

여유자유도를 가진 3-SPS/S 병렬 메커니즘의 등각 기하대수를 이용한 기하학적 특이점 회피

Geometric Singularity Avoidance of a 3-SPS/S Parallel Mechanism with Redundancy using Conformal Geometric Algebra

김제석¹, 정진한¹, 박장현^{1,✉}

Je Seok Kim¹, Jin Han Jeong¹, and Jahng Hyon Park^{1,✉}

¹ 한양대학교 미래자동차공학과 (Department of Automotive Engineering, Hanyang University)
✉ Corresponding author: jpark@hanyang.ac.kr, Tel: +82-2-2220-0448

Manuscript received: 2014.8.7 / Revised: 2015.2.6 / Accepted: 2015.2.16

A parallel mechanism with redundancy can be regarded as a means for not only maximizing the benefits of parallel mechanisms but also overcoming their drawbacks. We proposed a novel parallel mechanism by eliminating an unnecessary degree of freedom of the configuration space. Because of redundancy, however, the solution for the inverse kinematics of the developed parallel mechanism is infinite. Therefore, we defined a cost function that can minimize the movement time to the target orientation and found the solution for the inverse kinematics by using a numerical method. In addition, we proposed a method for determining the boundary of the geometric singularity in order to avoid singularities.

Key Words: Inverse kinematics (역기구학), Geometric singularity (기하학적 특이점), 3-SPS/S parallel mechanism (3-SPS/S 병렬 메커니즘), Redundancy (여유자유도), Conformal geometric algebra (등각기하대수)

기호설명

\mathbf{O} = the position of spherical joint on the 1-S subchain
 \mathbf{B}_0 = the center position of moving platform
 $\mathbf{O} (X_o, Y_o, Z_o)$ = base coordinate system fixed on \mathbf{O}
 $\mathbf{B} (X_B, Y_B, Z_B)$ = output coordinate system fixed on \mathbf{B}_0
 α = the offset angle between axis X_o and axis X_B
 β_i = the angle between axis X_o and point \mathbf{A}_i
 γ_i = the angle between axis X_B and point \mathbf{B}_i
 d_A = the distance between points \mathbf{O} and \mathbf{A}_0
 d_B = the distance between points \mathbf{O} and \mathbf{B}_0

1. 서론

대부분의 메커니즘은 넓은 작업공간(workspace)과 쉬운 조작성(manipulability)이라는 큰 장점을 바탕으로 직렬형으로 설계되었다. 하지만 직렬 메커니즘은 낮은 강성으로 큰 하중에 취약하며 정밀도가 낮은 단점을 가지고 있다. 병렬 메커니즘은 강성과 정밀도, 그리고 가반하중을 크게 향상시킬 수 있는 장점이 있다. 하지만 제한된 작업공간으로 인해 높은 정밀도가 요구되는 작업에만 제한적으로 사용되어 왔다.¹

기존의 병렬형 메커니즘이 가지는 구조적 단점에 대해 여유자유도를 가지는 병렬형 메커니즘은 대안이 될 수 있다. 여유자유도는 작업공간의 자유도보다 기구의 자유도가 더 큰 경우로 정의되며, 추가된 자유도로 인하여 말단 장치를 주어진 경로로 추종하면서 부가적인 작업을 구현할 수 있게 된다.

Lee와 Kim의 연구²에 따르면, 여유자유도를 가지는 병렬형 메커니즘은 아래와 같이 세가지로 구분한다.

- 기존 시스템의 부속체인에 추가적인 구동기를 추가한 메커니즘⁶
- 기존 시스템의 수동 관절을 능동 관절로 교체한 메커니즘^{3,4}
- 기존의 시스템에 추가적인 부속체인을 추가한 메커니즘^{7,8}

대표적으로 Wang⁶ 등은 기존의 부속체인에 하나의 구동기를 추가하여 해석학적 특이점에 대해 회피할 수 있는 방법을 고안하였고, Kurtz⁷ 등과 Zhang⁸ 등은 시스템이 필요한 자유도보다 하나 많은 부속체인을 추가하는 방법을 연구하였다. 하지만 기존의 연구들은 부속체인에서 추가적인 자유도를 부가하였기 때문에, 자체운동(self-motion)은 불가능하다.

자체운동은 말단 장치의 운동에 영향을 주지 않는 관절운동으로 정의되며, 특이점 회피, 운동에너지 최소화 등 다양한 문제를 해결할 수 있게 된다. 이러한 자체운동 특성을 이용하여, Park⁵ 등은 3개의 회전 자유도 중에서 하나의 자유도를 여유자유도로 정의한 새로운 3-SPS/S 병렬 메커니즘을 처음 제안하였다. 이 방법은 미사일 발사대와 같이 요구되는 자유도가 오직 두 개의 회전 자유도(yaw and pitch)만 필요한 경우, 목표자세로의 이동시간을 최소화할 수 있다.

본 논문은 기존의 연구를 발전시켜, 목표자세로의 이동시간을 최소화하는 동시에 기하학적 특이점을 회피할 수 있는 역기구학 해법을 제안한다.

