 정당화가 그 진술의 의미에 의해 구성될 수 있는 타당한 논증만으로 이루어진다고, 즉 타당한 닫힌 논증으로 이루어진다고 할 수는 없다. 표준 논증이 해지되지 않은 원자문장을 전제로 지닐 수 있게 하는 것은 증명론적 타당성 개념을 경험적 진술들에 적용할 수 있게 하기 위해서 필수적인 것으로 보인다. 경험적 진술은 그 의미를 아는 것만으로 검증되거나

---

25) 여기서 ‘상응한다’는 매우 거친 의미로 여겨져야 한다. 주석 8)에 언급된 Prawitz (2016 예정)을 볼 것.

반증될 수 있는 것이 아니다. 따라서 경험적 진술은 그 검증이 오로지 추론규칙의 적용에 의해 이루어지지는 않는다. 직접적인 경험 관찰에 의해 검증될 수 있는 문장을 원자문장으로 나타낸다고 할 때, 증명론적 타당성 개념을 경험적 진술들에 검증주의적 시각에 부합하는 방식으로 확장하기 위해서는 여기서 제안된 확장된 표준 논증에 의거하는 것이 보다 적합하다고 할 것이다.

원자체계 S의 언어로 표현될 수 있는 원자문장들이 모두 S에 상대적으로 결정 가능한 경우에는 이 절에서 제기된 문제는 발생하지 않는다. 원자체계가 원자문장의 의미를 결정하는 역할을 하며, 수학적 진술의 경우 그 증명이 경험적 관찰에 의존하지 않을 것이므로, S가 수학적 이론에 관한 원자체계라면 S의 언어에 속하는 원자문장들은 모두 S에서 결정가능 해야 한다는 주장을 고려해 볼 수 있다. 그렇지만 수학적 진술의 진리값이 그 의미에 의해 결정되고, 그 의미는 추론규칙에 의해 결정된다는 논제는 논란이 있을 뿐 아니라, 엄밀하게 논증되어야 할 논제이다. 예컨대 직관주의적으로 실수의 동일성이 결정불가능하다는 점을 염두에 둘 때, 이 논제는 성급하게 수용될 수 있는 것은 아니다. 그러나 설혹 이 논제를 받아들인다고 하더라도, 다음에서 볼 바와 같이, 산술적 타당성의 사소성 문제는 여전히 남는다.

2) 결정 불가능한 복합문장: 괴델문장과 산술적 타당성

S를 산수(arithmetic)의 원자적 기반으로 제시된 어떤 원자체계라 하고, I를 직관주의 일차논리의 도입규칙들의 집합이라 하자. S와 I에 상대적으로 타당한 문장들, 즉, 복합문 도입규칙들을 I의 규칙들로 간주했을 때 S-타당한 문장들의 집합은 S와 I의 규칙들의 적용에 의해 도출될 수 있는 문장들뿐 아니라, 이들에 의해 정당화될 수 있는 논증들의 결론들을 모두 포함한다. (그런 결론들에는 물론

S와 I에 의해 정당화될 수 있는 규칙들을 적용해 도출될 수 있는 문장들도 포함된다.) 그렇지만 직관주의 일차논리의 제거규칙들은 모두 I에 의해 정당화되어 타당한 규칙들이고, S-타당한 원자문장들은 회귀적으로 열거가능하므로, S와 I에 상대적으로 타당한 문장들의 집합은 형식화가능하다고, 즉 어떤 형식체계에서 도출 가능한 문장들의 집합과 같다고 할 수 있을 것이다. 그런 형식체계를 S+I라 하자. S는 산수의 원자적 기반으로 의도되었으므로, S+I는 일차 페아노 산수 혹은 최소한 로빈슨 산수를 포함하는 일관적인 체계라고 가정할 수 있다. 그러면 괴델의 첫 번째 불완전성 정리에 의해 S+I에서 결정 불가능한 괴델문장 G_{S+I}가 있다. G_{S+I}는, 원자문장이 아닌 보편양화, 보다 자세히는 Π_1 문장이며, S+I를 확장하는 올바른 산수체계에서 증명될 수 있지만 S+I에서는 증명도 반증도 될 수 없는 문장이다. I에 상대적으로 S-타당한 문장은 S+I에서 도출될 수 있지만, G_{S+I}는 S+I에서 도출될 수 없으므로, G_{S+I}는 I에 상대적으로 S-타당한 문장이 아니다. 즉, G_{S+I}를 결론으로 하는 I에 상대적으로 S-타당한 논증은 없다. 그러면 앞 절에서의 결정불가능한 원자문장의 경우와 마찬가지로, G_{S+I}를 전제로 하고 임의의 문장 A를 결론으로 하는 논증은[26] I에 상대적으로 S-타당하며, $G_{S+I} \supset A$는 I에 상대적으로 S-타당한 문장이 된다. 결정불가능한 원자문장이 임의의 문장을 함축한다는 것과 마찬가지로, 이는 명백히 잘못된 결과이다. 이 문제는 열린 논증에 대한 타당성 조건으로 Ⅲ대신 Ⅲ'을 택한다고 해서 해결되지 않는다. Ⅲ'에서의 S의 확장은 S의 어휘는 유지하되 원자문장들 간의 추론규칙을 확장하는 것이므로 여전히 형식체계이고, 따라서 괴델의 불완전성 정리가 적용되기 때문이다.[27]

