

## 삼각형 메쉬 상에서의 미분 연산자와 그 응용

백승엽<sup>1\*</sup> · 감동욱<sup>2</sup> · 이건우<sup>2</sup>

<sup>1</sup>서울대학교 정밀기계설계공동연구소, <sup>2</sup>서울대학교 기계항공공학부

### Differential Operators on a Triangular Mesh and Their Applications

Seung-Yeob Baek<sup>1\*</sup>, Dong-Uk Kam<sup>2</sup>, and Kunwoo Lee<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Advanced Machinery and Design, Seoul National University

<sup>2</sup>School of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul National University

Received 16 September 2014; received in revised form 8 December 2014; accepted 8 December 2014

#### ABSTRACT

Solving partial differential equations (PDEs) on a manifold setting is frequently faced problem in CAD, CAM and CAE. However, unlikely to a regular grid, solutions for those problems on a triangular mesh are not available in general, as there are no well-established intrinsic differential operators. Considering that a triangular mesh is a powerful tool for representing a highly-complicated geometry, this problem must be tackled for improving the capabilities of many geometry processing algorithms. In this paper, we introduce mathematically well-defined differential operators on a triangular mesh setup, and show some examples of their applications. Through this, it is expected that many CAD/CAM/CAE application will be benefited, as it provides a mathematically rigorous solution for a PDE problem which was not available before.

**Key Words:** Computational geometry, Digital geometry processing, Discrete differential operators, Partial differential equations, Triangular meshes

## 1. 서 론

미분 다양체(differential manifold) 상에서 정의된 편미분방정식(partial differential equations, PDE)을 푸는 것은 컴퓨터이용설계/제조/해석 및 기하모델링 등의 분야에서 자주 마주하게 되는 문제이다. 이는 열전달 방정식, 확산 방정식, 유동 방정식 등 대표적인 역학 문제들에 대한 계산 뿐만 아니라, 곡면 스무딩 및 정형(smoothing/fairing), 연속 변형 최단 사이클(homotopic shortest cycle),

기하학적 구획 분할(geometric segmentation), 특징점 검출, 곡면 변형 및 편집, 측지선거리 계산(geodesic distance) 등의 순수 기하모델링 문제부터, 능동 윤곽선 모델(active contour model), 비등방성 영상 스무딩(anisotropic image smoothing) 등의 영상처리 문제에까지 이르는 광범위한 적용 분야를 가진다. 또한, 미분연산자 자체 만에 대한 해석으로도 기하 형상이 지니고 있는 고유한 특성들을 파악할 수 있다는 사실이 이미 밝혀진 바 있으며<sup>[1,2]</sup>, 이 또한 관련 분야에서의 중요한 연구 주제 중 하나이다.

이러한 문제들을 풀기 위해서는 미분 다양체 상에서 정의된 미분 연산자들을 그 기하학적 성질

\*Corresponding Author, bsy86@snu.ac.kr  
©2015 Society of CAD/CAM Engineers

을 유지한 채로 이산화(discretization)하는 것이 반드시 필요하다. 이러한 미분 연산자들로는 구배(gradient,  $\nabla$ ), 발산(divergence,  $\nabla \cdot$ ), 회전(curl,  $\nabla \times$ ), 라플라스-벨트라미(Laplace-Beltrami,  $\Delta := \nabla^2$ ) 연산자 등이 있으며, 이들 연산자는 미분 다양체의 기하학적 성질로부터 고유하게 정의되며, 이에 대한 구체적인 내용은 잠시 후 2장에서 다루도록 한다.

지금까지 많은 연구자들이 유한 요소 방법(FEM)이나 혹은 그와 유사한 이산화(discretization) 기법을 사용하여 이산 미분연산자를 정의한 바 있다. 특히 곡면 표현을 위해 가장 흔히 사용되는 삼각형 메쉬에 대해서, Meyer *et al.*<sup>[3]</sup>, Belkin *et al.*<sup>[4]</sup>, Kuznetsov *et al.*<sup>[5]</sup> 등의 연구가 이미 수행된 바 있다. 이러한 연구들은 특히 활용도가 높은 라플라스-벨트라미 연산자의 이산화에 주된 초점이 맞추어져 있으며, 그 외의 다른 미분 연산자들에 대한 연구 결과는 충분히 검토된 바 없다.

이러한 연구가 중요한 이유는 엄밀한 수학적 정의를 바탕으로 한 기하 알고리즘의 개발이 가능하기 때문이다. 실제로 잘 정의된 미분연산자들을 바탕으로 한 접근 방법들은, 일련의 휴리스틱이나 특수한 가정에 근거한 방법들에 비해 훨씬 더 예외적인 상황에 대해 강건하며, 안정적인 성능을 가진다. 특히나 문제가 훨씬 간결하게 형식화(formulation)될 수 있을 뿐만 아니라, 그 작동 원리가 수식으로부터 직관적이고 명쾌하기 때문에 다른 방법들에 비해 쉽게 이해할 수 있으며 구현이 간결하다.

본 논문에서는 삼각형 메쉬 상에서 이러한 문제들을 풀기 위한 미분연산자들을 정의하고 몇 가지 대표적인 편미분 방정식들을 소개하며, 실제로 이러한 이산 미분연산자들이 어떻게 문제에 적용되는지에 대해 살펴볼게 될 것이다. 이미 많이 연구된 바 있고 널리 통용되는 미분 연산자들에 대해서는 기존의 정의를 충실히 따르되, 충분한 논의가 이루어지지 않은 연산자들에 대해서는 새로운 정의를 제안한다. 특히 새로이 정의되는 연산자들에 관해서는, 그 배경이 되는 수학적 이론, 특히 미적분학의 기본 원리인 스토크스 정리에 기반하여 정의를 유도하되, 기존의 미분 연산자들과 완벽히 호환 가능하도록 하는 것에 초점을 맞추도록 한다.

## 2. 수학적 배경

### 2.1 곡면 미분기하학

다양체란 국소적으로 유클리드 공간(Euclidean Space)과 위상동형(homeomorphic)인 공간을 의미한다. 즉, 국소적으로는 유클리드 공간의 기하 구조와 유사한 성질을 띠는 위상공간을 의미하며, 유클리드 공간의 일반화라고도 볼 수 있겠다. 또한, 이러한 다양체가 미분 가능하다면 우리는 이를 미분다양체(differentiable manifold)라고 하며, 이 때 계량텐서(metric tensor)가 함께 주어져 있다면 이를 리만다양체(Riemannian manifold)라고 부른다. 본 논문에서는 오로지 3차원 유클리드 공간에 몰입(immersed)된 2차원 리만다양체를 상정하여 논의를 국한할 것이나, 다른 차원에 대해서도 가능한 한 일반성을 잃지 않는 방향으로 본질의 논의를 진행하게 될 것이다. 이 때, 몰입이라 함은 매장(embedding)과 유사한 개념으로서, 다른 공간 안에 부분집합으로 포함된 공간 정도로 이해할 수 있겠다. 이 때, 몰입은 자기교차(self-intersection)를 허용한다는 점에서 매장과 구분된다.

