

Approximation on the Distribution of the Overshoot by the Property of Erlang Distribution in the $M/E_n/1$ Queue

Sang-Gi Lee^a · Jongho Bae^{b,1}

^aSampling Division, Statistics Korea

^bDepartment of Information and Statistics, Chungnam National University

(Received October 13, 2014; Revised December 3, 2014; Accepted December 26, 2014)

Abstract

We consider an $M/E_n/1$ queueing model where customers arrive at a facility with a single server according to a Poisson process with customer service times assumed to be independent and identically distributed with Erlang distribution. We concentrate on the overshoot of the workload process in the queue. The overshoot means the excess over a threshold at the moment where the workload process exceeds the threshold. The approximation of the distribution of the overshoot was proposed by Bae *et al.* (2011); however, but the accuracy of the approximation was unsatisfactory. We derive an advanced approximation using the property of the Erlang distribution. Finally the newly proposed approximation is compared with the results of the previous study.

Keywords: Queueing model, Erlang distribution, workload process, overshoot.

1. 서론

우리는 고객이 어떤 시스템에 포아송과정으로 도착하고 각 고객의 서비스시간이 서로 독립이고 각각 계차 n 인 일량분포를 따르며 서버가 1명인 $M/E_n/1$ 대기모형을 고려한다. 계차 n 인 일량분포는 형상모수가 자연수 n 인 감마분포이므로 $M/E_n/1$ 대기모형은 $M/M/1$ 대기모형의 일반화된 모형이고 $M/G/1$ 대기모형의 특별한 모형이라 할 수 있다. 고객에 대한 서비스가 n 단계의 세부서비스로 이루어져 있고 각 세부서비스에 소요되는 시간이 서로 독립이고 동일한 지수분포를 따르는 상황에서 고객의 서비스시간은 계차 n 인 일량분포를 따른다.

대기모형에서 서버의 바쁜기간, 고객의 대기시간, 시스템 내에 있는 고객의 수, 서버의 작업부하량과 정(workload process) 등은 빈번하게 연구되는 성능척도이다. 본 논문에서는 서버의 작업부하량과정과 오버슈트(overshoot)에 대하여 집중적으로 논의할 것이다. 작업부하량이란 어떤 특정한 순간에 서버가 느끼는 작업에 대한 부담감을 수치화한 것인데 대기중인 고객들의 서비스 시간의 총합과 서비스를 받고 있는 고객의 잔여서비스시간의 합으로 정의된다. 시스템에 도착하는 고객의 서비스시간이 도착하는 순간 알려지는 시스템을 모형화할 때 작업부하량은 주된 관심사가 된다. 예를 들어 이메일 서버를 모형화할

¹Corresponding author: Department of Information and Statistics, Chungnam National University, Gungdong, Yuseong-Gu, Daejeon 305-764, Korea. E-mail: bae-jongho@cnu.ac.kr

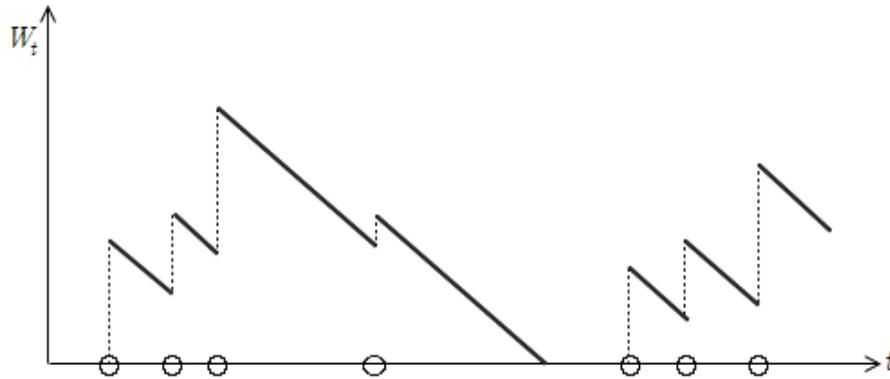


Figure 1.1. A sample path of the workload process in the $M/G/1$ queueing model

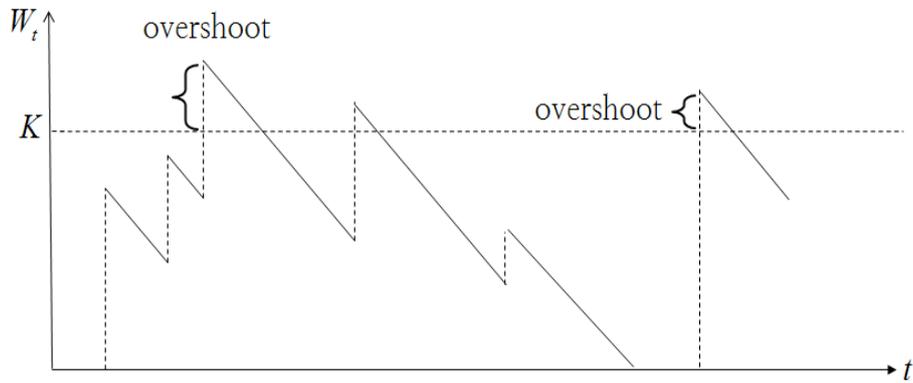


Figure 1.2. Some examples of the overshoot of the workload process in the $M/G/1$ queueing model

때는 이메일 송수신 요청을 고객의 도착으로 보고 이메일의 용량을 서비스시간으로 간주하면 고객이 도착하는 순간에 고객의 서비스시간은 알려지게 되므로 작업부하량과정이 의미있는 성능척도가 된다.

작업부하량은 시시각각 변화하기 때문에 시각 t 에서 작업부하량을 W_t 로 쓰고 확률과정 $\{W_t | t \geq 0\}$ 를 작업부하량과정이라 부를 것이다. 일반적으로 서버가 1명이고 고객의 서비스가 선입선출(first in, first out) 원칙에 의해 이루어지는 대기모형에서 작업부하량과정은 고객의 가상대기시간과정(virtual waiting time process)과 동일하다.

본 논문이 고려하는 모형은 비어 있는 시스템에 처음으로 고객이 도착하면 1명의 서버가 즉시 일을 시작하는 모형이기 때문에 작업부하량과정은 단위 시간당 1씩 줄어들고 시스템에 고객이 도착하는 순간에 그 고객의 서비스시간 만큼 작업부하량이 늘어난다. Figure 1.1은 $M/G/1$ 대기모형의 작업부하량과정의 전형적인 예이다. 가로축의 O표는 고객이 도착한 시점을 나타낸다.

서버의 바쁜기간이 시작된 후 W_t 가 미리 정해진 값 K 를 처음으로 초과하는 시점에서의 작업부하량을 S_K 라 하면 $S_K - K$ 는 작업부하량과정이 처음으로 K 를 초과할 때 그 초과량을 의미하는데 이를 오버슛(overshoot)이라 부른다. Figure 1.2는 $M/G/1$ 대기모형의 작업부하량과정에서 오버슛의 예를 보여 준다.