---

26) 프라위츠의 의미에 부합하는 논증을 구성하려면, 정당화 연산을 공집합으로 간주하면 된다.

이 문제는 문장들의 S-타당성이 어떤 형식체계에서의 도출가능성과 그 외연에서 일치하는 것으로 간주되는 한 불가피하게 제기된다. 따라서 위 단락의 논증은 적절한 의미에서의 문장들의 S-타당성은 한 형식체계에서의 도출가능성과 같은 것이어서는 안 된다는 점을 보인다. 그러나 S-타당성의 정의가 원자체계 및 특정한 도입규칙들의 집합에 상대적인 것으로 이해된다면, 위의 논증은 항상 성립하는 것으로 보인다. 그런 해석 하에서는, 주어진 도입규칙들에 상대적으로 S-타당한 논증들은 항상 어떤 형식체계 T에서의 도출들과 일치하기 때문에, S가 산수의 원자적 기반과 같이 충분히 강한 체계이면 그 형식체계 T에 대한 괴델 문장을 구성할 수 있기 때문이다. 그런 괴델 문장이 참이라는 점은 직관주의적으로 타당한 논증을 통해 보여 질 수 있으므로, 그 괴델 문장에 대한 타당한 표준 논증이 있다는 점을 인정해야 한다. 그러나 그런 논증은 주어진 원자체계 S와 주어진 도입규칙들에 의해 정당화될 수 있는 논증이 아니므로, 주어진 도입규칙들에 상대적으로 S-타당한 문장이 아니다. 문제의 괴델 문장에 대한 타당한 논증은 예컨대 '반영원리(reflection principle)'라고 불리는 새로운 원칙들을 도입하거나 고차 개념들에 관한 규칙들을 도입하여 구성될 수 있다. 그러나 그런 원칙과 규칙들은, 괴델 정리에 의해, 주어진 원자체계와 도입규칙들에 의해 정당화될 수 있는 것들이 아니다. 그런 원칙들과 규칙들을 정당화하기 위해서는 새로운 개념과 새로운 도입규칙을 필요로 한다. 물론 새로운 도입규칙들과 개념에 의해 확장된 체계에 대한 새로운 괴델 문장이 있으며, 이를 결론으로 하는 타당한 논증을 구성하기 위해서는 또다시 새로운 개념과 도입규칙을 필요로 한다. 따라서 주어진 체계에서 결정불가능한 문장이 임의의 문장을 함축한다는

---

27) ω-규칙을 채택하면 완전한(complete) 형식체계를 얻을 수 있지만, ω-규칙은 원자문장들 간의 규칙이 아닐 뿐만 아니라, 전제들이 무한히 많은 논증을 수용해야하는 또 다른 문제를 낳는다.