기본적인 개념에 대한 논의를 위해  $m$  차원 리만다양체  $\mathcal{M}$ 과 그 경계  $\partial\mathcal{M}$ 이 주어졌다고 하자. 이 때,  $\mathcal{M}$ 는 콤팩트(compact)한 연결(connected) 공간이며, 가향(orientable)임을 상정한다. 즉  $\mathcal{M}$ 은 (1) 닫혀 있고(closed) 유계(bounded)인  $\mathbb{R}^m$ 의 부분집합이며(=콤팩트), (2) 서로소(disjoint)인 두 공집합(empty set)이 아닌 개집합(open set)들의 합집합(union)으로 나타낼 수 없으며(=연결공간), (3) 안팎을 구분할 수 있는(=가향) 다양체이다.

이 때,  $\mathcal{M}$ 을 정의역으로 가지는 초월곡면(hypersurface)  $f$ 는 미분 가능한 사상  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 로 표현할 수 있다. 또한  $f$ 의 미분사상(differential)  $df$ 는 각 점에서 국소적으로  $f$ 를 선형근사하는 선형사상(linear mapping)이며, 이를 통해 각 점에서의 접공간(tangent space)을 형성한다. 이 때, 각 접공간들의 합집합을 접다발(tangent bundle)이라고 하며, 접두문자  $T$ 를 이용하여 나타내도록 한다. 따라서 미분사상  $df$ 는  $\mathcal{M}$ 의 접다발  $T\mathcal{M}$ 으로부터  $\mathbb{R}^n$ 의 접다발  $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ 으로의 선형사상, 즉  $df: T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이다. 또한 정의역  $D$ 에서 정의된 접벡터장(tangent vector field)  $X$ 에 대하여, 그 미분사상  $df(X)$ 를  $X$ 의 뒤편(pushforward)이라고 하며, 반

대로  $X$ 를  $df(X)$ 의 당김(pullback)이라고 한다.

한편  $f$ 를 몰입이라고 하면, 이에 따라 유도된 리만계량(induced Riemannian metric)을 식 (1)과 같이 정의할 수 있다:

$$g(X, Y) := \langle df(X), df(Y) \rangle \quad (1)$$

이는 때로 제1기본형식(first fundamental form,  $I(X, Y)$ )이라고 부르기도 한다.

한편, 단위 법벡터장(unit normal field)는 매끈하게 분포해 있는 단위 벡터장으로서 사상  $N: M \rightarrow S^{n-1}$ 으로 나타내며 (단  $S^{n-1}$ 는  $(n-1)$ 차원 구, 즉  $n$ 차원 단위벡터들의 집합을 의미한다.), 가우스 사상(Gauss map)이라고 부르기도 한다. 가우스 사상  $N$ 은 반드시 식 (2)를 만족해야 한다:

$$df(SX) = dN(X), \forall X \quad (2)$$

이 때,  $N$ 은 단위 벡터장, 즉 길이가 변화하지 않는 벡터 장이므로, 그에 대한 미분사상  $dN$ 은 항상  $N$ 에 수직한 벡터만을 내어놓는다. 즉  $dN$ 은 곡면  $f$ 의 접벡터장이며, Weingarten 사상(Weingarten map)이라고 부르기도 한다. 또한  $dN$ 이  $f$ 의 접벡터장이라는 사실로부터 식 (3)을 만족하는 자기 준동형사상(endomorphism, =정의역과 공역이 같은 사상)  $S: TM \rightarrow TM$ 이 항상 존재함을 알 수 있다:

$$df(SX) = dN(X), \forall X \quad (3)$$

이러한 사상  $S$ 를 모양연산자(shape operator)라고 부르며, 이를 이용하여 식 (4)와 같이 제2기본형식(second fundamental form)을 정의할 수 있다:

$$\begin{aligned} II(X, Y) &:= -g(SX, Y) \\ &= -\langle dN(X), df(Y) \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

한편, 곡면에서의 미적분에 대해 알아보기 위하여 다음의 개념들을 살펴보기로 하자. 우선 어파인 접속(affine connection)이란, 추상적으로 설명하자면 매끈한 다양체 상에서 서로 인접한 접공간들을 ‘접착’하여 마치 하나의 고정된 벡터공간으로 보고, 다양체 상에 주어진 접벡터장을 이러한 일체 된 공간에서 값을 가지는 함수인 듯이 미분할 수 있게 해주는 도구이며, 방향미분의 일반화로 생각할 수 있다. 쉽게 생각해서 곡면 위의 한 점에서 다른 점으로 옮겨갈 때에 접공간이 어

떻게 변화하는지를 의미한다고 보면 된다. 특히, 리만다양체에 대하여 (1) 계량텐서와 호환 가능하고( $\nabla g = 0$ ), (2) 비틀림이 없는(torsion free) 성질을 만족하는 유일한 어파인 접속이 존재하는데, 이를 레비-치비타 접속(Levi-Civita connection)이라고 하며 기호로  $\nabla$ 로 나타낸다. 수많은 종류의 접속들 중에서 레비-치비타 접속이 중요하게 다루어지는 이유는, 우리가 흔히 다루는 유클리드 공간으로 레비-치비타 접속의 개념을 옮겨왔을 때, 이는 정확히 특정 방향으로의 편미분  $\partial$ 으로 대응되기 때문이다. 즉 바꾸어 말해, 레비-치비타 접속은 유클리드 공간상의 (일반적인) 미분 연산의 개념을 곡면 상으로 확장시킨 개념이기 때문에, 유클리드 공간상에서 행해왔던 미적분학의 개념을 그대로 옮겨오는 것이 가능하게 한다. 따라서 유클리드 공간에서 정의되었던 구배, 발산, 회전, 라플라스-벨트라미 연산자 역시도 별도의 추가적인 개념의 도입없이도 곡면 상으로 확장할 수 있다.

## 2.2 삼각형 메쉬와 쌍대 메쉬

삼각형 메쉬는 임의 형상의 다양체를 이산화하여 다루기에 매우 적합한 그래프 구조이다. 삼각형 메쉬는 좀더 엄밀하게는 모든 면들이 다양체를 빠짐없이 덮고 있는 2차원 단체적 복체(simplicial 2-complex)로 볼 수 있으며, 이와 관련된 이론은 다음과 같다.

우선 단체(simplex)란 쉽게 말해 삼각형이나 사면체의 개념을 임의의 차원으로 확장시킨 것이다. 특히  $k$ -단체( $k$ -simplex)란,  $(k+1)$ 개의 독립적인 점들에 대한 볼록포(convex hull)를 의미하며 삼각형의 개념을 임의의  $k$ 차원으로 확장시킨 것이다. 이 때, 이러한 점들 중,  $(m+1)$ 개의 점들을 골라 만든 임의의 부분집합에 대한 볼록포를 면(face)이라고 하며, 그 차원을 구분하기 위해  $m$ -면( $m$ -face)이라고 부르기도 한다. 즉 0-면은 단체를 형성하는 개개의 점, 혹은 꼭지점(vertex)를 의미하며, 1-면은 임의의 두 꼭지점이 이어져 만들어진 선분, 혹은 모서리(edge), 2-면은 임의의 세 꼭지점들이 형성하는 삼각형이 된다. 논의의 편의를 위하여 앞으로  $m$ -면을  $\sigma^m$ 으로 나타내도록 한다. 이러한 단체의 정의에 따라 단체적 복체  $\mathcal{K}$ 란 여러 단체들을 원소로 갖는 집합 혹은 위상공간으로서, (1) 각 단체의 모든 면이 각각 그 또한  $\mathcal{K}$

의 원소여야 하고, (2)  $\mathcal{K}$ 의 원소인 임의의 두 단체  $\sigma_1, \sigma_2$ 에 대하여 그 교집합이  $\sigma_1$ 과  $\sigma_2$ 의 면인 성질을 만족하는 집합을 의미한다.