대기모형은 다양한 상황에 적용될 수 있도록 여러 다른 모형으로 변형되어 연구되고 있는데 본 논문의 연구는 변형된 대기모형 중에서 참을성 없는 고객이 있는 대기모형 또는 작업부하량과정에 P_λ^M -서비스 정책을 적용하는 대기모형을 분석할 때 필요한 주제를 다룬다. 참을성 없는 고객이 있는 대기모형은 대기중인 고객이 서비스를 받기 위해 기다리는 시간이 특정한 값 K 를 넘어서면 시스템을 떠나는 상황을 가정한다. Movaghar (1998), Lillo와 Martin (2001), Choi 등 (2004), Brandt와 Brandt (2004) 등 많은 연구자들이 이러한 모형을 연구하였다. 그리고 작업부하량과정에 P_λ^M -서비스정책을 적용하는 대기모형은 작업부하량 과정이 특정한 값 K 를 넘게 되면 일시적으로 서버의 수를 늘리거나 서비스 속도를 증가시키는 모형이다. Faddy (1974), Lee와 Ahn (1998), Bae 등 (2002), Kim 등 (2006), Kim과 Bae (2008)의 연구는 이 모형을 다룬다. 이러한 변형된 모형들에서 서버의 바쁜기간, 서비스를 받지 않고 떠나는 고객의 비율, 또는 작업부하량과정의 극한분포 등의 성능척도들을 구하거나 어떤 비용구조 아래에서 최적운영정책을 찾는 문제를 해결하기 위해서는 바쁜기간이 시작된 후 작업부하량 과정이 K 를 처음으로 초과할 때 초과하는 양, 즉 오버슈트의 분포에 대한 지식이 있어야 한다. 예를 들어 오버슈트의 분포할 수, 기댓값 또는 2차적률 등을 계산할 수 있어야 한다. Kim 등 (2006)은 P_λ^M -서비스정책을 적용하는 대기모형에서 최적화 문제를 연구했는데 이 연구의 결과가 의미있기 위해서는 오버슈트의 기댓값 및 2차적률이 필요하다.

한편 작업부하량과정이 특정한 값 D 를 넘을 때까지 서버가 서비스를 제공하지 않는 모형은 D -정책을 갖는 대기모형이라 불리는데 이 모형에서의 오버슈트의 분포에 대한 연구는 Lee 등 (2004)와 Lee 등 (2005)에 나타난다.

본 논문에서는 일반적인 $M/G/1$ 대기모형에서 작업부하량과정의 오버슈트의 분포에 대하여 논의할 것이다. 실제로 오버슈트의 분포에 대한 정확한 공식은 기존 연구에서 밝혀졌다. 그러나 고객의 서비스시간이 지수분포인 경우를 제외하고는 오버슈트의 분포를 계산하는 것이 거의 불가능하다. 그래서 Lee와 Ahn (1998)은 오버슈트의 분포를 재생이론에 착안하여 서비스시간의 평형분포라고 가정하고 연구를 진행하였다. 또, Bae 등 (2011)은 오버슈트의 분포를 지수분포와 고객의 서비스시간의 분포의 혼합분포(mixture)로 두고 분포에 대한 근사식을 구하였다. 본 연구는 Bae 등 (2011)의 연구를 바탕으로 좀 더 정확한 근사식을 구하고자 한다. 오버슈트의 분포를 근사하되 고객의 서비스시간이 얼랑분포라는 점을 활용할 것이다. 그리고 제안한 근사식이 기존에 얻어진 근사식보다 더 좋은 결과를 가져온다는 것을 수치자료를 통하여 보여줄 것이다.

2. 모형 기술 및 사전연구 고찰

고객은 도착률 ν 인 포아송과정으로 도착하고, 고객들의 서비스시간은 각각 계차 n 인 얼랑분포, 즉 $\text{Gamma}(n, \beta)$ 를 따르고 서로 독립이다 (n 은 자연수이고 $\beta > 0$). 고객의 서비스시간을 확률변수 S 로 표시하고 그 분포함수를 $G(\cdot)$ 라 하자. G_e 를 G 의 평형분포함수라 하면

$$G_e(y) = \frac{1}{E(S)} \int_0^y (1 - G(s)) ds, \quad y \geq 0$$

으로 정의된다. 시스템의 교통밀도(traffic intensity) ρ 는 $\nu E(S) = \nu n \beta$ 로 정의되고 시스템의 안정성을 위해 $0 < \rho < 1$ 을 가정한다.

작업부하량과정 $\{W_t | t \geq 0\}$ 는 점프가 발생하는 점에서 우측에서 연속(right-continuous)이라 가정하고 $W_0 = 0$ 을 가정한다. W_t 가 처음으로 K 를 넘어서는 시점을 T 라 하자. 즉, $T = \min\{t | W_t > K\}$ 이다. 그리고 W_T 를 S_K 라 하면 $S_K - K$ 가 오버슈트이다.

Kim 등 (2006)은 일반적인 $M/G/1$ 대기모형에서 오버슛의 분포함수 및 1차 적률을 다음과 같이 구하였다.

$$\begin{aligned} \Pr(S_K - K \leq y) &= 1 - \frac{\rho H(K)}{E(S)H'(K)} \int_{0-}^K \{1 - G(K + y - u)\} dH(u) \\ &\quad - \frac{\rho}{E(S)} \int_0^K \{1 - G(K + y - u)\} H(u) du, \quad y \geq 0. \\ E(S_K - K) &= \frac{H(K)}{H'(K)} \{1 - (1 - \rho)H(K)\} - \int_0^K \{1 - (1 - \rho)H(u)\} du. \end{aligned}$$

여기서 $H(\cdot)$ 는 보조재생함수(auxiliary renewal function)으로 불리기도 하는데 ρ 와 S 의 분포에 의존하며 다음과 같이 정의된다.

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n G_e^{n*}(x).$$

이 때, $G_e^{0*}(x) = I_{\{x \geq 0\}}(x)$ 이고, $G_e^{n*}(x) = G_e * G_e^{(n-1)*}(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 이며 $*$ 는 스틸제스-중합(Stieltjes-convolution)을 의미한다. 참고로 S 가 $S \geq 0$ 인 확률변수이면, $H(0) = H(0+) = 1$ 이고 $x < 0$ 일 때 $H(x) = 0$ 이며 $H(x)$ 는 비감소함수이다. 그리고 $H(x)$ 는 $x > 0$ 에서 무한히 미분가능하다.

그런데 $H(x)$ 는 고객의 서비스시간의 분포가 특별한 경우(예를 들어, 지수분포)를 제외하고는 계산하는 것이 힘들기 때문에 Kim 등 (2006)이 구한 결과로부터 오버슛의 분포함수 및 적률을 계산하는 것은 거의 불가능하다. 그래서 오버슛의 분포함수의 근사식에 대한 연구가 이루어졌다.

고객의 서비스시간이 계차 n 인 열량분포를 따를 때, Bae 등 (2011)은

- $K \rightarrow 0+$ 일 때 오버슛의 분포는 고객의 서비스시간의 분포로 수렴한다.
- $K \rightarrow \infty$ 일 때 오버슛의 기댓값은

$$\frac{1}{\delta} - \frac{\rho E(S^2)}{2(1 - \rho)E(S)}$$

로 수렴한다. 여기서 δ 는

$$\frac{\rho}{E(S)} \int_0^{\infty} e^{\delta y} \{1 - G(y)\} dy = 1$$

을 만족하는 유일한 양수이다.