기하학적 특이점은 기계적 구속조건에 의해 발생되며, 기계적 구속조건은 기하학적인 방법을 통해 찾을 수 있다. 기존의 연구⁹는 주로 3차원 유클리드 공간(Euclidean space) 상에서 구속조건을 찾고자 하였으나, 복잡한 해법으로 인해 작업공간을 해석하기 위한 용도로 제한적으로 사용되었다. 이에 반해 본 논문에서는 3차원이 아닌 5차원의 등각 공간(conformal space) 상에서 기계적 구속조건

Table 1 List of conformal geometric entities

Entity	IPNS	OPNS
Point	$\mathbf{P} = \mathbf{x} + 0.5\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$	
Sphere	$\mathbf{S} = \mathbf{P} - 0.5r^2\mathbf{e}_\infty$	$\mathbf{S}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge \mathbf{P}_4$
Plane	$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{n} + d\mathbf{e}_\infty$	$\boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty$
Circle	$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2$	$\mathbf{Z}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3$
Line	$\mathbf{L} = \boldsymbol{\pi}_1 \wedge \boldsymbol{\pi}_2$	$\mathbf{L}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty$
Point-pair	$\mathbf{PP} = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2 \wedge \mathbf{S}_3$	$\mathbf{PP}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2$

의 경계점을 등각 기하대수(conformal geometric algebra)로 손쉽게 찾을 수 있는 방법을 제안한다. 이 기계적 구속조건에 경계점을 이용하면 기하학적 특이점이 발생하지 않은 영역을 찾을 수 있고, 이 영역을 좋은 자세 가능 영역으로 정의하여 역기구학을 위한 해 영역(solution region)으로 제한한다. 그렇게 함으로써 기하학적 특이점으로 인한 작업 공간이 제한되는 것을 보완한다.

2장에서는 문제를 설정하고, 3장에서는 여유자유도 역기구학 문제의 해법을 기술하고, 4장에서는 제안하는 특이점 회피 알고리즘을 시뮬레이션을 통하여 효율성을 보이도록 하겠다.

2. 여유자유도를 가진 3-SPS/S 병렬 메커니즘

2.1 등각 기하대수

병렬 메커니즘의 복잡한 형상으로 인해 유클리드 공간 상에서 해석하는 것은 어렵다. 그러나 등각 기하대수를 이용하면 보다 편하게 해석할 수 있다. 등각 기하대수는 Quaternion, Projective Geometry, Lie Algebra 등 다양한 수학적 이론을 하나로 통합하여 이해하기 쉽게 만든 수학적 언어로서 로봇공학,¹⁰⁻¹² 컴퓨터 그래픽스^{13,14} 등 다양한 분야에서 새로운 방법으로 주목을 받고 있다. 등각 기하대수는 3차원 유클리드 기하대수에서 두 개의 기저벡터를 추가하여 5차원으로 확장시킨 이론으로 5개의 기저벡터들 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_0)$ 에 의해 정의된다. 추가된 기저벡터 \mathbf{e}_0 는 3차원 공간의 원점을 표현하고, \mathbf{e}_∞ 는 무한한 곳에서의 점을 표현한다. 등각 기하대수의 주요 특징은 Table 1과 같이 직선, 평면, 구, 원 등의 다양한 기하학적 요소들을 직관적으로 표현할 수 있고, 이러한 기하학적인 요소들은 내적, 외적, 그리고 기하학적 곱에 의해 하나의 대수 형식으로 표현이 가능한 장점이

있다.

등각 기하대수와 관련된 상세한 내용은 Hildenbrand의 논문^{15,16}을 참조하기 바란다.

2.2 설계 변수

여유자유도를 가진 3-SPS/S 병렬 메커니즘은 지면에 고정된 기저플랫폼(base platform)과 직교 공간 상에서 회전만이 가능한 이동플랫폼(moving platform)으로 구성된다. 그리고 이동플랫폼은 3-SPS 부속체인의 직동 관절(prismatic joint)에 의해 구동되며, 1-S 부속체인에 의해 움직임이 제한된다.

Fig. 1에서 보듯이 기저플랫폼에 놓인 세 개의 구형 관절은 반경이 r_A 인 원 상에 각 β_i 의 간격으로 놓여있으므로, 기저플랫폼 상의 구형 관절의 위치 A_i ($i=1,2,3$)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= r_A c_{\beta_i} \mathbf{e}_1 + r_A s_{\beta_i} \mathbf{e}_2 - d_A \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{A}_i &= \mathbf{a}_i + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

이동플랫폼에 놓인 세 개의 구형 관절은 반경이 r_B 인 원 상에 각 γ_i 간격으로 놓여있고, X_C 축에 대해 각 α 만큼 회전된 위치에 존재하므로, 이동플랫폼 상의 구형 관절의 위치 B'_i ($i=1,2,3$)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i &= r_B c_{(\alpha+\gamma_i)} \mathbf{e}_1 + r_B s_{(\alpha+\gamma_i)} \mathbf{e}_2 + d_B \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{B}'_i &= \mathbf{b}_i + \frac{1}{2} \mathbf{b}_i^2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_0 \end{aligned} \quad (2)$$

l_i 는 i 번째 SPS 부속체인에서 직동 관절의 관절 변수로서 점 A_i 에서부터 점 B'_i 까지의 거리를 나타내고, 등각 기하대수에서 두 점 사이의 거리는 다음과 같이 표현된다.