또한 쌍대 메쉬(dual mesh)란 어떠한 메쉬에 대하여 켈레를 이루는 짝을 의미하며, 쉽게 말해 원래 메쉬의 구조를 ‘뒤집어서’ 구성한 것을 의미한다. 즉, 원 메쉬의 꼭지점을 쌍대메쉬의 면으로, 원 메쉬의 면을 쌍대메쉬의 꼭지점으로 각각 대응시킬 수 있을진대, 이러한 방식으로 원 메쉬를 변환한 구조를 쌍대메쉬라고 한다. 이 때, 쌍대메쉬를 구성하는 요소들을 명확히 구분짓기 위하여 쌍대메쉬의 꼭지점은 쌍대 꼭지점 혹은 쌍대점으로, 모서리는 쌍대모서리로, 면은 쌍대면으로 각각 지칭하기로 한다. 또한, 기호로는 호지 별(Hodge star)  $\star$ 을 이용하여 대응하기로 하며,  $\star\sigma^0$ 은 쌍대면,  $\star\sigma^1$ 은 쌍대모서리,  $\star\sigma^2$ 는 쌍대점을 나타내기로 한다. 참고로 호지 별은 리만 다양체의 호지 이론에서 기인한 표기 방법이며, 간단하게 말해 원 공간의 요소를 쌍대 공간의 요소로 변환해주는 연산자로 생각할 수 있다.

한편, 앞서 언급한 바와 같이 우리가 다루게 될 곡면은 유향이므로, 메쉬와 그 쌍대메쉬에서 방향의 개념을 정의해야 할 필요가 있다. 이에 대해 본 논문에서는 흔히 사용되는 오른손 법칙, 즉 반시계방향의 회전을 양으로 하는 식으로 방향을 정의한다.

### 3. 이산화

앞선 장에서 살펴본 내용들을 바탕으로 하여 본 장에서는 우리가 흔히 사용하는 대표적인 미분 연산자인 구배, 발산, 회전 및 라플라스-벨트라미 연산자를 이산화한다. 이산화 과정에서, 기존 대부분의 방식들과 차별화되는 중요한 가정은 다음과 같다. 연속된 곡면과 그 위에서 정의된 함수  $f$ 를 메쉬로 이산화하는 과정에서, 각 점  $x_i$ 가 가지는 함수값  $f_i := f(x_i)$ 는, 연속인 함수  $f$ 를  $x_i$ 에서 채취(sampling)한 값이 아니라,  $x_i$ 를 포함하는 국소 영역  $R_i$ 에 대해 함수 값들의 평균값으로 정의한다. 즉  $f_i$ 는 식 (5)와 같다.

$$f_i = \frac{1}{A_i} \iint_{R_i} f dA \quad (5)$$

식 (5)의  $A_i$ 는 영역  $R_i$ 의 면적  $\iint_{R_i} dA$ 를 의미한

다. 한 가지 짚고 넘어가야 할 사실은  $f$ 가 반드시 스칼라 함수일 필요는 없다는 점이며, 벡터 함수에 대해서도 동일한 원리가 적용된다. 이러한 가정에 근거하면 삼각형 메쉬에서 점  $x_i$ 는 각 꼭지점  $\sigma_i^0$ 에 대응되며, 주변 국소 영역  $R_i$ 는 자연스럽게 쌍대면  $\star\sigma_i^0$ 에 대응된다.

또 한 가지 중요한 가정은, 각 삼각형(면)에서 함수  $f$ 는 선형적으로 변화한다는 것이다. 즉 함수  $f$ 에 대한 삼각형 메쉬 상의 이산화는, 부분 선형 근사(piecewise linear approximation)로 간주한다. 이러한 가정은 앞선 평균치에 관한 가정과 정확히 호환 가능하며, 이에 대한 증명은 자명하므로 생략한다. 이 때, 이러한 선형 근사를 보다 수학적으로 명쾌하게 기술하기 위하여 선형 보간 함수  $\xi$ 를 도입하기로 한다. 함수  $\xi_{\sigma^0}$ 는 각 삼각형  $\sigma^0$ 와 그에 포함된 꼭지점  $\sigma^0$ 에 대해 정의되며,  $\sigma^0$ 에서 함수값 1을 갖고,  $\sigma^0$  맞은편 모서리 상에서 함수값 0을 가진다. 또한 그 중간 임의의 위치에서의 값들은 선형적으로 변화한다. 덧붙여, 이로부터 함수  $\xi_{\sigma^0}$ 의 구배  $\nabla \xi_{\sigma^0}$ 는 크기가  $1/h$ 이며 (단,  $h$ 는  $\sigma^0$  맞은편 모서리를 바닥으로 하는 삼각형의 높이), 방향은  $\sigma^0$  맞은편 모서리로부터  $\sigma^0$ 를 향하는 쪽으로 정해진다는 점이 자명하게 결정된다.

한편, 이산화 된 미분연산자를 실제 공학 문제에 적용함에 있어서 다양한 조건들이 주어질 수 있기 때문에, 비단 원 메쉬의 꼭지점들 뿐만 아니라, 쌍대 메쉬의 꼭지점들에 대해서도 미분 연산자를 정의하는 것이 필요할 수 있다. 이 경우 원 메쉬에서의 모든 아날로지(analogy)가 쌍대 메쉬에서도 동일하게 적용되며, 이 두 경우에서 각각 정의된 연산자들은 서로 호환 가능하여야 한다. 본 논문에서는 원 메쉬에서의 연산자와 쌍대 메쉬에서의 연산자를 각각 아래 첨자  $\sigma^0$ 와  $\star\sigma^0$ 로 나타내도록 하며, 문맥 상 연산자가 정의된 도메인이 명확할 경우에는 첨자를 생략하도록 한다.

#### 3.1 구배

리만 다양체 상에 정의된 물입  $f$ 가 주어져 있을 때, 임의의 벡터장  $X$ 에 대해 항상 다음을 만족하는 벡터장  $\nabla f$ 가 존재하는데, 이를 기울기 또는 구배라고 한다:

$$g(\nabla f, X) = D_X f \quad (6)$$

식 (6)의  $D_X$ 는  $X$  방향으로의 방향 미분을 의미

한다. 좀 더 직관적으로 말하자면, 구배란  $f$ 의 최대 증가율을 나타내는 벡터장을 뜻한다고 볼 수도 있다.