•

$$\lim_{K \rightarrow 0+} \frac{d}{dK} E(S_K - K) = E(S)G'(0+) - 1.$$

을 증명하였고

- $K \rightarrow \infty$ 일 때 오버슛의 분포는 지수분포와 유사한 것으로 보인다.
- K 가 커지면서 오버슛의 기댓값은 K 에 따라 지수적으로 변하는 것으로 보인다.

라고 판단하여 다음과 같은 근사식을 제안하였다.

$$\Pr(S_K - K \leq y) \approx e^{-aK} G(y) + (1 - e^{-aK}) \left(1 - e^{-\frac{y}{c}}\right), \quad y \geq 0.$$

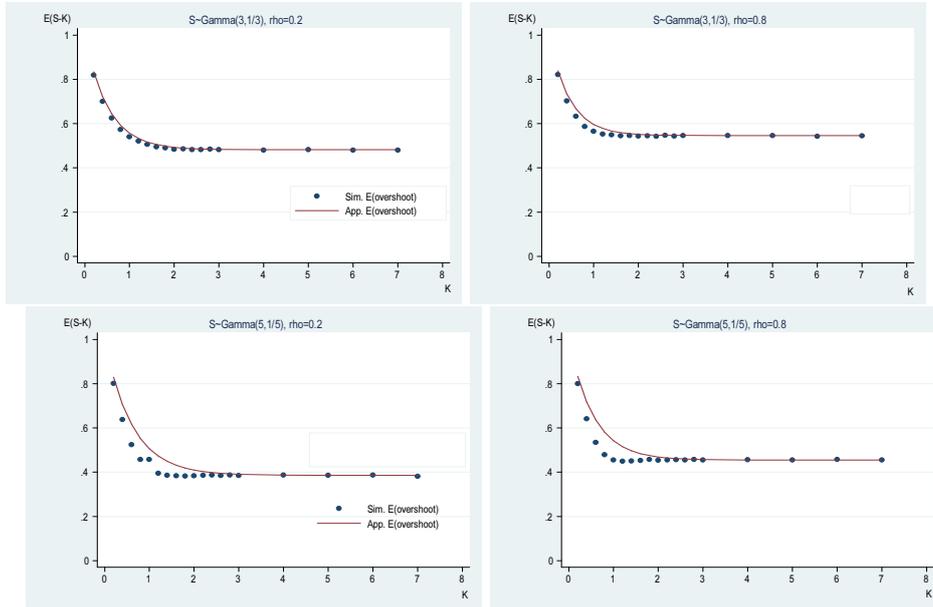


Figure 3.1. The expected value of the overshoot depending on K

이 때,

$$c = \frac{1}{\delta} - \frac{\rho E(S^2)}{2(1-\rho)E(S)}, \quad a = \frac{1 - E(S)G'(0+)}{E(S) - c}$$

로 결정한다.

3. 오버슛의 분포함수에 대한 근사

3.1. K 가 작은 값일 때의 오차 분석

Bae 등 (2011)이 제안한 근사식은 저자도 언급하였듯이 계차 n 이 크고 K 가 작을 때 다소 정확도가 떨어짐을 알 수 있다.

Table 4.4에 나타난 것처럼 S 가 계차 5인 얼랑분포를 따르고 $K = E(S)$ 일 때 분포함수의 근사식과 시뮬레이션을 통하여 얻어진 분포함수의 추정값의 최대차이는 ρ 에 관계없이 0.07보다 크다.

그리고 Figure 3.1은 $n = 3, 5$ 이고 $\rho = 0.2, 0.8$ 일 때 근사식에 의한 오버슛의 기댓값(실선으로 표시)과 시뮬레이션을 통해 얻어진 오버슛의 추정된 기댓값(점으로 표시)을 비교한 것이다. 그래프의 가로축은 K 이고 세로축은 오버슛의 기댓값 $E(S_K - K)$ 이다. Figure 3.1을 보면 K 가 $E(S)$ 보다 작을 때 근사식에 의한 오버슛의 기댓값이 시뮬레이션에 의해 얻어진 오버슛의 추정된 기댓값보다 크게 나타남을 알 수 있다. 특히 n 이 크거나 ρ 가 큰 경우에 그러한데, 이는 K 가 증가하면서 오버슛의 기댓값이 예상보다 빠르게 극한값으로 수렴하는데서 기인한다. Bae 등 (2011)의 근사식에 의하면

$$\Pr(S_K - K \leq y) \approx e^{-aK}G(y) + (1 - e^{-aK})\left(1 - e^{-\frac{y}{c}}\right),$$

$$E(S_K - K) \approx e^{-aK}E(S) + (1 - e^{-aK}) \cdot c$$

Table 3.1. The coefficient of variation of the overshoot (simulated results)

ρ	$S \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$				$S \sim \text{Gamma}(3, 1/3)$				$S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$			
	$K=1$	$K=3$	$K=5$	$K=7$	$K=1$	$K=3$	$K=5$	$K=7$	$K=1$	$K=3$	$K=5$	$K=7$
0.1	.9396	.9786	.9786	.9795	.8944	.9595	.9623	.9610	.8702	.9404	.9384	.9933
0.5	.9306	.9513	.9481	.9546	.8913	.9191	.9181	.9185	.8523	.8746	.8825	.8761
0.9	.9197	.9396	.9364	.9389	.8776	.8989	.8989	.8959	.8424	.8516	.8511	.8463

인데 이는 K 가 증가하면서 오버슈트의 기댓값이 $E(S)$ 에서 c 로 변화되 지수적으로 변한다고 예상한 것이다. 그러나 Figure 3.1이 말해 주듯이 오버슈트의 기댓값은 $E(S)$ 에서 c 로 더 빠르게 변한다. 그래서 이를 반영하기 위하여 본 논문에서 다음과 같은 근사식을 제안한다.

$$\Pr(S_K - K \leq y) \approx e^{-(aK+bK^2)}G(y) + \left(1 - e^{-(aK+bK^2)}\right)F(y),$$

$$E(S_K - K) \approx e^{-(aK+bK^2)}E(S) + \left(1 - e^{-(aK+bK^2)}\right) \cdot c,$$

여기서 $F(y)$ 는 평균이 c 인 어떤 분포함수이며 3.2절에서 $F(y)$ 에 대하여 자세히 기술한다.

이 식은 오버슈트의 기댓값을 근사하는데 있어서 K 가 작고 n 이 큰 값일 때 Bae 등 (2011)이 가진 약점을 상당히 보완할 것이다. 한편 추가로 고려한 상수 b 를 결정하기 위하여 오버슈트에 관한 성질이 하나 더 필요한데 이는 3.3절에서 소개한다.