잘못된 결과를 피하려면 논증의 정당화가 궁극적으로 의존하는 도입규칙들 전체는 고정된 외연을 지니는 것이 아니라 무한정 확장가능하다(indefinitely extensible)고 해야 할 것이다.[28]

앞서 언급한대로, 괴델 문장에 대한 형식적 증명은 흔히 반영원리를 추가하여 확장된 체계나 고차논리에서 제시된다. 반영원리란 우리가 암묵적으로 받아들이는 사항을 명시적으로 표현하여 채택한 원칙이다. 예컨대 우리가 일차 페아노 산수와 같은 형식체계를 받아들이는 경우, 그 체계에서 증명(도출)될 수 있는 문장들은 모두 참이라는 것을 암묵적으로 받아들이는 셈이다. 그러나 '일차 페아노 산수에서 도출될 수 있는 문장들은 모두 참이다'는 명제는 괴델의 두 번째 불완전성 정리에 의해 페아노 산수 내에서는 증명될 수 없다. 이런 명제를 반영하여 명시적으로 나타낸 것을 '반영원리'라 부른다. 기존에 고려된 반영원리로는 $Pr_{PA}('A') \supset A$, $\forall x(Pr_{PA}('A(x)') \supset A(x))$, $Pr_{PA}('A') \supset T('A')$ 같은 것들이 있다.[29] 주어진 원자체계의 규칙들과 복합문 도입규칙들을 모두 문장의 의미를 규정하는 역할을 하는 자체적으로 정당한 규칙으로 간주한다면, 이들에 의해 정당화될 수 있는 논증의 결론은 당연히 참이라는 점을 받아들이는 셈이다. 그러나 이 점은, 이런 규칙들이 충분히 강한 한, 주어진 규칙들에 의해 정당화될 수 없으며, 이에 대한 정당화는 새로운 도입규칙에 의거한 새로운 개념의 도입을 필요로 한다.

---

28) 덤밋은 Dummett (1963)에서 괴델의 불완전성 정리의 철학적 함축 중의 하나는 증명개념이 무한정 확장가능하다는 것이라고 주장한다. 무한정 확장가능성에 관한 덤밋의 논의에 대한 한 검토를 위해서는 정인교 (2009)를 볼 것.

29) 뢥(Löb)의 정리에 의해 첫 도식의 사례는 A가 PA에서 도출 가능한 경우에만 도출가능하다. (세 번째 식의 경우, T를 진리술어로 간주할 때) 다른 두 식이 첫 번째 식을 함축하므로, 이들도 일반적으로 PA에서 도출가능하지 않지만, 세 도식은 모두 우리가 PA를 수용하는 경우 암묵적으로 받아들이는 원칙을 나타내는 것으로 여겨진다. 반영원리에 관한 논의의 사례로는 Feferman (1991) 및 거기 언급된 참고문헌들을 볼 것.

어떤 개념과 어떤 도입규칙을 통해 반영원리를 나타내는 것이 바람직한가? 이 질문에 대한 깊이 있는 답을 추구하기 위해서는 여기서 할 수 있는 것보다 훨씬 더 철저한 검토를 필요로 하지만, 일견 한 후보는 부분적으로나마 직관주의적 진리개념을 포착하는 진리술어와 이를 도입하는 규칙이 될 것이다. 보다 일반적으로, 주어진 원자체계와 도입규칙들에 의해서는 결정 불가능하지만 참인 문장에 대한 타당한 논증은, 새로운 원자술어를 도입하는 규칙에 의해 기존 체계를 확장함으로써 구성하는 것이 가장 바람직하다고 가정하자. 이 경우, 프라위츠의 타당성 정의는 부적절하게 된다. 이는 열린 논증의 S-타당성에 대한 프라위츠의 정의는 그 전제들에 대한 S-타당한 논증이 있어야, 즉, 원자문장에 대한 추론규칙들 중에서는 오로지 기존의 S의 규칙들에만 의존해 정당화될 수 있는 논증이 있어야, 사소하지 않게 타당할 수 있기 때문이다. 가정에 의해 괴델 문장에 대한 타당한 논증은 S의 규칙들을 확장한 체계에서 구성되어야 하기 때문에, 괴델 문장에 대해 프라위츠의 의미에서 S-타당한 논증은 없다. 따라서 괴델 문장으로부터 임의의 문장으로의 타당하지 않은 추론이 프라위츠의 정의에 의하면 타당하게 되는 것이다.