우선 각 삼각형, 즉 쌍대점  $\star\sigma^2$ 에 대하여 구배는 다음과 같이 자명하게 정의된다. 앞서 한 삼각형에 대해  $f$ 의 이산화는 부분 선형 근사로 보기로 한 가정에 의거하여, 식 (7)과 같이 선형 보간 함수  $\xi_{\sigma^2}$ 로 표현될 수 있다.

$$f_{\star\sigma^2}(x) = \sum_{\sigma^0 \subset \sigma^2} f(\sigma^0) \xi_{\sigma^2}^{\sigma^0} \quad (7)$$

따라서 삼각형  $\sigma^2$  위의 한 점  $x$ 에서의 구배는 식 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \sum_{\sigma^0 \in \sigma^2} f(\sigma^0) \nabla \xi_{\sigma^2}^{\sigma^0}(x) \\ &= \sum_{\sigma^0 \in \sigma^2} f(\sigma^0) \frac{1(N \times e)}{h \|e\|} \\ &= \frac{1}{2A_{\sigma^2}} \sum_{\sigma^0 \subset \sigma^2} f(\sigma^0)(N \times e) \quad (8) \end{aligned}$$

$$(\because A_{\sigma^2} = \frac{1}{2} \|e\| h)$$

식  $A_{\sigma^2}$ 는 삼각형  $\sigma^2$ 의 면적을 의미하며, 나머지 기호들은 Fig. 1을 따른다. 이 때,  $\nabla \xi_{\sigma^2}^{\sigma^0}(x)$ 가 삼각형  $\sigma^2$ 에서 상수 함수이므로,  $\nabla f(x)$  역시도 삼각형 내의 모든 점에 대해 동일한 값을 가진다. 그러므로 (한 점에서의 이산화는 그 주변 영역의 평균을 취하기로 한 가정으로부터) 쌍대점  $\star\sigma^2$ 에서의 구배는 식 (9)와 같이 정의된다.

$$\nabla_{\star\sigma^2} f := \frac{1}{2A_{\sigma^2}} \sum_{\sigma^0 \subset \sigma^2} f(\sigma^0)(N \times e) \quad (9)$$

또한, 꼭지점  $\sigma^0$ 에서의 구배 역시도 이와 유사한 방법으로 계산할 수 있다. 앞서 우리는 한 삼각형 내에서의 구배가 상수함수임을 알 수 있었

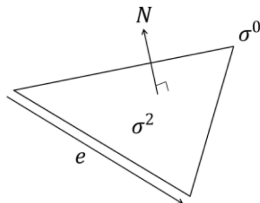


Fig. 1 Notations for defining the discrete gradient

다. 그러므로 꼭지점  $\sigma^0$  주변의 국소 영역 (즉, 쌍대면)  $\star\sigma^0$ 에 대하여, 구배  $\nabla f(x)$ 의 적분은 식 (10)과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} \iint_{\star\sigma^0} \nabla f(x) dA &= \sum_{\sigma^2} \iint_{\sigma^2 \cap \star\sigma^0} \nabla_{\star\sigma^2} f dA \\ &= \sum_{\sigma^2} \nabla_{\star\sigma^2} f \iint_{\sigma^2 \cap \star\sigma^0} dA \quad (10) \end{aligned}$$

따라서 꼭지점  $\sigma^0$ 에서의 구배는 식 (11)과 같이 정의된다.

$$\nabla_{\sigma^0} f := \frac{\sum_{\sigma^2} A_{\sigma^2 \cap \star\sigma^0} \nabla_{\star\sigma^2} f}{\sum_{\sigma^2} A_{\sigma^2 \cap \star\sigma^0}} \quad (11)$$

이는 곧 주변 삼각형들에서의 구배  $\nabla_{\star\sigma^2} f$ 에 대한 면적 가중 평균(area-weighted average)과 같다.

### 3.2 발산

발산 정리(혹은 가우스 정리)는 어떠한 곡면  $\Omega$ 와 그 경계곡선  $\partial\Omega$ 에 대해 식 (12)가 성립함을 기술하고 있다.

$$\iint_{\Omega} \nabla \cdot X dA = \oint_{\partial\Omega} \langle X, n \rangle dr \quad (12)$$

식 (12)의  $X$ 는 곡면 위에서 정의된 임의의 벡터장을 의미하며,  $n$ 은 경계곡선  $\partial\Omega$ 에서의 바깥쪽 방향 법선 벡터를 의미한다.

따라서 삼각형 메쉬 상의 한 꼭지점  $\sigma^0$ 와 그 쌍대면  $\star\sigma^0$ 에 대해 식 (13)이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \iint_{\star\sigma^0} \nabla \cdot X dA &= \oint_{\partial(\star\sigma^0)} \langle X, n \rangle dr \\ &= \sum_{\sigma^2} \oint_{\sigma^2 \cap \partial(\star\sigma^0)} \langle X, n \rangle dr \quad (13) \end{aligned}$$

이는 곧 Fig. 2에서 보는 바와 같이 꼭지점  $\sigma^0$ 를 포함하는 삼각형  $\sigma^2$  각각에 대하여  $\star\sigma^0$ 의 경계다각형을 따라 선적분한 결과를 모두 더한 것

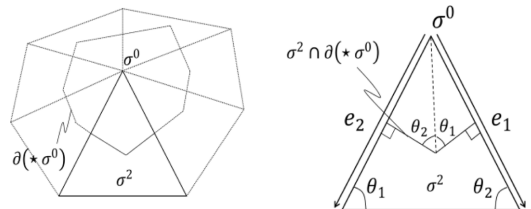


Fig. 2 Notations for defining the discrete divergence

이며, 각각의 삼각형에 대해서는 식 (14)와 같이 선적분값이 계산된다.

$$\begin{aligned} & \oint_{\sigma^2 \cap \partial(\star\sigma^0)} \langle X, n \rangle dr \\ &= \frac{\|e_1\|}{2} \cot\theta_1 \langle X, \frac{e_1}{\|e_1\|} \rangle + \frac{\|e_2\|}{2} \cot\theta_2 \langle X, \frac{e_2}{\|e_2\|} \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\cot\theta_1 \langle X, e_1 \rangle + \cot\theta_2 \langle X, e_2 \rangle) \quad (14) \end{aligned}$$

따라서 꼭지점  $\sigma^0$  위에서 발산은 식 (15)와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \nabla_{\star\sigma^0} \cdot X &= \frac{\iint_{\star\sigma^0} \nabla \cdot X dA}{\iint_{\star\sigma^0} dA} \\ &= \frac{1}{2A_{\star\sigma^0}} \sum \cot\theta_1 \langle X, e_1 \rangle + \cot\theta_2 \langle X, e_2 \rangle \quad (15) \end{aligned}$$

여기서  $A_{\star\sigma^0}$  는  $\star\sigma^0$ 의 면적을 의미한다.