3.2. K 가 큰 값일 때의 오차 분석

2절에서 말한 바와 같이 Bae 등 (2011)은 $K \rightarrow \infty$ 일 때 오버슈트는 평균이 c 인 지수분포를 따른다고 가정하였다. 그러나 시뮬레이션을 통해 관찰한 결과 오버슈트의 변동계수는 항상 1보다 작다는 것을 알 수 있다. 그 결과 중 일부를 Table 3.1에 정리하였다. Table 3.1은 여러 상황 하에서 시뮬레이션을 통해 구한 오버슈트의 변동계수를 보여준다. $E(S) = 1$ 인 점을 고려하면 K 가 7이면 충분히 크다고 할 수 있는데 $K = 7$ 인 경우 변동계수가 0.84에서 0.99 사이의 값을 가진다. 그리고 ρ 와 얼랑분포의 계차 n 이 클수록 오버슈트의 변동계수는 1에서 멀어진다. 이것은 $K \rightarrow \infty$ 일 때 오버슈트의 분포는 지수분포와 거리가 있음을 보여준다. 그래서 본 논문에서는 $K \rightarrow \infty$ 일 때 오버슈트의 분포함수 $F(y)$ 에 대하여 Bae 등 (2011)과 다른 제안을 한다.

S 가 기댓값이 1이고 계차 5인 얼랑분포, 즉 $\text{Gamma}(5, 1/5)$ 를 따르는 경우를 생각하자. 서비스시간은 5단계의 세부서비스로 나뉘어진다고 생각할 수 있다. 그리고 각 단계의 세부서비스시간은 서로 독립이고 평균이 $1/5$ 인 지수분포를 따른다. 즉, i 단계의 세부서비스시간을 A_i 로 표시하면 $S = \sum_{i=1}^5 A_i$ 이다. 오버슈트가 발생하는 시점을 T 라 하고 m 을

$$m = \min \left\{ j \left| W_{T-} + \sum_{i=1}^j A_i > K \right. \right\}$$

라 하면 m 은 1부터 5 중 한 자연수값이 된다. 그리고

$$S_K - K = W_T - K = \left(W_{T-} + \sum_{i=1}^m A_i - K \right) + \sum_{i=m+1}^5 A_i$$

로 표현할 수 있는데 각 $A_i (m+1 \leq i \leq 5)$ 들은 평균이 $1/5$ 인 지수분포를 따르고, $(W_{T-} + \sum_{i=1}^m A_i - K)$ 도 지수분포의 무기역성에 의해 지수분포를 따르므로 오버슈트는 $\text{Gamma}(6-m, 1/5)$ 분포를 따른다. Figure 3.2는 $m = 1$ 인 예를 보여준다.

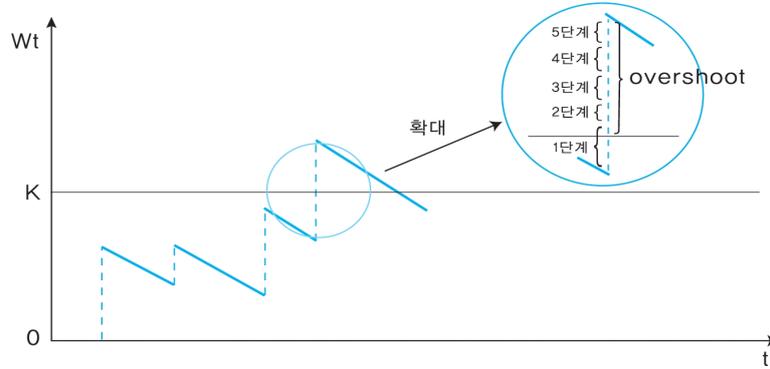


Figure 3.2. An overshoot caused by the 1st subservice

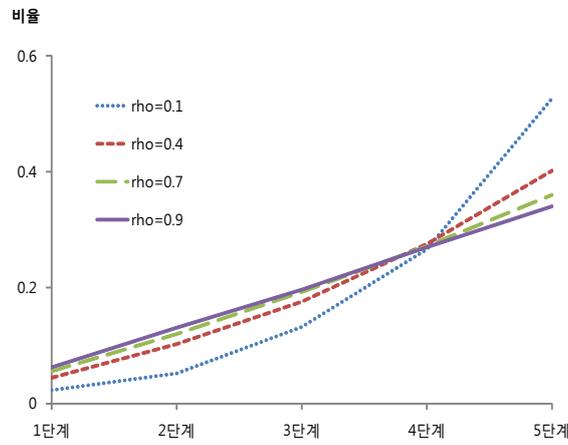


Figure 3.3. The proportions of the steps of which subservice casues the overshoot

그러므로 오버슛의 분포는 오버슛이 발생하는 순간에 m 의 값이 몇인지에 따라, 다시말해 오버슛이 몇번째 단계의 세부서비스에 의해 발생하는지에 따라 결정된다. 따라서 오버슛이 m 단계($m = 1, 2, 3, 4, 5$)의 세부서비스에 의해 발생할 확률을 알면 오버슛의 분포를 정확히 알 수 있다.

Figure 3.3는 $S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$ 이고 $K = 7$ 일 때 오버슛이 각 단계의 세부서비스에 의해 발생하는 비율을 시뮬레이션을 통해 알아본 결과이다. Figure 3.3를 근거로 하여 오버슛이 m 번째 세부서비스에 의해 발생할 확률은 ρ 가 0에 가까운 경우를 제외하고는 m 에 관한 선형식으로 가정해도 큰 무리가 없을 것이다.

정리하여 $S \sim \text{Gamma}(n, \beta)$ 인 경우 $K \rightarrow \infty$ 일 때 오버슛의 분포를 아래의 확률변수 R 이 따르는 분포로 가정하고자 한다.

$$1 \leq i \leq n \text{에 대하여 확률 } p_i \text{로 } R = R_i,$$

여기에서 $R_i \sim \text{Gamma}(i, \beta)$ 이고 $E(R) = c$ 이다. 그리고 p_i 는 오버슛이 $(n + 1 - i)$ 번째 세부서비스에서 발생할 확률이고 $p_i = p + (i - 1)d$ 이며 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 이다.

3.3. 근사식 유도

이제 오버샷의 분포함수에 대한 근사식은 다음과 같다.

$$\Pr(S_K - K \leq y) \approx e^{-(aK+bK^2)}G(y) + \left(1 - e^{-(aK+bK^2)}\right)F(y). \quad (3.1)$$

이때, $F(y) = \sum_{i=1}^n p_i \Pr(R_i \leq y)$ 이고 $R_i \sim \text{Gamma}(i, \beta)$, $p_i = p + (i-1)d$.

a, b, p, d 를 정하기 위해 정리 3.1, 정리 3.2, 정리 3.3이 필요하다. 이 정리들은 S 가 얼랑분포를 따르지 않는 경우에도 성립하며 $G(x)$ 가 $x \geq 0$ 에서 연속이고 $G(x)$ 의 1계 및 2계미분계수의 $x = 0$ 에서 우극한 값, 즉 $G'(0+)$ 와 $G''(0+)$ 가 존재한다고 가정한다.