$$l_i = \sqrt{-2(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}'_i)} \quad (3)$$

2.3 기구학적 관계식

기존의 3-SPS/S 병렬 메커니즘에서 요구되는 출력 공간의 자유도가 오직 두 개의 회전 자유도(yaw and pitch)만 필요한 경우, ZYZ 오일러 각(ϕ, θ, ψ) 중에서 각 ψ 를 여유자유도로 정의할 수 있다. 그러므로 여유자유도를 가지는 3-SPS/S 병렬 메커니즘의 출력 공간은 일반적인 출력 공간의 6개 변수 중 2개만으로 구성된다: $\tilde{\mathbf{u}} = [\phi, \theta]^T$.

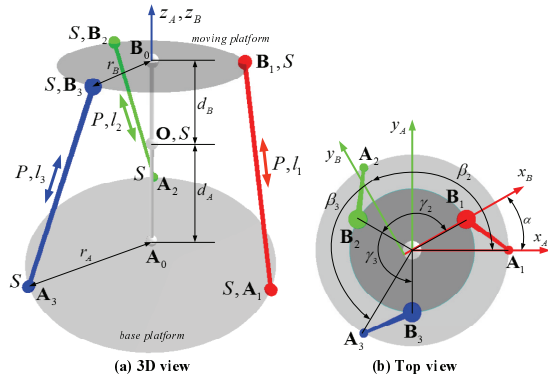


Fig. 1 3-SPS/S parallel mechanism with its design parameters. “S” and “P” denote a spherical joint, and a prismatic joint, respectively

기구학적 여유자유도로 인해 Z_B 축을 기준으로 각 ψ 의 변화에 따라 자체운동이 가능하므로 점 B_i 는 항상 원 C_B 상에 존재한다.

$$C_B = \mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{B}_2 \wedge \mathbf{B}_3 \quad (4)$$

이동플랫폼의 자세가 주어질 때, 출력좌표계의 자세 \mathbf{R}_i 는 각 ψ 에 관한 함수로 등각 기하대수의 Rotor에 의해 표현된다.

$$\mathbf{R}_i(\psi) = \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{z,\psi}(\psi) \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{R}_{z,\phi}$ 는 Z_B 축을 기준으로 각 ϕ 만큼의 회전을, $\mathbf{R}_{y,\theta}$ 는 Z_B 축을 기준으로 각 θ 만큼의 회전을, $\mathbf{R}_{z,\psi}$ 는 Z_B 축을 기준으로 각 ψ 만큼의 회전을 표현하는 Rotor이다.

그리고 이동플랫폼의 i 번째 구형 관절까지의 위치 B_i 는 기하학적 곱에 의해 표현된다.

$$\mathbf{B}_i(\psi) = \mathbf{R}_i(\psi) \mathbf{B}'_i \tilde{\mathbf{R}}_i(\psi) \quad (6)$$

식(6)을 식(3)에 대입하여 관절 변수 l_i 를 각 ψ 에 관한 함수로 정의하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} l_i^2(\psi) &= d_A^2 + d_B^2 + r_A^2 + r_B^2 + 2d_A d_B \cos(\theta) \\ &\quad + d_B r_A \sin(\beta_i - \phi - \theta) \\ &\quad + d_A r_B \sin(\alpha + \gamma_i + \psi - \theta) \\ &\quad - 0.5 r_A r_B \cos(\alpha + \beta_i + \gamma_i + \psi - \phi - \theta) \\ &\quad - r_A r_B \cos(\alpha - \beta_i + \gamma_i + \psi - \phi - \theta) / 2 \\ &\quad + r_A r_B \cos(\alpha + \beta_i + \gamma_i + \psi - \phi) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 & -r_A r_B \cos(\alpha - \beta_i + \gamma_i + \psi + \phi) \\
 & -d_B r_A \sin(\beta_i - \phi - \theta) \\
 & -d_A r_B \sin(\alpha + \gamma_i + \psi + \theta) \\
 & -r_A r_B \cos(\alpha + \beta_i + \gamma_i + \psi - \phi + \theta) / 2 \\
 & -r_A r_B \cos(\alpha - \beta_i + \gamma_i + \psi + \phi + \theta) / 2
 \end{aligned}$$

병렬 메커니즘의 각 링크는 관절 좌표계로 표현되기 때문에 메커니즘을 제어하기 위해서는 로봇 말단의 작업 공간을 관절 공간으로 표현해야 한다.

$$\begin{aligned}
 \bar{u} \in R^m & : \text{Output variable} \\
 \bar{l} \in R^n & : \text{Joint variable}
 \end{aligned} \tag{8}$$