괴델 문장이 참임을 보이는 논증은 이차논리와 같은 고차 논리적 수단을 통해서도 나타낼 수 있다. 그러나 비서술적인(impredicative) 고전적 이차논리는 완전히 형식화할 수 없고, 직관주의적으로 수용될 수 없을 것이다. 어쨌거나 도입규칙에 의해 포착될 수 없는 고차적 개념은 덤밋과 프라위츠의 증명론적 타당성 정의를 위해 활용될 수 있는 수단이 아니다. 도입규칙에 의해 포착될 수 있는 고차적 개념에 의존하여 괴델 문장이 참임을 보이는 논증을 구성할 수 있고, 그렇게 하는 것이 가장 바람직하다고 가정하자. 이 경우, 프라위츠의 정의를 고수하면서 사소성 문제를 피하

기 위해서는, 그의 S-타당성 개념이 원자체계 S에 대해서는 상대적이지만 어떤 고정된 도입규칙들의 집합에 상대적인 것으로 이해되어서는 안 된다. 고정된 도입규칙들과 S에 상대적인 것으로 이해되면 S-타당성이 한 형식체계에서의 도출가능성과 일치하게 되기 때문이다. 이런 해석 하에서는, 복합문 도입규칙 혹은 논리상항 도입규칙이라는 절대적 개념, 즉, 어떤 고정된 논리상항 도입규칙들의 집합이 아니라, 무한정 확장 가능한 논리상항 도입규칙들의 집합을 전제하고, 프라위츠의 S-타당성 개념은 원자체계 S에 대해서만 상대적인 것으로 이해되어야 한다.

덤밋은 그의 타당성 정의가 주어진 도입규칙들에 대해 상대적이라는 점을 명시적으로 언급하지만,[30] 프라위츠는 S-타당성이 원자체계 S에 상대적이라는 점을 명시할 뿐 특정한 논리상항 도입규칙들에 상대적이라고 하지는 않는다. 따라서 프라위츠의 정의는 위 단락에 설명된 방식으로 해석될 수 있는 여지가 있다. 그러나 그 경우, 위에서 언급된 대로 그의 정의가 논리상항에 대한 어떤 고정된 도입규칙들의 집합에 의존해서는 안 되므로, 무한정 확장가능한 논리상항 도입규칙들의 집합을 전제해야 하며, 이를 위해서는 도입규칙의 개념을 보다 엄밀히 하는 것이 필수적이다.[31] 또한 괴델 문장에 대한 표준 논증이 새로운 논리상항 도입규칙을 도입해서 제시되는 것이 가장 바람직하다는 가정을 지지할 만한 논거가 있을지도 의심스럽다.

---

30) Dummett (1991) p. 264. 물론 덤밋이 여기서 고려하는 문제와 관련해서 이런 언급을 하는 것은 아니다. 아마 그의 언급은 증명론적으로 타당한 논증이 어떤 도입규칙들이 주어졌느냐에 따라 달라진다는 점을 강조하기 위해서일 것이다.

31) 어떤 규칙이 도입된 표현을 정의하는 역할을 하는 도입규칙이 되기 위한 조건이 무엇인지와 관련된 문제에 관한 논의를 위해서는 정인교 (2003)를 참조할 것.

4. 증명론적 타당성 정의에 대한 수정안

앞 절에서의 문제제기와 진단이 옳은 방향이라면, 프라위츠의 증명론적 타당성 정의는 보다 일반화되는 것이 바람직하다. 우선 결정 불가능한 원자문장에 기인하는 사소성 문제를 피하기 위해서는, 표준 논증의 필요조건을 닫힌 논증으로 제한할 것이 아니라 그 초기 전제들이 원자문장인 열린 논증도 표준 논증이 될 수 있도록 일반화되어야 할 것이다. 또한 결정 불가능한 복합문에 기인하는 사소성 문제를 피하기 위해서는, S-타당성이 S의 규칙들에 상대적인 것으로 간주되지 않는 것이 바람직하다. 이는 물론 무한정 확장가능한 원자적 도입규칙들의 집합을 전제한다. 그러나 앞 단락의 논증이 옳다면, 원자적 도입규칙들의 집합이나 논리상항 도입규칙들의 집합 중 최소한 하나는 무한정 확장가능하다는 점을 전제해야 괴델 문장에 기인하는 증명론적 타당성의 사소성 문제를 피할 수 있다. 프라위츠의 타당성 정의를 논리상항 도입규칙들의 집합이 무한정 확장가능하다는 점을 전제하는 것으로 해석한다면, 여기서의 제안의 전제가 프라위츠의 제안의 전제보다 크게 더 부담스러울 것 같지는 않다. 어떤 표현이 논리상항이기 위한 엄밀한 기준을 우리가 아직 가지고 있지 못하기 때문에 더욱 그러하다. 물론 프라위츠의 제안에서나 여기의 제안에서나 어떤 규칙이 도입규칙이기 위한 조건을 엄밀히 하는 일은 중요한 과제이다. 도입규칙의 개념이 만족스럽게 주어졌다는 가정 하에서 표준 논증 및 논증의 S-타당성에 대한 여기서의 제안을 보다 분명히 제시하면 다음과 같다.