정리 3.1

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E(S_K - K) = \frac{1}{\delta} - \frac{\rho E(S^2)}{2(1-\rho)E(S)},$$

여기서 δ 는 $\int_0^\infty e^{\delta y} d_y \{\rho G_e(y)\} = 1$ 을 만족하는 양수이며 S 가 얼랑분포를 따르면 양수 δ 가 유일하게 존재함이 알려져 있다 (Tijms, 1986, p.57).

정리 3.2

$$\lim_{K \rightarrow 0+} \frac{d}{dK} E(S_K - K) = E(S)G'(0+) - 1.$$

정리 3.1과 정리 3.2에 대한 증명은 Bae 등 (2011)에 나타난다.

정리 3.3

$$\lim_{K \rightarrow 0+} \frac{d^2}{dK^2} E(S_K - K) = E(S) \left[2 \{G'(0+)\}^2 + G''(0+) \right] - G'(0+).$$

증명: Bae 등 (2011)에

$$H(0+) = 1, \quad H'(0+) = \frac{\rho}{E(S)}, \quad H''(0+) = \frac{\rho}{E(S)} \left(\frac{\rho}{E(S)} - G'(0+) \right) \quad (3.2)$$

이 증명되어 있는데, 정리 3.3을 증명하기 위해서는 이 결과와 더불어 $H'''(0+)$ 의 값이 필요하다. Bae와 Kim (2007)에 의하면 $H'(x)$ 는 다음의 적분방정식을 만족한다.

$$H'(x) = \frac{\rho}{E(S)}(1 - G(x)) + \int_0^x H'(x-y) d_y \{\rho G_e(y)\}, \quad x > 0.$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 두 번 미분하면

$$\begin{aligned} H'''(x) &= -\frac{\rho}{E(S)}G''(x) - \left(\frac{\rho}{E(S)}\right)^2 G'(x) \\ &\quad + \frac{\rho}{E(S)} \left\{ H''(0+)(1 - G(x)) + \int_0^x H'''(x-y)(1 - G(y))dy \right\} \end{aligned}$$

이 되고 x 를 0+로 보내면

$$H'''(0+) = \frac{\rho}{E(S)} \left\{ \left(\frac{\rho}{E(S)}\right)^2 - 2\frac{\rho}{E(S)}G'(0+) - G''(0+) \right\} \quad (3.3)$$

이다.

한편, Kim 등 (2006)에 의한

$$E(S_K - K) = \frac{H(K)}{H'(K)} \{1 - (1 - \rho)H(K)\} - \int_0^K \{1 - (1 - \rho)H(u)\} du$$

의 양변을 K 에 대하여 두번 미분하고 K 를 $0+$ 로 보낸 식에 식 (3.2)와 식 (3.3)을 대입하면

$$\lim_{K \rightarrow 0+} \frac{d^2}{dK^2} E(S_K - K) = E(S) \left[2 \{G'(0+)\}^2 + G''(0+) \right] - G'(0+)$$

을 얻는다. □

이제 식 (3.1)에서 a, b, p, d 를 정할 수 있다. 식 (3.1)로부터

$$E(S_K - K) \approx e^{-(aK+bK^2)} E(S) + \left(1 - e^{-(aK+bK^2)}\right) \cdot c \quad (3.4)$$

이고 c 는 $K \rightarrow \infty$ 일 때 오버슈트의 분포의 기댓값을 의미하므로 정리 3.1에 의하여

$$c = \frac{1}{\delta} - \frac{\rho E(S^2)}{2(1-\rho)E(S)}$$

이다. 그리고 식 (3.4)의 양변을 K 에 대하여 미분하고 K 를 $0+$ 로 보낸 후 양변을 같게 두면 정리 3.2에 의하여

$$E(S)G'(0+) - 1 = a \cdot (c - E(S))$$

이므로

$$a = \frac{1 - E(S)G'(0+)}{E(S) - c}$$

로 정한다. 또, 식 (3.4)의 양변을 K 에 대하여 두번 미분하고 K 를 $0+$ 로 보낸 후 양변을 같게 두면

$$E(S) \left[2 \{G'(0+)\}^2 + G''(0+) \right] - G'(0+) = (2b - a^2) (c - E(S))$$

를 얻게 되어

$$b = \frac{a^2}{2} + \frac{G'(0+) - E(S) \left[2 \{G'(0+)\}^2 + G''(0+) \right]}{2(E(S) - c)}$$

로 정한다.

특별히 $S \sim \text{Gamma}(n, \beta)$ 일 때 $n = 2$ 이면 $G'(0+) = 0$, $G''(0+) = 1/\beta^2$ 이고 $n \geq 3$ 이면 $G'(0+) = G''(0+) = 0$ 이다.

그리고 p 와 d 를 정하기 위해 아래 두 정보를 이용한다.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i E(R_i) = c.$$

Table 4.1. The values of δ , a , and b under the various values of ρ and distributions of S

ρ	$S \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$			$S \sim \text{Gamma}(3, 1/3)$			$S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$		
	δ	a	b	δ	a	b	δ	a	b
0.1	1.5000	2.4000	-1.9200	1.8936	1.8316	1.6773	2.3663	1.5526	1.2053
0.2	1.2597	2.5403	-1.8541	1.5419	1.9301	1.8626	1.8655	1.6288	1.3265
0.3	1.0610	2.6391	-1.7958	1.2733	1.9986	1.9972	1.5096	1.6815	1.4137
0.4	0.8835	2.7164	-1.7434	1.0447	2.0524	2.1062	1.2202	1.7228	1.4840
0.5	0.7192	2.7811	-1.6949	0.8405	2.0969	2.1985	0.9701	1.7569	1.5434
0.6	0.5642	2.8362	-1.6503	0.6529	2.1351	2.2792	0.7462	1.7861	1.5951
0.7	0.4161	2.8841	-1.6092	0.4775	2.1677	2.3495	0.5411	1.8119	1.6415
0.8	0.2734	2.9209	-1.5759	0.3113	2.2010	2.4223	0.3503	1.8338	1.6815
0.9	0.1349	2.9665	-1.5330	0.1527	2.2163	2.4559	0.1706	1.8576	1.7253

Table 4.2. The values of p and d under the various values of ρ and distributions of S

ρ	$S \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$		$S \sim \text{Gamma}(3, 1/3)$		$S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$	
	p	d	p	d	p	d
0.1	0.8333	-0.6667	0.6523	-0.3190	0.4441	-0.1220
0.2	0.7873	-0.5746	0.6105	-0.2772	0.4140	-0.1070
0.3	0.7578	-0.5157	0.5839	-0.2505	0.3947	-0.0974
0.4	0.7363	-0.4726	0.5642	-0.2308	0.3805	-0.0902
0.5	0.7191	-0.4383	0.5487	-0.2153	0.3692	-0.0846
0.6	0.7052	-0.4103	0.5359	-0.2026	0.3599	-0.0799
0.7	0.6935	-0.3869	0.5253	-0.1920	0.3519	-0.0760
0.8	0.6847	-0.3694	0.5148	-0.1815	0.3453	-0.0727
0.9	0.6742	-0.3484	0.5102	-0.1768	0.3383	-0.0692

그런데 $p_i = p + (i - 1)d$ 이고 $E(R_i) = i\beta$ 이므로 위의 두 식은

$$2np + n(n - 1)d = 2,$$

$$3\beta n(n + 1)p + 2\beta n(n - 1)(n + 1)d = 6c$$

로 쓸 수 있다. 그리고 이 연립방정식을 p 와 d 에 관하여 풀어

$$p = \frac{4}{n} - \frac{6c}{\beta n(n + 1)},$$

$$d = \frac{6}{n(n - 1)} \left(\frac{2c}{\beta(n + 1)} - 1 \right)$$

로 정한다.