ϕ, θ 는 출력 변수로서 역기구학 해석에 앞서 주어지고, 관절 변수 l_i 는 여유자유도 ψ 에 의해 결정된다. 그러므로 각 관절 변수에서 출력 변수로 사상시키는 f 를 정의하면 다음과 같이 기구학적 관계식을 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f: R^n & \rightarrow R^m \\
 \bar{u} & = f(\bar{l})
 \end{aligned} \tag{9}$$

3. 역기구학 해석

3.1 비용함수의 정의

여유자유도를 가지는 로봇은 다양한 형태로 운동이 가능하다는 장점으로 인해 작업자가 원하는 작업 목적에 부합하도록 역기구학을 해석할 수 있다. 본 논문에서는 무한의 해가 존재하는 여유자유도 문제에서 최적해를 찾기 위해, 목표 자세로의 이동 시간을 최소화하도록 목적함수를 선정하였다. 이를 통해 높은 강성 등 병렬형 구조의 장점을 유지하면서 직렬형 구조에 비해 빠른 이동성 등의 이점을 가질 수 있기 때문이다.

목표 자세로의 이동 시간 최소화는 곧 각 체인의 직동 관절의 변위량을 최소화와 마찬가지로 비용함수 f_{cost} 를 다음과 같이 정의하였다.

$$f_{\text{cost}}(\psi) = \max_{-\pi \leq \psi < \pi} \{ \Delta l_i(\psi) \} \tag{10}$$

여기서, $\Delta l_i(\psi) = |l_i(\psi) - l_{i,\text{old}}|$ 이고, $l_{i,\text{old}}$ 는 현재의 i 번째 링크 길이이다.

만약 임의의 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 연속이면

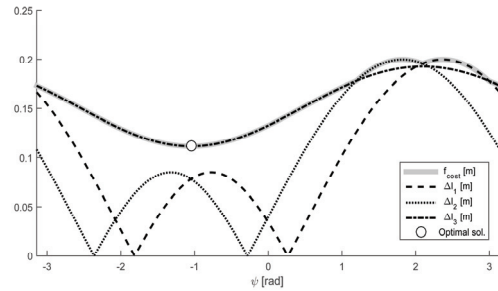


Fig. 2 Graph of the change in the cost function

$$\max(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2} \tag{11}$$

이므로, 식(10)는 다음과 같은 연속함수로 표현된다.¹⁷

$$\begin{aligned}
 f_{\text{cost}}(\psi) & = \max_{-\pi \leq \psi < \pi} (\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3) \\
 & = \frac{2\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + 2|\Delta l_2 - \Delta l_3|}{4} \\
 & \quad + \left| \frac{\Delta l_2 - 2\Delta l_1 + \Delta l_3 + |\Delta l_2 - \Delta l_3|}{4} \right|
 \end{aligned} \tag{12}$$

따라서 링크의 최대 변위량으로 표현되는 비용함수 f_{cost} 를 최소화함으로써 목표자세로의 이동시간을 감소시킬 수 있다.

3.2 역기구학 해

Fig. 2에서 보듯이 비용함수 f_{cost} 는 비선형 방정식이므로 제안하는 메커니즘의 역기구학은 비선형 최적화 문제이다. 일반적으로 수치해법을 이용하여 근사적인 최적해를 찾을 수 있다. 본 논문에서는 황금분할탐색법과 2차 보간법을 결합하여 사용하였다. 황금분할탐색법은 연산량은 많지만 신뢰도가 높고, 2차 보간법은 신뢰도는 낮으나 연산량이 적은 특징을 가진다. 이 두 방법을 결합함으로써 장점은 부각시키고, 단점을 상쇄시킬 수 있다.¹⁸

4. 기하학적 특이점 회피

여유자유도 로봇이 가지는 장점은 일반적인 역기구학과 달리 주어진 작업에 대해 무수히 많은 관절공간의 해를 가지고 있으므로 기하학적 특이

점에 대해서도 회피가 가능하다. 기하학적 특이점은 알고리즘적 특이점과 다르게 다음과 같은 기계적 구속조건에 의해 발생된다.^{19,20}

- (1) 링크 길이의 제한
- (2) 구형 관절의 이동범위 제한
- (3) 링크 간의 간섭

기하학적 특이점이 발생하게 되면, 기구에 물리적인 손상이 가해지는 등의 피해가 발생된다. 그렇기 때문에 이 기구학적 특이 현상을 회피하기 위한 방법이 필요하다. 기하학적 특이점을 정확히 알고 있으면, 비용함수의 해 탐색 범위를 감소시켜 기하학적 특이점을 회피하는 방법을 사용할 수 있다. 하지만 이 기하학적 특이점에 대한 경계점을 정확히 알기는 어렵다. 그러나 기하학적인 방법을 통해 근사적으로 기하학적 특이점의 경계점을 알 수 있다. 다만, 링크 길이의 변위량을 최소화하기 때문에, 기하학적 특이점 중에서 (3)보다는 (1)과 (2)가 발생할 가능성이 높다.

이번 장에서는 구속조건 중 (1)과 (2)의 경계점을 기하학적으로 찾을 수 있는 방법을 제안한다.