한편, 각 면에서의 발산 연산자를 얻기 위하여, 동일한 원리를 쌍대점  $\star\sigma^2$ 에 대해서도 적용할 수 있다. 쌍대점  $\star\sigma^2$ 와 그 주변 국소 영역  $\sigma^2$ 에 대하여 발산 정리로부터 식 (16)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma^2} \nabla \cdot X dA &= \oint_{\partial(\sigma^2)} \langle X, n \rangle dr \\ &= \sum_{\sigma^1 \subset \sigma^2} \oint_{\sigma^1} \langle X, n \rangle dr \quad (16) \end{aligned}$$

그런데 각 모서리  $\sigma^1$ 에 대하여 그 양 꼭지점에 정의된 벡터장을  $X_1, X_2$ 라고 할 때, 기본 가정에 의하여  $\sigma^1$ 을 등분한 두 구간  $\sigma_1^1, \sigma_2^1$ 에서 벡터장이  $X_1$ 과  $X_2$ 로 각각 상수함수임을 알 수 있다. 따라서  $\sigma^1$ 의 시작점과 끝점을 잇는 벡터를  $e$ 라고 할 때, (벡터의 방향은 삼각형의 방향 규칙으로부터 자명하다.) 식 (17)이 성립한다.

$$\begin{aligned} \oint_{\sigma^1} \langle X, n \rangle dr &= \langle X_1, \frac{e \times N}{\|e\|} \rangle \oint_{\sigma_1^1} dr \\ &+ \langle X_2, \frac{e \times N}{\|e\|} \rangle \oint_{\sigma_2^1} dr \\ &= \frac{1}{2} (\langle X_1, e \times N \rangle + \langle X_2, e \times N \rangle) \quad (17) \end{aligned}$$

따라서 쌍대점  $\star\sigma^2$ 에서의 발산은 식 (18)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \nabla_{\star\sigma^2} \cdot X &= \frac{\iint_{\sigma^2} \nabla \cdot X dA}{\iint_{\sigma^2} dA} \\ &= \frac{1}{2A_{\sigma^2}} \sum_{\sigma^1 \subset \sigma^2} \oint_{\sigma^1} \langle X_1, e \times N \rangle + \langle X_2, e \times N \rangle \quad (18) \end{aligned}$$

### 3.3 회전

켈빈-스토크스(Kelvin-Stokes) 정리는 어떠한 곡면  $\Omega$ 와 그 경계곡선  $\partial\Omega$ 에 대해 식 (19)가 성립함을 기술하고 있다.

$$\iint_{\Omega} \langle \nabla \times X, N \rangle dA = \int_{\partial\Omega} \langle X, t \rangle dr \quad (19)$$

여기서  $t$ 는  $\partial\Omega$ 의 접선 방향으로의 단위 벡터장이다. 또한 우리가 고려하게 될 벡터장은 다양체의 접공간에서만 정의되므로, 회전은 반드시 법벡터  $N$ 과 동일한 방향으로만 일어난다는 점을 상기하여야 한다. 즉  $\nabla \times X = \langle \nabla \times X, N \rangle N$ 이다.

한편, 켈빈-스토크스 정리와 앞서 설명한 발산 정리를 비교해볼 때 한 가지 특징적인 사실은 사실 발산과 회전은 서로 수직관계라는 점이다. 좀 더 엄밀히 말하면 벡터장  $X$ 를 반시계방향(정방향)으로 90도 회전한 벡터장  $Y$ 가 있다고 할 때,  $(\nabla \times Y, N) = \nabla \cdot X$ 가 성립한다.

따라서 삼각형 메쉬에서의 회전의 정의는 앞 절에서 살펴본 발산의 정의로부터 자명하게 유도될 수 있으며, 본 논문에서는 유도과정 없이 결과만 기술하기로 한다. 참고로, 법벡터  $N$ 과의 외적이 곧 90도 회전을 의미한다는 점을 상기한다면 대단히 간단하게 유도될 수 있다.

우선 삼각형 메쉬 상의 한 꼭지점  $\sigma^0$ 에 대해 회전은 식 (20)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \nabla_{\star\sigma^0} \times X &= \frac{\iint_{\star\sigma^0} \langle \nabla \times X, N \rangle dA}{\iint_{\star\sigma^0} dA} N \\ &= \frac{1}{2A_{\star\sigma^0}} \sum (\cot\theta_1 \langle X, N \times e_1 \rangle \\ &+ \cot\theta_2 \langle X, N \times e_2 \rangle) N \quad (20) \end{aligned}$$

또한 쌍대점  $\star\sigma^2$ 에 대해 회전은 식 (21)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}\nabla_{\star\sigma^2} \times X &= \frac{\iint_{\sigma^2} \langle \nabla \times X, N \rangle dA}{\iint_{\sigma^2} dA} N \\ &= \frac{1}{2A} \sum_{\sigma^2_{\sigma^1} \subset \sigma^2} (\langle X_1, e \rangle + \langle X_2, e \rangle) N\end{aligned}\quad (21)$$

### 3.4 라플라스-벨트라미

라플라스-벨트라미 연산자는 유클리드 공간에서의 라플라시안(Laplacian)을 임의의 다양체로 확장한 것이다. 라플라스-벨트라미 연산자의 정의는 라플라시안과 동일하게 ‘구배의 발산’으로 정의되며 수식으로는 식 (22)와 같이 표현된다.

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f \quad (22)$$

이미 우리는 구배와 발산을 삼각형 메쉬에 대해서 정의하였으므로, 라플라스-벨트라미 연산자 역시도 이를 이용하여 정의할 수 있다. 즉

$$\Delta f = \nabla_{\sigma^0} \cdot \nabla_{\star\sigma^2} f \quad (23)$$

이거나

$$\Delta f = \nabla_{\star\sigma^2} \cdot \nabla_{\sigma^0} f \quad (24)$$

이다. 앞선 구배와 발산의 정의를 대입하여 위 식을 풀어쓴 후 다시 정리하면, 식 (25)와 같이 흔히 알려진 코탄젠트(cotangent) 라플라시안과 동일한 정의를 얻는다.

$$\Delta f = \frac{1}{2} \sum_j (\cot \alpha + \cot \beta) (f(\sigma_j^0) - f(\sigma^0)) \quad (25)$$

여기서  $\sigma_j^0$ 는  $\sigma^0$ 에 이웃한 꼭지점들을 의미한다. 이에 대한 구체적인 유도과정은 자명하므로 생략하도록 한다.

### 3.5 행렬화

앞서 정의한 각 이산 미분 연산자들을 살펴보면, 한 점과 (혹은 쌍대점) 그 이웃들간의 관계식 형태로 정의가 주어지는 것을 알 수 있다. 특히 이러한 관계식은 모두 선형 연산에만 기반하여 정의가 되어 있음을 알 수 있는데, 이로부터 각 미분연산자들을 행렬 연산자로 표현할 수 있다는 사실을 유추할 수 있다.