4. 수치적 결과

본 절에서는 S 가 $S \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$, $S \sim \text{Gamma}(3, 1/3)$, $S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$ 일 때 여러 ρ 와 $K = 1, 3, 5, 7$ 에 대하여 논문에서 제안한 오버슈트의 분포함수에 대한 근사식 $\tilde{A}(y)$ 와 시뮬레이션을 통해 얻은 분포함수의 추정식 $\hat{A}(y)$ 를 비교함으로써 제안한 근사식 $\tilde{A}(y)$ 의 정확도를 확인한다.

S 의 분포 및 여러 ρ 에 대하여 상수 δ , a , b , p , d 를 계산한 결과를 Table 4.1와 Table 4.2에 정리하였다. 그리고 이 결과를 이용하여 $\tilde{A}(y)$ 를 구하였다. 또한, S 의 각 분포 및 각각의 ρ 값과 K 값이 주어진 상황에서 시뮬레이션을 실시하여 오버슈트의 분포함수에 대한 추정식 $\hat{A}(y)$ 를 얻었다.

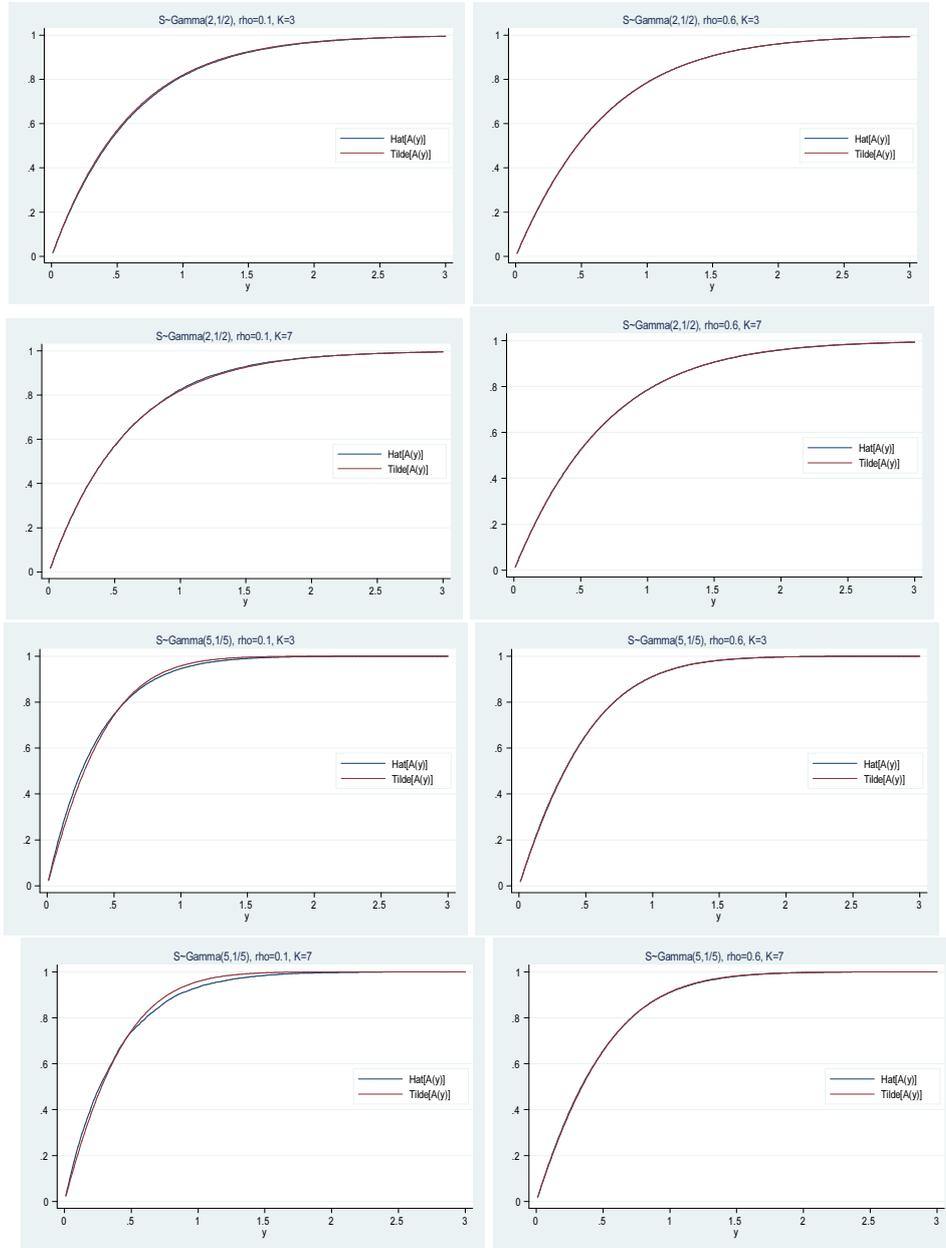


Figure 4.1. The comparisons of $\tilde{A}(y)$ and $\hat{A}(y)$

$S \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$ 또는 $S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$ 이고 $\rho = 0.1$ 또는 0.6 이고 $K = 3$ 또는 7 인 경우에 $\tilde{A}(y)$ 와 $\hat{A}(y)$ 를 한 그래프에 도시한 것이 Figure 4.1이다. Figure 4.1을 보면 대부분의 경우에 $\tilde{A}(y)$ 와 $\hat{A}(y)$ 가 상당히 비슷함을 확인할 수 있다. 그리고 Figure 4.1에 도시하지 않은 다른 경우에도 비슷한 결과를 얻었다. 따라서 제안한 근사식 $\tilde{A}(y)$ 가 실제 분포함수를 잘 근사시킴을 알 수 있다.