우선 원자체계는 원자식을 구성하는 기술적 표현들(descriptive expressions)과 원자식 도입규칙들로 이루어지며, 논증은 프라위츠의 정의와 같이 논증골격과 정당화 연산들의 집합의 순서쌍으로 이루어진다.

S가 어떤 원자체계이고, A는 그 기술적 표현들이 S의 그것들로 이루어진 문장이라 할 때, A를 그 결론으로 하는 논증 Σ는 다음 둘 중 한 조건을 만족하는 경우 표준 논증이다: (i) Σ=<A, {}>이며 A는 원자문장이다. (즉, Σ는 원자문장 A의 가정에 해당한다.) (ii) Σ의 마지막 추론단계는 도입규칙의 적용에 해당하며, Σ의 해지되지 않은 전제들이 있는 경우 그 전제들은 모두 S의 기술적 표현들에 의해 구성된 원자문장들이다.

S가 어떤 원자체계이고 Σ가 거기 나타난 원자식들이 모두 S의 언어로 표현되는 어떤 논증일 때,

(i) Σ가 표준 논증인 경우, Σ의 직접적인 부속논증들이 모두 S-타당한 논증일 때, Σ는 S-타당하다.
(ii) Σ가 비표준 논증이되 닫힌 논증이거나 그 전제들이 원자문장들일 때, Σ가 Σ와 같은 전제들과 결론을 지니는 표준 논증으로 환원될 때, Σ는 S-타당하다.
(iii) Σ=<D, J>가 원자문장이 아닌 전제들을 지니는 경우, J'이 J의 일관적인 확장이고 D'이 D의 적절한 S-사례라고 할 때, 모든 <D', J'>이 S-타당한 논증인 경우, Σ는 S-타당하다.

(D의 ‘적절한 S-사례’란 D에 나타나는 자유변항들을 S의 닫힌 항들로 대치한 후, 해지되지 않은 전제들을 이들에 대한 S-타당한 논증들로 대치한 논증을 말한다.)

이 S-타당성의 정의는 다음과 같이 단순화될 수 있을 것이다.

표준 논증은 그 직접적인 부속논증들이 모두 S-타당할 경우, S-타당하다.

임의의 논증은, 그 적절한 S-사례들이 모두 같은 전제들과 결론을 지니는 S-타당한 표준 논증으로 환원될 수 있을 경우, S-타당하다.

참고문헌

정인교 (1999), “조화와 보존적 확장”, 『철학연구』 45, pp. 289-303.

정인교 (2003), “자체적으로 정당한 규칙과 논리상항의 의미”, 『논리연구』 6 (2), pp. 1-22.

정인교 (2007a), “논리적 추론에 관한 덤밋의 증명론적 정당화”, 『철학적 분석』 16, pp. 21-48.

정인교 (2007b), “직관주의 논리의 증명론적 의미론”, 『철학연구』 79, pp. 165-186.

정인교 (2009), “무한정 확장가능성과 양화”, 『철학연구』(고려대) 38, pp. 213-249.

De Campos Sanz, W., Piecha, T. and Schroeder-Heister, P. (2013), “Constructive Validity, Admissibility of Rules and the Validity of Peirce's Law”, *Logic Journal of IGP* 22 (2), pp. 297-308.