좀 더 구체적으로 설명하자면, 각 꼭지점에서 알고 있는 함수값  $f$ 들을 하나의 긴 벡터로 나열한 것을  $\mathbf{f}$ 라고 할 때, 각 꼭지점에서의 구배는 식

(26)과 같은 행렬식으로 표현된다.

$$\nabla_{\sigma^0} f = \mathbf{G}_{\sigma^0} \mathbf{f} \quad (26)$$

또한, 이와 유사하게 각 쌍대점에서의 구배는 식 (27)과 같은 행렬식으로 표현된다.

$$\nabla_{\star\sigma^2} f = \mathbf{G}_{\star\sigma^2} \mathbf{f} \quad (27)$$

이와 유사한 방식을 발산, 회전, 라플라스-벨트라미 연산자에도 동일하게 적용하면 각각 식 (28)과 같은 행렬표현을 얻는다.

$$\nabla_{\sigma^0} \cdot X = \mathbf{D}_{\sigma^0} \mathbf{X}_{\star\sigma^2}$$

$$\nabla_{\star\sigma^2} \cdot X = \mathbf{D}_{\star\sigma^2} \mathbf{X}_{\sigma^0}$$

$$\nabla_{\sigma^0} \times X = \mathbf{C}_{\sigma^0} \mathbf{X}_{\star\sigma^2}$$

$$\nabla_{\star\sigma^2} \times X = \mathbf{C}_{\star\sigma^2} \mathbf{X}_{\sigma^0}$$

$$\Delta f = \mathbf{L} \mathbf{f} \quad (28)$$

여기서  $\mathbf{X}_{\sigma^0}$ 는 각 꼭지점에서 정의된 벡터장을 하나의 긴 벡터로 나열한 것이며,  $\mathbf{X}_{\star\sigma^2}$ 는 동일한 것을 각 쌍대점에서 정의된 벡터장에 대해 적용한 것이다. 또한, 이와 같은 방식으로 표현한 행렬 미분 연산자들은 대부분의 원소가 0인 희소행렬(sparse matrix)이라는 사실을 쉽게 유추할 수 있으며, 이를 이용해 연산을 가속화 할 수 있다.

## 4. 적용 사례

본 장에서는 앞서 살펴본 미분연산자들이 실제 문제에서 어떻게 적용될 수 있는 지에 대해 살펴보고 이를 통해 본 연구의 효용성을 검증한다. 여기서 한 가지 명확히 해야 할 사실은, 아래에서 소개할 내용들이 어디까지나, 앞서 소개된 미분연산자들이 임의의 곡면 상에서 정의된 편미분방정식 문제들을 충분히 풀어낼 수 있고, 아무런 휴리스틱이나 추가적인 가정없이도 기존의 문제를 메쉬 곡면 상으로 옮겨올 수 있다는 사실을 증명하기 위하여 사용된다는 점이다. 따라서, 아래 예제들은 어디까지나 독자들의 이해를 돕고 본 논문의 효용성을 간접적으로 보여주기 위한 것에 불과하며, 경우에 따라 편미분방정식 형태의 문제 해법보다 다른 알고리즘이나 휴리스틱을 이용한 문제 해법이 더욱 효과적일 수도 있다는 점을 명시하는 바이다. (물론 대부분의 경우 정확한 공식

화에 기반한 편미분 방정식 해법이 훨씬 나은 성능을 보이는 것이 사실이다.) 또한, 본 논문의 초점은 미분연산자 그 자체에 있으며, 미분 방정식을 위한 적분 기법에 대해서는 논외로 하므로, 얼마나 더 정확한 적분 방법을 사용하느냐에 따라서도 아래 예제의 결과가 조금씩은 차이 날 수 있으며, 연산 속도에도 크게 영향을 미칠 수 있음을 상기하여야 할 것이다.

#### 4.1 푸아송 방정식

푸아송 방정식(Poisson's equation)은 잘 알려진 2차 편미분 방정식의 종류 중 하나로서, 라플라스 방정식( $\Delta f = 0$ )을 일반화 한 것이다:

$$\Delta f = g \quad (29)$$

여기서  $f$ 는 미지함수이며,  $g$ 는 다양체 위에 주어진 함수이다. 이러한 푸아송 방정식은 실제로 기하모델링, 편집, 곡면 재건, 벡터장 해석 등 다양한 분야에서 자주 등장하는 방정식 중 하나이다.

이에 대한 풀이는 이산 미분연산자를 이용하면 대단히 자명하다. 앞서 정의한 행렬 미분 연산자를 이용하여 푸아송 방정식을 다시 쓰면 식 (30)과 같다.

$$Lf = g \quad (30)$$

이 때, 라플라스-벨트라미 연산자는 일반적인 내적에 대해 준정부호(positive semi-definite)이므로<sup>[6]</sup>, 위의 선형 시스템에 대한 해가 존재하며 상수  $c$ 에 대해 유일하게 결정된다. 즉  $f$ 가 푸아송 방정식의 해라고 하면, 임의의 상수함수  $c$ 에 대하여  $f + c$ 역시도 해가 된다. 상수  $c$ 로 인한 해의 부정성(indefiniteness) 문제는 그 응용 분야에 따라 특정 점에 대한 구속 조건을 부가함으로써 해결할 수 있다.

한편, 실질적으로 푸아송 방정식이 가장 많이 사용되는 경우는 임의로 주어진 벡터장  $X$ 에 대하여  $\nabla f = X$ 를 만족하는 함수  $f$ 를 구하는 것이다. 이러한 문제는 결국 주어진 다양체 위에서 목적 함수  $\int_{\mathcal{M}} \|\nabla f - X\|^2 dA$ 를 최소화하는 문제와 동일하며, 그에 대한 해는 동치문제인 오일러-라그랑주(Euler-Lagrange) 방정식

$$\Delta f = \nabla \cdot X \quad (31)$$

을 푸는 것과 동일하다<sup>[7]</sup>.

Fig. 3은 실제로 이처럼 푸아송 방정식을 이용

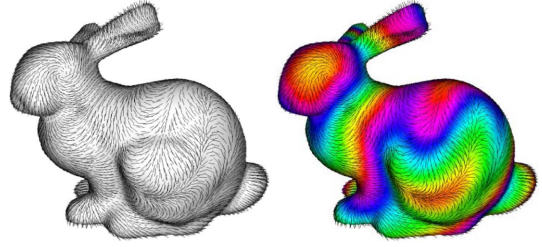


Fig. 3 A scalar field  $f$  (color map on the right) reconstructed from a given gradient field  $X$  (hairy black lines on the left) on a bunny surface

하여 주어진 벡터장  $X = \nabla f$ 에 상응하는 함수  $f$ 를 구해낸 결과물을 보여주고 있다. 이러한 결과는 곡면 재건 문제<sup>[8]</sup>나 최단 측지선 거리(shortest geodesic distance) 문제<sup>[9]</sup> 등 다양한 기하 문제에 적용이 가능하다.

#### 4.2 등방성/비등방성 스무딩

스무딩이란 주어진 신호를 매끈하게 퍼주는 기하 연산 중 하나이다. 이는 영상처리, 디지털 기하처리 등 다양한 적용 분야에 응용되는 중요한 문제이다. 이러한 스무딩 문제를 푸는 한 가지 방법으로 확산(diffusion) 방정식을 이용하는 방법이 있다.