4.1 링크 길이의 제한

직동 구동기(prismatic actuator)는 기계적으로 최대 길이가 제한될 수 밖에 없다. 그러므로 3-SPS 부속체인의 링크 길이 $l_i(i=1,2,3)$ 는 식과 같은 구속조건을 만족해야 한다.

$$l_{i,min} \leq l_i(\psi) \leq l_{i,max} \quad \text{for } i=1,2,3 \quad (13)$$

여기서 $l_{i,max}$ 과 $l_{i,min}$ 는 링크 i 의 최대, 최소 링크 길이를 의미한다.

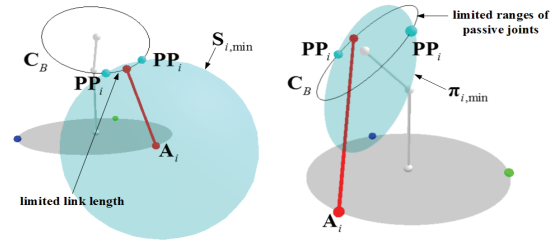
이러한 구속조건을 회피하려면, 구속조건을 경계점을 정확히 아는 것이 중요하다. 본 구속조건을 의미하는 구와 이동플랫폼이 만나는 두 점이다. 이는 등각 기하대수를 이용하여 기하학적인 방법으로 찾을 수 있다.

우선 $S_{i,max}$ 는 반지름이 $l_{i,max}$ 이고, 중심이 점 A_i 인 구이고, $S_{i,min}$ 은 반지름이 $l_{i,min}$ 이고, 중심이 점 A_i 인 구라고 하자.

$$S_{i,max} = A_i - 0.5 l_{i,max}^2 e_\infty \quad (14)$$

$$S_{i,min} = A_i - 0.5 l_{i,min}^2 e_\infty \quad (15)$$

구 $S_{i,max}$ 혹은 $S_{i,min}$ 과 이동 플랫폼 상의 원 C_B



(a) Limited Link lengths (b) Limited ranges of passive joints

Fig. 3 Geometric singularity using geometric approach

가 교차할 때 생성되는 쌍점(point-pair) $PP_{i,max}$ 혹은 $PP_{i,min}$ 은 제한된 링크 길이의 경계점을 의미한다.

$$PP_{i,max} = S_{i,max} \wedge C_B^\circ \quad (16)$$

$$PP_{i,min} = S_{i,min} \wedge C_B^\circ \quad (17)$$

쌍점 PP_i 는 다음과 같이 기하학적 특이점의 양 경계점으로 분해할 수 있다.²¹

$$B_{ij} = \frac{-PP_i \pm \sqrt{PP_i \cdot PP_i}}{e_\infty \cdot PP_i} \quad (18)$$

두 기하학적 요소가 교차하는 경우 기하학적 특이점이 발생하는 영역을 위와 같이 찾을 수 있다. 하지만 교차하지 않는 경우에는 특이점이 발생되지 않는다. 따라서 교차하는지에 대해 판별할 필요성이 있다. 두 기하학적 요소, 원 C_B 와 구 S_i 가 교차하는지에 대한 판단은 $B = (C_B \wedge S_i)^\circ$ 의 평방 놈(squared norm) $B^2 = \|B\|^2$ 에 의해 아래와 같이 판별할 수 있다.¹⁴

- $B^2 > 0$ 이면, C_B 와 S_i 는 두 점에서 교차한다.
- $B^2 = 0$ 이면, C_B 와 S_i 는 한 점에서 접한다.
- $B^2 < 0$ 이면, C_B 와 S_i 는 교차하지 않는다.

만약 $\|PP_{i,max}\|^2 \leq 0$ 이고 $\|PP_{i,min}\|^2 \leq 0$ 이라면, 여유자유도 ψ 가 $[-\pi, \pi]$ 의 범위 내에서 기하학적 특이점이 발생되지 않음을 의미한다. 반대의 경우, Fig. 3(a)와 같이 쌍점 PP_i 사이의 영역은 기하학적 특이점이 발생됨을 의미하고, 쌍점 내부에 둘러싸인 영역은 기하학적 특이점이 발생하는 영역이다.

4.2 구형 관절의 이동범위 제한

이동 플랫폼 상의 점 B_i 와 기저플랫폼 상의 점 A_i 는 구형 관절로 이루어져 있다. 이 구형 관절은

기계적인 구속조건에 의해 링크 i 와 이동플랫폼 사이에 일정 각도 이상은 움직일 수 없는 영역이 형성되므로 다음과 같은 구속조건을 만족해야 한다.²²

$$\delta_{min} < \delta_i \text{ for } i=1,2,3 \quad (19)$$

여기서, δ_{min} 은 구형 관절의 최소 작동 범위이고, δ_i 는 링크 i 와 이동플랫폼 사이 각이다.

마찬가지로 구속조건을 회피하려면, 구속조건 의 경계점을 정확히 아는 것이 중요하다. 본 구속 조건의 경계점은 Fig. 3(b)와 같이 이동 플랫폼 상 의 구형 관절의 최소 작동 범위를 의미하는 평면 과 이동플랫폼 상의 원이 만나는 두 개의 점이다. 이는 등각 기하대수를 이용하여 기하학적인 방법 으로 찾을 수 있다.