Table 4.3. The maximum differences between $\tilde{A}(y)$ and $\hat{A}(y)$

ρ	$S \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$				$S \sim \text{Gamma}(3, 1/3)$				$S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$			
	$K = 1$	$K = 3$	$K = 5$	$K = 7$	$K = 1$	$K = 3$	$K = 5$	$K = 7$	$K = 1$	$K = 3$	$K = 5$	$K = 7$
0.1	.0596	.0082	.0016	.0071	.0608	.0083	.0117	.0105	.0181	.0321	.0285	.0319
0.2	.0468	.0042	.0040	.0153	.0443	.0086	.0073	.0204	.0077	.0205	.0197	.0210
0.3	.0403	.0048	.0030	.0063	.0379	.0052	.0053	.0146	.0081	.0165	.0138	.0170
0.4	.0356	.0040	.0027	.0020	.0293	.0057	.0042	.0035	.0133	.0094	.0105	.0128
0.5	.0302	.0036	.0029	.0041	.0266	.0040	.0035	.0047	.0120	.0075	.0093	.0089
0.6	.0263	.0031	.0023	.0025	.0219	.0037	.0021	.0030	.0150	.0075	.0073	.0068
0.7	.0260	.0029	.0019	.0054	.0184	.0027	.0025	.0042	.0181	.0042	.0047	.0083
0.8	.0223	.0018	.0025	.0017	.0179	.0016	.0026	.0035	.0148	.0029	.0053	.0027
0.9	.0207	.0033	.0012	.0027	.0176	.0056	.0032	.0018	.0185	.0026	.0030	.0025

Table 4.4. The maximum differences between $\tilde{B}(y)$ and $\hat{A}(y)$

ρ	$S \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$				$S \sim \text{Gamma}(3, 1/3)$				$S \sim \text{Gamma}(5, 1/5)$			
	$K = 1$	$K = 3$	$K = 5$	$K = 7$	$K = 1$	$K = 3$	$K = 5$	$K = 7$	$K = 1$	$K = 3$	$K = 5$	$K = 7$
0.1	.0406	.0143	.0114	.0106	.0214	.0102	.0063	.0127	.0869	.0126	.0124	.0347
0.2	.0352	.0112	.0103	.0061	.0173	.0164	.0160	.0135	.0892	.0205	.0198	.0281
0.3	.0323	.0109	.0114	.0100	.0180	.0169	.0199	.0182	.0872	.0265	.0262	.0280
0.4	.0288	.0154	.0124	.0152	.0195	.0230	.0232	.0231	.0856	.0317	.0330	.0321
0.5	.0270	.0154	.0165	.0171	.0213	.0234	.0284	.0255	.0850	.0345	.0372	.0364
0.6	.0272	.0173	.0165	.0193	.0212	.0290	.0265	.0286	.0812	.0386	.0400	.0408
0.7	.0253	.0199	.0182	.0175	.0232	.0303	.0285	.0291	.0787	.0424	.0443	.0405
0.8	.0270	.0197	.0186	.0190	.0225	.0265	.0312	.0299	.0751	.0419	.0441	.0461
0.9	.0240	.0219	.0195	.0183	.0229	.0311	.0317	.0321	.0764	.0464	.0493	.0474

더 나아가 $\tilde{A}(y)$ 와 $\hat{A}(y)$ 의 y 에 대한 최대차이를 확인하기 위해 모든 경우에 $\max_{y>0} |\tilde{A}(y) - \hat{A}(y)|$ 를 계산하여 Table 4.3에 정리하였고 Bae 등 (2011)이 제안한 근사식을 $\tilde{B}(y)$ 라 할 때 $\max_{y>0} |\tilde{B}(y) - \hat{A}(y)|$ 의 값을 Table 4.4에 정리하였다. 그리고 Table 4.3와 Table 4.4에 정리된 값 중에서 일부를 그래프로 표현한 것이 Figure 4.2이다.

Table 4.3와 Table 4.4를 비교해 보면, $K = 1$ 이거나 $\rho = 0.1$ 인 경우를 제외하면 $\max_{y>0} |\tilde{A}(y) - \hat{A}(y)|$ 의 값은 대부분 0.01 이하로 나타났다. 이는 K 가 클 때 오버슈트의 분포를 지수분포로 정하지 않고 열량분포의 성질을 이용함으로써 얻어진 효과이다. 그리고 $K \geq 3$ 일 때 대부분의 경우에 Bae 등 (2011)보다 좋은 결과를 보여준다. 특히 열량분포의 계차가 5이고 $K = 1$ 인 경우에 정확도가 Bae 등 (2011)보다 크게 개선되었는데, 이는 오버슈트의 분포함수의 근사식에서 $G(y)$ 의 가중치를 e^{-aK} 에서 $e^{-(aK+bK^2)}$ 으로 수정함으로써 나타난 효과라고 판단된다. 반면에 계차가 2 또는 3이고 $K = 1$, ρ 가 0.5 이하일 때는 정확도가 약간 떨어진 사실도 발견할 수 있으나 이 경우에도 $\max_{y>0} |\tilde{A}(y) - \hat{A}(y)|$ 의 값이 그다지 큰 값은 아님을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 논문은 고객의 서비스시간이 열량분포인 $M/E_n/1$ 대기모형에서 오버슈트의 분포함수에 대한 근사식을 제안하였다. $M/G/1$ 대기모형에서 오버슈트의 분포함수에 대한 정확한 공식은 기존에 구해져 있지만 계산이 어렵다는 문제점을 안고 있었고, Bae 등 (2011)은 $M/E_n/1$ 대기모형에서 오버슈트의 분포함수에 대한 근사식을 구하였다.