확산 방정식은 원래 역학에서 확산이 발생하는 물질 또는 물리량의 밀도의 움직임에 기술하는 편미분 방정식이다. 대표적인 사례로는 열전달 분야에서 열전도를 설명하는 열전도 방정식(Heat equation)이 있다. 확산방정식의 일반적인 형태는 식 (32)와 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \cdot (K(f, x, t) \nabla f(x, t)) \quad (32)$$

여기서  $x$ 는 위치,  $t$ 는 시간을 나타내는 변수이며,  $K$ 는 확산 계수를 나타내는 텐서이다. 이 때, 확산 계수  $K$ 가 상수이면 모든 방향과 위치에서 동일한 양만큼 확산하는 등방성확산에 해당하며, 식 (33)과 같은 선형 방정식으로 귀착된다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \nabla \cdot \nabla f(x, t) = K \nabla^2 f(x, t) \quad (33)$$

스무딩 연산 역시도 이러한 확산방정식에 근거하여 수식화 할 수 있다. 우선 앞서 논의한 행렬 미분연산자를 이용하여 확산방정식을 다시 쓰면





Fig. 4 Isotropic (middle) and anisotropic (right) smoothing of a given image (left)

식 (34)와 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{DKGf} \quad (34)$$

이 때, 시간에 대한 이산화를 위해 후진 오일러 방법(backward Euler method)을 사용하면 식 (35)와 같은  $\mathbf{f}$ 에 대한 업데이트 규칙을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}_{t+h} - \mathbf{f}_t}{h} &= \mathbf{DKGf}_{t+h} \\ \Rightarrow \mathbf{f}_{t+h} &= (\mathbf{I} - h\mathbf{DKG})^{-1} \mathbf{f}_t \end{aligned} \quad (35)$$

이 때,  $\mathbf{K}$ 가 상수라면 (등방성 스무딩) 위 식은  $\mathbf{f}_{t+h} = (\mathbf{I} - h\mathbf{L})^{-1} \mathbf{f}_t$ 로 바뀌며, 이는 곧 잘 알려진 라플라시안 스무딩 식과 동일하다.

Fig. 4는 휘어진 곡면 위에 그려진 이미지에 대한 등방성 스무딩(가운데)과 비등방성 스무딩(오른쪽) 결과물을 보여주고 있다. 이 때, 비등방성 스무딩에서 확산계수  $K$ 는  $K = 1/|\nabla f|$ 로 설정되었다. 이는 구배가 큰 위치, 즉 영상의 윤곽선 부근에서는 확산이 더디게 일어나도록 하기 위함이다. 실제로 결과물을 살펴보면, 등방성 확산의 경우 영상의 윤곽선이 모두 뭉개져 버리는 것을 알 수 있으나, 비등방성 확산에서는 이러한 윤곽선들이 잘 보존되고 있음을 알 수 있다.

### 4.3 레벨셋 기반의 곡선 수축

편미분 방정식의 흥미로운 응용 사례 중 하나로 측지적 능동 윤곽선 모델(geodesic active contour model)<sup>[10]</sup>이 있다. 원래 능동 윤곽선 모델<sup>[11]</sup>이란 영상(혹은 부피영상)에서 물체의 경계 곡선(부피영상에서는 면)을 검출해내기 위한 방법이다. 능동 윤곽선 모델은 신장탄성과 굽힘탄성을 가지는 가상의 곡선이 영상내에서 명암도의 구배에 따라 가장 구배가 큰 위치(=경계곡선)로 움직여가는 방식으로 물체의 경계곡선을 검출한

다. 이러한 방식을 레벨셋(level set) 방법을 이용하여 개선한 것이 바로 측지적 능동 윤곽선 모델이다. 이 때 레벨셋 방법이란, 어떠한 곡선(혹은 곡면)을 수학적으로 기술함에 있어서, 곡선이 놓여져 있는 공간상에 분포한 스칼라장을 이용하여 간접적으로 나타내는 방식이다. 이 때 이러한 스칼라장은 곡선 위에서 0인 값을 가지며 그 밖의 지역에서는 곡선으로부터의 거리에 비례하여 값을 가진다. 예를 들어 유클리드 평면 위에서 정의된 함수  $f(x, y) = r^2 - x^2 - y^2$ 는 중심이 원점에 위치하고 반지름이  $r$ 인 원을 표현하는 레벨셋 함수이다.

이 때, Osher *et al.*<sup>[12]</sup>에 의해 길이를 최소화하도록 하는 방향의 곡선의 움직임은 식 (36)과 같은 레벨셋 함수의 편미분방정식으로 표현이 가능함이 밝혀진 바 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{1 - k|\nabla f|^2} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) |\nabla f| \quad (36)$$

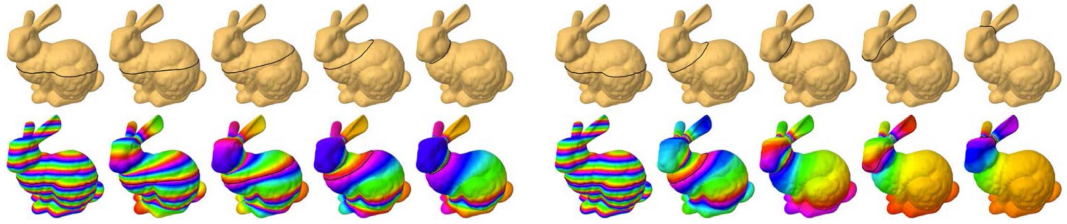
이 때,  $f$ 는 위치에 따른 영상의 명암도를 나타내는 함수이며  $k$ 는 레벨셋 곡선이 영상 윤곽선에 달라붙는 힘을 관장하는 파라미터이다. 위 식은 앞서 살펴본 확산 방정식과 매우 흡사한데, 실제로 계수  $\frac{1}{1 - k|\nabla f|^2}$ 는 비등방성 확산계수와 동일한 역할을 하며, 영상의 구배가 큰 곳에서 확산, 즉 레벨셋 곡선의 변화가 더디게 일어나도록 한다. 확산 방정식의 경우에서 보았던 바와 같이 위 식에 대해서도 식 (37)과 같은 이산 행렬식을 얻을 수 있다는 사실을 자명하게 유추할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{SDBMGf} \quad (37)$$

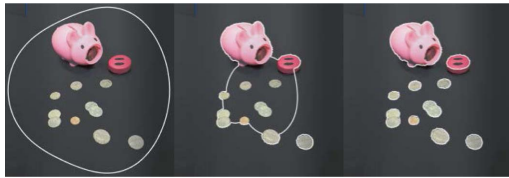
여기서  $\mathbf{S}$ 와  $\mathbf{M}$ 은 각 원소들이  $|\nabla f|$ ,  $1/|\nabla f|$ 인 대각행렬을 나타내며,  $\mathbf{B}$ 는 각 원소들이  $\frac{1}{1 - k|\nabla f|^2}$ 인 대각행렬이다. 또한 이로부터 식 (38)과 같은 후진 오일러 식을 얻는다.

$$\mathbf{f}_{t+h} = (\mathbf{I} - h\mathbf{SDBMG})^{-1} \mathbf{f}_t \quad (38)$$

Fig. 5는 이러한 곡선 수축 기법을 임의 형태의 곡면 모델에 적용해 본 결과물을 보여주고 있다. 이 때, 곡선의 움직임에 대해 보다 직관적으로 살펴보기 위하여 계수  $\frac{1}{1 - k|\nabla f|^2}$ 는 모든 위치에서



**Fig. 5** Level set based curve contraction on a bunny model. Upper rows show a curve evolving through time increment, and lower rows show corresponding level set function. Observe that a curve evolves to the local shortest cycle. Observe also that a smaller time step  $h$  (left) converges to the closest local shortest cycle, whereas a bigger time step (right) tends to “jump over” the closer ones



**Fig. 6** A geodesic active contour

1로 두었다. 그림에서 보는 바와 같이 곡선은 시간  $t$ 의 증가에 따라 점점 수축하여 국소적으로 최단 사이클을 형성할 수 있는 위치까지 수렴해간다. 특히 시간 스텝  $h$ 를 조절함으로써 수렴 위치 또한 조절할 수 있음을 확인할 수 있다.