이동플랫폼 상의 평면을 π_B 라 하고, 벡터 \mathbf{OB}_0 와 벡터 \mathbf{OA}_i 가 존재하는 평면에 수직한 벡터를 \mathbf{n}_i 라 하자.

$$\pi_B = \mathbf{C}_B \wedge \mathbf{e}_\infty = \mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{B}_2 \wedge \mathbf{B}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty \quad (20)$$

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{OB}_0 \wedge \mathbf{OA}_i \quad (21)$$

이동플랫폼 상의 구형 관절의 최소 작동 범위를 의미하는 평면 $\pi_{i,min}$ 은 이동플랫폼 상의 평면 π_B 를 벡터 \mathbf{n}_i 를 회전축으로 각 δ_{min} 만큼 회전시킨 다음, 점 \mathbf{A}_i 로 평행이동시킨 평면으로 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{R}_B = \exp(-0.5 \delta_{min} \mathbf{n}_i) \quad (22)$$

$$\mathbf{T}_B = 1 - 0.5 \mathbf{A}_i \mathbf{e}_\infty \quad (23)$$

$$\pi_{i,min} = \mathbf{R}_B \mathbf{T}_B \pi_B \tilde{\mathbf{T}}_B \tilde{\mathbf{R}}_B \quad (24)$$

그러므로 평면 $\pi_{i,min}$ 과 원 \mathbf{C}_B 가 교차할 때 생성되는 쌍점 $\mathbf{PP}_{i,min}$ 은 제한된 구형 관절의 이동범 위의 경계점을 나타낸다.

$$\mathbf{PP}_{i,min} = \pi_{i,min} \wedge \mathbf{C}_B \quad (25)$$

하지만 원 \mathbf{C}_B 와 평면 $\pi_{i,min}$ 는 항상 교차하지 않는다. 여유자유도 ψ 가 $[-\pi, \pi]$ 의 범위 내에서 항상 식(19)의 구속조건을 만족할 수도, 만족하지 않을 수도 있기 때문이다. 그러므로 원 \mathbf{C}_B 와 구 $\mathbf{S}_{i,j}$ 에 의해 생성된 쌍점 \mathbf{PP}_i 의 평방 놈 $\|\mathbf{PP}_i\|^2 \leq 0$ 이라면

여유자유도 ψ 의 모든 구간에서 기하학적 특이점이 발생되지 않음을 의미한다.

이외의 경우, Fig. 3(b)와 같이 쌍점 \mathbf{PP}_i 사이의 영역은 식(19)의 구속조건을 만족하지 않음을 의미 한다.

4.3 기하학적 특이점 회피

우리는 기하학적인 방법을 통해 근사적으로 기하학적 특이점의 경계점을 찾았다. 이 경계점들은 비용함수의 해 탐색 범위를 감소시켜 기하학적 특이점을 회피할 수 있다. 하지만 해의 탐색 범위는 점이 아니라 각 ψ 의 값이므로, 점 \mathbf{B}_{ij} 를 각 ψ 로 변환하여야 한다.

각 $\psi=0$ 일 때 직선을 $\mathbf{L}_{i,0}$ 라 하고, \mathbf{L}_{ij} 를 점 \mathbf{B}_0 와 기하학적 특이점의 양 경계점 $\mathbf{B}_{i,j}$ 를 지나는 직선이라 하자.

$$\mathbf{L}_{i,0} = \mathbf{B}_0(0) \wedge \mathbf{B}_i(0) \wedge \mathbf{e}_\infty \quad (26)$$

$$\mathbf{L}_{i,j} = \mathbf{B}_0(0) \wedge \mathbf{B}_{i,j} \wedge \mathbf{e}_\infty \quad (27)$$

각 ψ_{ij} 는 직선 $\mathbf{L}_{i,0}$ 와 직선 $\mathbf{L}_{i,j}$ 가 이루는 각으로 OPNS의 내적에 의해 다음과 같이 계산된다.[9]

$$\psi_{ij} = \cos^{-1} \frac{\mathbf{L}_{i,0} \cdot \mathbf{L}_{i,j}}{|\mathbf{L}_{i,0}| |\mathbf{L}_{i,j}|} \quad (28)$$

우리는 기하학적 특이점이 발생되지 않는 해의 영역을 알고 있으므로 비용함수 f_{cost} 의 범위를 제한함으로써 기하학적 특이점을 회피하여 작업공간의 확장이 가능할 뿐만 아니라 수치해법의 단점인 지역극소점(local minima)에 빠지는 확률을 감소시킬 수 있다.

5. 시뮬레이션

병렬형 기구는 복잡한 형상으로 인해 작업공간 내에 기하학적 특이점이 많이 존재한다. 이러한 이유로 본 논문에서는 기하학적 특이점을 회피할 수 있는 여유자유도 병렬형 구조의 역기구학 해석법을 제안하였고, 이에 대한 시뮬레이션을 통해 제안하는 메커니즘의 효용성을 검증하고자 한다.