Dummett, M. (1963), “The Philosophical Significance of Gödel's Theorem”, in Dummett, M. (1980) *Truth and Other Enigmas*, pp. 186-201, Harvard Univ. Pr.

Dummett, M. (1991), *The Logical Basis of Metaphysics*, Harvard Univ. Pr.

Feferman, S. (1991), “Reflecting on Incompleteness”, *The Journal of Symbolic Logic* 56, No. 1, pp. 1-49.

Litland, J. (2012), *Topics in Philosophical Logic*, Ph. D thesis, Harvard University.

Piecha, T., de Campos Sanz, W. and Schroeder-Heister, P. (2015), “Failure of Completeness in Proof-Theoretic Semantics”, *Journal of Philosophical Logic* 44, pp. 321-335.

Prawitz, D. (1965), *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*,

Almquivist & Wiksell.
Prawitz, D. (1971), "Ideas and Results in Proof Theory", in J. E. Fenstad (ed.) *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, pp. 235-307, N-H.
Prawitz, D. (1973), "Towards a Foundation of a General Proof Theory", in Suppes, P. et al. (eds.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV*, pp. 225-250, N-H.
Prawitz, D. (1974), "On the Idea of a General Proof Theory", *Synthese* 27, pp. 63-77.
Prawitz, D. (1985), "Remarks on Some Approaches to the Concept of Logical Consequence", *Synthese*, 27., pp. 153-171.
Prawitz, D. (2005), "Logical Consequence: A Constructivist View", in S. Shapiro (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, pp. 671-695, Oxford Univ. Pr.
Prawitz, D. (2006), "Meaning Approached via Proofs", in R. Kahle and P. Schroeder-Heister (eds.) *Proof-Theoretic Semantics, Special Issue, Synthese* 146, pp. 507-523.
Prawitz, D. (2007), "Pragmatist and Verificationist Theory of Meaning", in Auxier, R. and L. Hahn (eds.) *The Philosophy of Michael Dummett*, pp. 455-481, Open Court.
Prawitz, D. (2014), "An Approach to General Proof Theory and a Conjecture of a Kind of Completeness of Intuitionistic Logic Revisited", in Pereira, L. C. et al. (eds.) *Advances in Natural Deduction*, pp. 269-279, Springer.
Prawitz, D. (2015), "Explaining Deductive Inference", in Wansing, H. (ed.) *Dag Prawitz on Proofs and Meaning*, pp. 65-100, Springer.
Prawitz, D. (2016 예정), "On the Relation Between Heyting's and

Gentzen's Approaches to Meaning”, to be published in Piecha, T. and Schroeder-Heister, P. (eds.) *Advances in Proof-Theoretic Semantics*.

Prior, A. N. (1960), “The Runabout Inference Ticket”, *Analysis* 21, pp. 38-39.

Schroeder-Heister, P. (2006), “Validity Concepts in Proof-theoretic Semantics”, *Synthese* 148, pp. 525-571.

Schroeder-Heister, P. (2012), “Proof-Theoretic Semantics”, in Zalta, E. (ed.) the Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/proof-theoretic-semantics/.

Troelstra A. S. and Van Dalen, D. (1988), *Constructivism in Mathematics*, Vol. I, N-H.

고려대학교 철학과

Department of Philosophy, Korea University

ichung@korea.ac.kr

부록 | Abstracts

ARTICLE ABSTRACTS

The triviality problem in proof-theoretic validity

Inkyo Chung

An important component in Prawitz's and Dummett's proof-theoretic accounts of validity is the condition for validity of open arguments. According to their accounts, roughly, an open argument is valid if there is an effective method for transforming valid arguments for its premises into a valid argument for its conclusion. Although their conditions look similar to the proof condition for implication in the BHK explanation, their conditions differ from the BHK account in an important respect. If the premises of an open argument are undecidable in an appropriate sense, then that argument is trivially valid according to Prawitz's and Dummett's definitions. I call this ‘the triviality problem’. After a brief exposition of their accounts of proof-theoretic validity, I discuss triviality problems raised by undecidable atomic sentences and by Gödel sentence. On this basis, I suggest an emendation of Prawitz's definition of validity of argument.

Key Words: Proof-theoretic validity, Proof-theoretic semantics, Validity of open argument, Undecidable premise, Dag Prawitz, Michael Dummett.