한편 Fig. 6은 계수  $\frac{1}{1-k|\nabla I|^2}$ 의 영향까지 모두 고려한 결과물을 보여주고 있다. 원형의 초기 형상에서 출발한 곡선이 물체의 윤곽선으로 정확히 수렴하는 것을 볼 수 있다. 한 가지 주목할만한 사실은, 일반적인 능동 윤곽선 모델과는 달리 측지적 능동 윤곽선 모델의 경우 곡선의 위상(topology)이 자유자재로 변한다는 점이다. 실제로 Fig. 6의 곡선 변형 모습을 살펴보면, 하나의 루프를 형성 하던 곡선이 영상에 나타난 물체들의 모습에 따라 여러 개의 루프로 나뉘어지며 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이는 위상 변화가 자유롭지 못했던 기존 방법에 비해 큰 장점이라 할 수 있겠다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 연속인 다양체에서의 미분 연산자들을 삼각형 메쉬 위의 스칼라 및 벡터장에 대한 미분 연산자로 이산화 하는 방법에 대해 논의 하였다. 이를 위해 다양체 위에서의 기초적인 미분 기하학에 대해 알아보았으며, 이를 바탕으로

하여 삼각형 메쉬 위에서의 미분 연산자를 정의 하고 행렬식으로 표현하는 방법에 대해 알아보았다. 특히 이 과정에서 기존에 널리 통용되는 이산 라플라스 연산자의 정의에 대해서는 본래의 정의를 충실히 따르되, 기존의 논의가 충분치 아니한 구배, 발산, 회전 연산자에 대해서는 새로운 정의를 제시하였으며, 이러한 정의가 기존 라플라스 연산자의 정의와 완벽하게 호환 가능성을 보장하였다. 또한 이산화 과정에서 미적분학의 기본 법칙인 스토크스 정리를 만족하도록 하는 수학적으로 엄밀한 이산화 기법을 통해, 불필요한 가정이나 논리적인 비약없이 정교하게 미분 연산자를 이산화 할 수 있었다. 또한 이러한 이산 미분 연산자들이 기하 처리 분야에서 실제로 사용되는 몇 가지 예를 소개함으로써, 앞으로 다양한 문제들에 대해 널리 적용이 가능할 것임을 유추할 수 있었다. 이를 통해 본 논문이 여러 미분기하 문제를 해결하기 위한 참고 자료가 될 수 있기를 바라며, 향후 다양한 관련 연구들에 대한 밑바탕이 될 수 있기를 기대한다.

## 감사의 글

이 논문은 2013년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초 연구사업임(No. 2013R1A6A3A04058094).

## References

1. Reuter, M., Wolter, F.-E. and Niklas, P., 2006, Laplace-Beltrami Spectra as ‘Shape-DNA’ of Surfaces and Solids, *Computer-Aided Design*, 38(4), pp.342-366.
2. Sorkine, O., 2006, Differential Representations

- for Mesh Processing, *Computer Graphics Forum*, 25(4), pp.789-807.
3. Meyer, M., Desbrun, M., Schröder, P. and Barr, A.H., 2003, Discrete Differential-geometry Operators for Triangulated 2-manifolds, *Visualization and Mathematics III*, pp.35-57.
  4. Belkin, M., Sun, J. and Wang, Y., 2008, Discrete Laplace Operator on Meshed Surfaces, *Proceedings of the Twenty-fourth Annual Symposium on Computational Geometry*, pp.278-287.
  5. Kuznetsov, Y., Lipnikov, K. and Shashkov, M., 2004, The Mimetic Finite Difference Method on Polygonal Meshes for Diffusion-type Problems, *Computational Geosciences*, 8(4), pp.301-324.
  6. Rosenberg, S., 1997, *The Laplacian on a Riemannian Manifold*, Cambridge University Press, Cambridge.
  7. Schwarz, G., 1995, *Hodge Decomposition: a Method for Solving Boundary Value Problems*, Springer.
  8. Kazhdan, M., Bolitho, M. and Hoppe, H., 2006, Poisson Surface Reconstruction, *Proceedings of the fourth Eurographics Symposium on Geometry Processing*.
  9. Crane, K., Weischedel, C. and Wardetzky, M., 2013, Geodesics in Heat: A New Approach to Computing Distance Based on Heat Flow, *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 32(5), Article No.152.
  10. Caselles, V., Kimmel, R. and Sapiro, G., 1997, Geodesic Active Contours, *International Journal of Computer Vision*, 22(1), pp.61-79.
  11. Kass, M., Witkin, A. and Terzopoulos, D., 1988, Snakes: Active Contour Models, *International Journal of Computer Vision*, 1(4), pp.321-331.
  12. Osher, S. and Sethian, J.A., 1988, Fronts Propagating with Curvature-dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-jacobi Formulations, *Journal of Computational Physics*, 79(1), pp.12-49.



### 백 승 엽

2009년 서울대학교 기계항공공학부 학사  
 2013년 서울대학교 기계항공공학부 박사  
 2013년~현재 서울대학교 정밀기계 설계공동연구소 선임연구원  
 2014년 미 사우스캐롤라이나대 방문연구원  
 관심분야: Discrete Differential Geometry, Statistical Shape Analysis, Human Modeling, User-centered Design, 3D Printing, Medical CAD/CAM



### 감 동 욱

2012년 서울대학교 기계항공공학부 학사  
 2014년~현재 서울대학교 기계항공공학부 석박사통합과정  
 관심분야: CAD, Shape Deformation, Human Modeling & Analysis, Interactive Devices, Parallel Programming



### 이 건 우

1978년 서울대학교 기계공학과 학사  
 1981년 M.I.T 기계공학과 석사  
 1984년 M.I.T 기계공학과 박사  
 1984년~1986년 University of Illinois at Urbana-Champaign 조교수  
 1992년~1993년 M.I.T 기계공학과 객원부교수  
 1986년~현재 서울대학교 공과대학 기계항공공학부 교수  
 관심분야: CAD, Assembly Modeling, Multi-resolution Modeling, Rapid Prototyping, Medical Device, Human Modeling & Analysis