여유자유도를 가지는 3-SPS/S 병렬 메커니즘의 시뮬레이션을 위하여 설계변수를 Table 2와 같이 선정하였다.

Table 2 Design parameters

r_A	r_B	d_A	d_B	α	$\beta_i \gamma_i$
0.35m	0.20m	0.33m	0.20m	30°	120(i-1)°

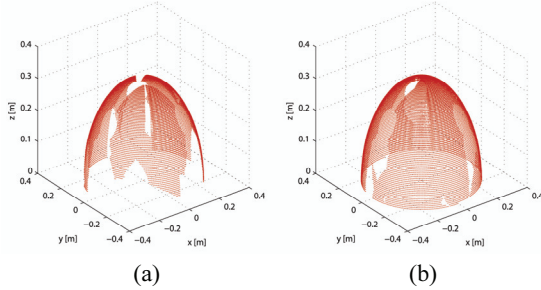


Fig. 4 Comparison of workspace: (a) non-singularity avoidance (b) geometric singularity avoidance

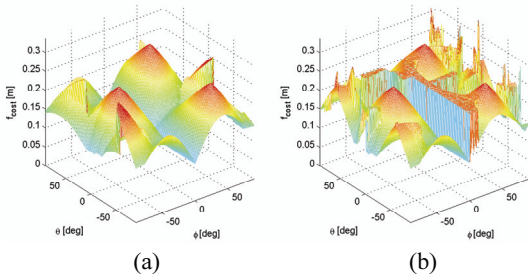


Fig. 5 Comparison of optimal solution: (a) non-singularity avoidance, (b) geometric singularity avoidance

제한한 기하학적 특이점 회피 알고리즘의 효율성을 검증하기 위해 제안한 메커니즘에 기하학적 특이점 회피 알고리즘을 적용하지 않을 경우와 적용한 경우를 비교하였다. 비교를 위해 출력 변수의 범위를 $\phi = [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta = [-\pi/2, \pi/2]$ 로 제한하고, 1° 간격마다 역기구학 해석을 수행하였다.

제안하는 특이점 회피 알고리즘의 효율성을 알아보기 위해 Fig. 4와 같이 작업이 가능한 공간을 붉은 점으로 표시하였다. Fig. 4(a)는 특이점 회피 알고리즘을 적용하지 않고, 직동 관절의 변위량을 최소화만 하였을 경우 작업공간을 보여주고, Fig. 4(b)는 특이점 회피와 구동 관절의 변위량을 모두 최소화 하였을 경우의 작업공간을 보여준다.

Fig. 4에서 보듯이, 기하학적 특이점 회피를 적용하지 않을 경우 전체 작업공간 중에 44.2% 영역에서 특이점이 발생하지만, 본 논문에서 제안하는 특이점 회피 알고리즘을 사용하였을 경우 전체 작

업공간 중 18.2% 영역에서만 특이점이 발생한다.

이처럼 제안하는 특이점 회피 알고리즘을 통해 작업공간이 확장되었지만 본 논문에서 목표로 삼은 특이점 회피와 더불어 목표자세로의 이동시간 최소화라는 목적도 동시에 달성했는지 확인이 필요하다. 이를 확인하기 위해 링크의 최대 변위량으로 표현되는 비용 f_{cost} 을 특이점을 적용하지 않은 경우와 적용한 경우에 대해 서로 비교하였다. Fig. 5는 θ, ϕ 의 목표자세가 주어질 경우 해당 자세에 대한 f_{cost} 값을 표시한 것으로, 제안하는 특이점 회피 알고리즘을 통해 Fig. 4에서 보듯이 작업공간 내의 기하학적 특이점을 기존 대비 41.1% 가장 감소시켰음에도 불구하고, Fig. 5에서 보듯이 링크의 최대 변위량은 크게 증가하지 않는 것을 보여주고 있다.

6. 결론

본 논문에서는 기존의 여유자유도를 가지는 병렬형 메커니즘과 다르게 구동기를 추가하지 않고 출력 공간의 자유도를 감소시켜 기구학적으로 자체운동이 가능한 병렬 메커니즘을 고안하였다. 그리고 여유자유도를 특성을 최대한 활용하여 기존의 직병렬형 구조의 단점을 극복할 수 있는 방향으로 연구를 수행하였다.

본 논문에서는 기구학적 여유자유도로 인해 역기구학은 무한한 해를 가지므로, 목표 자세로의 이동시간을 최소화하도록 비용함수를 정의하고, 수치해법을 통해 역기구학의 최적해를 찾을 수 있는 방법을 제안하였다. 하지만 병렬 메커니즘은 복잡한 형상으로 인해 작업공간 내에 기하학적 특이점 많이 존재하므로, 이를 등각 기하대수를 이용하여 기하학적 특이점의 경계점을 찾고 이를 회피하기 위한 연구를 수행하였다. 시뮬레이션을 통해 본 논문에서 제안하는 여유자유도 메커니즘의 효율성을 확인하였다.