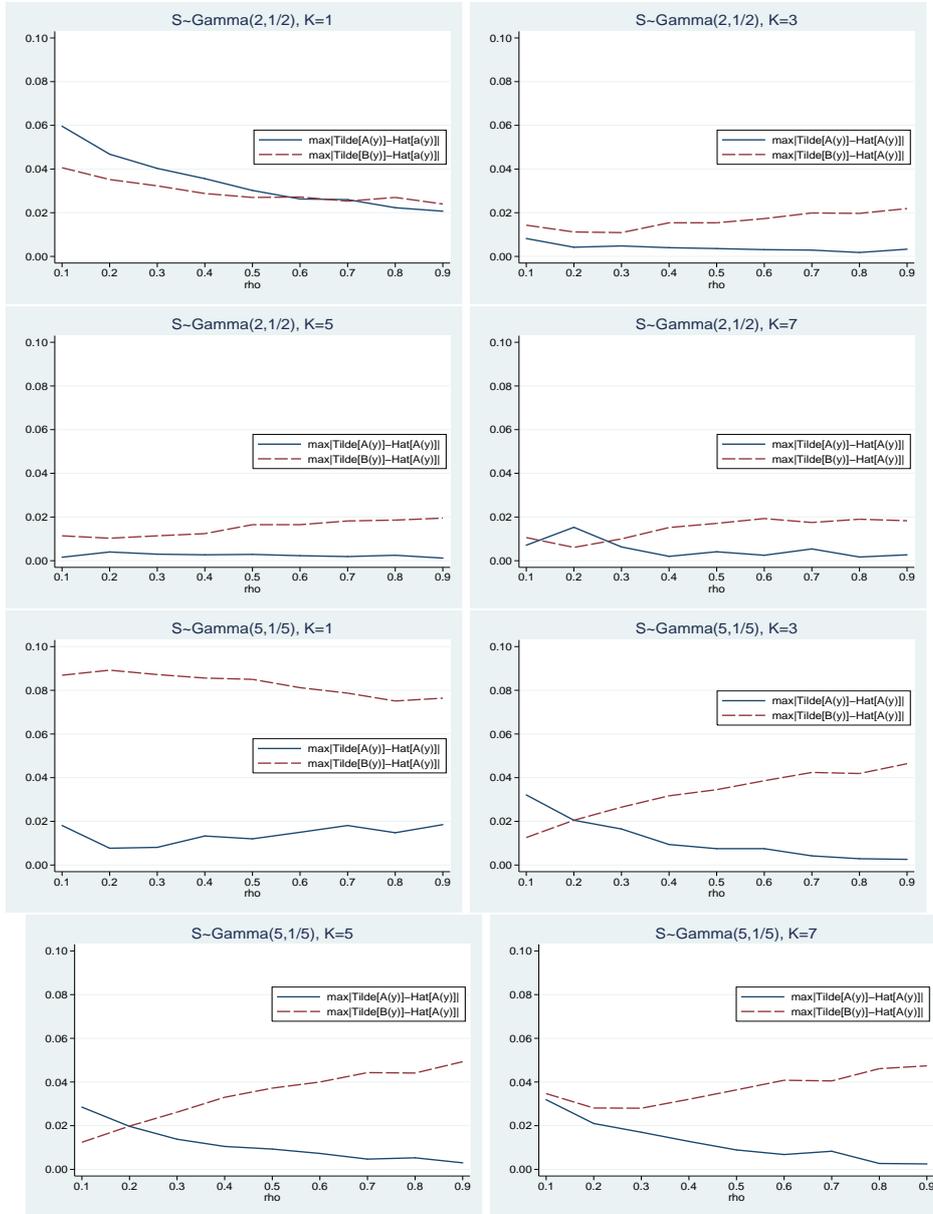


Figure 4.2. The comparisons of the accuracy of $\tilde{A}(y)$ and of $\tilde{B}(y)$

본 논문은 Bae 등 (2011)의 연구에 대한 후속 연구논문으로서 $M/E_n/1$ 대기모형에서 오버슈트의 분포함수에 대한 근사식을 찾기 위하여 여러 시뮬레이션 결과에 대한 분석을 바탕으로 Bae 등 (2011)이 제안한 근사식에 두 가지 수정을 가하였다. 오버슈트의 분포함수를 서비스시간의 분포함수와 K 가 ∞ 로 갈 때 오버슈트의 분포함수의 가중평균으로 근사시키는데, Bae 등 (2011)이 제안한 가중치를 수정하였다. 그리고 얼랑분포는 독립적인 지수분포를 따르는 확률변수들의 합이 따르는 분포라는 성질을 이용하여 K 가

∞ 로 갈 때 오버슈트의 분포함수를 Bae 등 (2011)이 가정한 모형과 다르게 설정하였다. 그리고 S 의 여러 분포 및 여러 ρ 값, 여러 K 값이 주어진 상황에서 제시한 근사식의 정확도를 평가하기 위하여 제시한 근사식의 결과를 시뮬레이션 결과와 비교하였다.

비교한 결과를 보면, 제시한 근사식은 시뮬레이션 결과와 매우 유사함을 알 수 있고 Bae 등 (2011)의 결과보다 전반적으로 근사의 정확도가 개선된 것으로 나타났다.

향후 고객의 서비스시간의 분포가 와이블분포, 초지수분포인 경우 등에 적용할 수 있는 근사식을 찾는 연구가 필요할 것이고 서비스시간의 분포에 아무런 가정이 없는 상황에서도 근사식을 찾을 수 있다면 더 좋은 연구가 될 것이다.

References

- Bae, J., Jeong, A. and Kim, S. (2011). An approximation to the overshoot in $M/E_n/1$ queues, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **24**, 347–357.
- Bae, J. and Kim, S. (2007). The approximation for the auxiliary renewal function, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **20**, 333–342.
- Bae, J., Kim, S. and Lee, E. Y. (2002). A P_λ^M -policy for an $M/G/1$ queueing system, *Applied Mathematical Modelling*, **26**, 929–939.
- Brandt, A. and Brandt, M. (2004). On the two-class $M/M/1$ system under preemptive resume and impatience of the prioritized customers, *Queueing Systems*, **47**, 147–168.
- Choi, B. D., Kim, B. and Zhu, D. (2004). $MAP/M/c$ queue with constant impatience time, *Mathematics of Operations Research*, **29**, 309–325.
- Faddy, M. J. (1974). Optimal control of finite dams: Discrete(2-stage) output procedure, *Journal of Applied Probability*, **11**, 111–121.
- Kim, S. and Bae, J. (2008). A $G/M/1$ queueing system with P_λ^M -service policy, *Operations Research Letters*, **36**, 201–204.
- Kim, J., Bae, J. and Lee, E. Y. (2006). An optimal P_λ^M -service policy for an $M/G/1$ queueing system, *Applied Mathematical Modelling*, **30**, 38–48.
- Lee, E. Y. and Ahn, S. K. (1998). P_λ^M -service policy for a dam with input formed by compound Poisson process, *Journal of Applied Probability*, **35**, 482–488.
- Lee, H. W., Baek, J. W. and Jeon, J. (2005). Analysis of $M^X/G/1$ queue under D-policy, *Stochastic Analysis and Applications*, **23**, 785–808.
- Lee, H. W., Cheon, S. H., Lee, E. Y. and Chae, K. C. (2004). Workload and waiting time analysis of $MAP/G/1$ queue under D-policy, *Queueing Systems*, **48**, 421–443.
- Lillo, R. E. and Martin, M. (2001). Stability in queues with impatience customers, *Stochastic Models*, **17**, 375–389.
- Movaghar, A. (1998). On queueing with customer impatience until the beginning of service, *Queueing Systems*, **29**, 337–350.
- Tijms, H. C. (1986). *Stochastic Modelling and Analysis: A Computational Approach*, John Wiley & Sons, New York.

$M/E_n/1$ 대기모형에서 얼랑분포의 성질을 이용한 오버슛의 분포에 대한 근사

이상기^a · 배종호^{b,1}

^a통계청 표본과, ^b충남대학교 정보통계학과

(2014년 10월 13일 접수, 2014년 12월 3일 수정, 2014년 12월 26일 채택)

요약

본 논문은 $M/E_n/1$ 대기모형에서 작업부하량과정의 오버슛의 분포함수에 대한 근사식을 제안한다. 오버슛이란 작업부하량과정이 미리 정해진 한계점을 처음으로 초과할 때 초과하는 양을 말하는데 정확한 분포함수는 수학적 표현으로만 얻어졌을 뿐 분포함수를 실제로 계산하는 것은 거의 불가능하다. 그래서 기존 연구에서는 오버슛에 관한 몇가지 성질을 이용하여 오버슛의 분포함수에 대한 근사식이 구해졌다. 본 논문은 고객의 서비스시간의 분포가 얼랑 분포라는 점을 활용하여 기존에 얻어진 근사식보다 더 정확한 근사식을 제안한다. 그리고 제안한 근사식이 얼마나 참값에 가까운지 판단하기 위하여 시뮬레이션을 통하여 얻어진 오버슛의 분포함수와 비교한다.

주요용어: 대기모형, 얼랑분포, 작업부하량과정, 오버슛.

¹교신저자: (305-764) 대전시 유성구 궁동 충남대학교, 정보통계학과. E-mail: bae-jongho@cnu.ac.kr