후 기

이 논문은 국방과학연구소 생존성 기술 특화연구센터의 사업으로 지원받아 연구되었음 (계약번호 UD090090GD).

REFERENCES

1. Gosselin, C. and Angeles, J., "The Optimum

- Kinematic Design of a Planar Three-degree-of-Freedom Parallel Manipulator,” *Journal of Mechanical Design*, Vol. 110, No. 1, pp. 35-41, 1988.
2. Lee, S. H. and Kim, S. B., “Kinematic Feature Analysis of Parallel Manipulator Systems,” *Proc. of International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 2, pp. 1421-1428, 1994.
 3. Bonev, I. A. and Ryu, J., “A New Method for Solving the Direct Kinematics of General 6-6 Stewart Platforms using Three Linear Extra Sensors,” *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 35, No. 3, pp. 423-436, 2000.
 4. Lu, Y., Hu, B., and Liu, P.-L., “Kinematics and Dynamics Analyses of a Parallel Manipulator with Three Active Legs and One Passive Leg by a Virtual Serial Mechanism,” *Multibody Syst. Dyn.*, Vol. 17, No. 4, pp. 229-241, 2007.
 5. Park, J. H., Kim, J. S., and Jeong, J. H., “Kinematics Optimization of a 3-SPS Parallel Redundant Motion Mechanism using Conformal Geometric Algebra,” *Int. Conf. on Mechanical Manufacturing and Control*, 2014.
 6. Wang, J. and Gosselin, C., “Kinematic Analysis and Design of Kinematically Redundant Parallel Mechanisms,” *Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, No. 1, pp. 109-118, 2004.
 7. Kurtz, R. and Hayward, V., “Multiple-goal Kinematic Optimization of a Parallel Spherical Mechanism with Actuator Redundancy,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 8, No. 5, pp. 644-651, 1992.
 8. Zhang, D. and Lei, J., “Kinematic Analysis of a Novel 3-dof Actuation Redundant Parallel Manipulator using Artificial Intelligence Approach,” *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 27, No. 1, pp. 157-163, 2011.
 9. Merlet, J. P., “Determination of the Orientation Workspace of Parallel Manipulators” *Journal of intelligent and robotics systems*, Vol. 13, No. 2, pp. 143-160, 1995.
 10. Zamora, J. and Bayro-Corrochano, E., “Inverse Kinematics, Fixation and Grasping using Conformal Geometric Algebra,” *Proc. of IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 4, pp. 3841-3846, 2004.
 11. Aristidou, A., and Lasenby, J., “Fabrik: A Fast, Iterative Solver for the Inverse Kinematics Problem,” *Graphical Models*, Vol. 73, No. 5, pp. 243-260, 2011.
 12. Kim, J. S., Ji, Y. K., and Park, J. H., “Inverse Kinematics Analysis of 7-DOF Anthropomorphic Robot Arm using Conformal Geometric Algebra,” *J. Korean Soc. Precis. Eng.*, Vol. 29, No. 10, pp. 1119-1127, 2012.
 13. Wareham, R., Cameron, J., and Lasenby, J., “Applications of Conformal Geometric Algebra in Computer Vision and Graphics,” in *Computer Algebra and Geometric Algebra with Applications*, Li, H., Olver, P., and Sommer, G.(Eds.), Springer Berlin Heidelberg, pp. 329-349, 2005.
 14. Roa, E., Theoktisto, V., Fairén, M., and Navazo, I., “GPU Collision Detection in Conformal Geometric Space,” *V Ibero-American Symposium in Computer Graphics SIACG*, pp. 153-157, 2011.
 15. Hildenbrand, D., Fontijne, D., Perwass, C., and Dorst, L., “Geometric Algebra and its Application to Computer Graphics,” *Tutorial notes of the EUROGRAPHICS conference*, 2004.
 16. Hildenbrand, D., “Foundations of Geometric Algebra Computing,” Springer, Berlin Heidelberg, pp. 17-42, 2013.
 17. Ross, K.A., “Elementary Analysis,” Springer-Verlag, pp. 129-130, 1980.
 18. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., “Numerical Recipes in C++,” Cambridge UP, pp. 398-409, 2002.
 19. Merlet, J. P., “Determination of 6D Workspaces of Gough-type Parallel Manipulator and Comparison between Different Geometries,” *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 18, No. 9, pp. 902-916, 1999.
 20. Tsai, K. and Lin, J., “Determining the Compatible Orientation Workspace of Stewart–Gough Parallel Manipulators,” *Mechanism and machine theory*, Vol. 41, No. 10, pp. 1168-1184, 2006.
 21. Pitt, J., Hildenbrand, D., Stelzer, M., and Koch, A., “Inverse Kinematics of a Humanoid Robot based on Conformal Geometric Algebra using Optimized Code Generation,” *Proc. of the 8th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robot*, pp. 681-686, 2008.
 22. Chaparro-Altamirano, D., Zavala-Yoe, R., and

Ramirez-Mendoza, R., "Kinematic and Workspace Analysis of a Parallel Robot Used in Security Applications," in *Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering*, pp. 3-8, 2013.