

인지적 요구 수준 및 사고수준의 발달방향에 따른 초등학교 길이 측정 단원의 수학과제 분석

구미영¹⁾ · 이광호²⁾

본 연구는 초등학교 수학 길이 측정 지도와 관련하여 그동안 고려되지 않았던 과제의 인지적 요구 수준 및 사고수준의 발달방향에 따른 학습경로를 적용함으로써 길이 측정 지도상의 개선 방안을 찾아 교육에 시사점을 주는 데 궁극적인 목적이 있다. 초등학교 2학년 한 학급을 대상으로 재구성된 수학 과제를 적용하여 10차시의 수업을 실시하였다. 그 중 4명의 학생을 집중 관찰, 면담을 통한 질적 분석을 통해 재구성된 과제에서 나타나는 과제의 인지적 요구 수준 및 학습경로의 특성을 분석하였다. 그 결과로 높은 수준의 인지력을 요구하는 복합적인 과제로 재구성된 학습을 통해 학생들이 길이에 대해 사고하고 추론하는 기회를 제공했음을 알 수 있었다. 또한, 길이 측정을 위한 학습 경로에 따라 재구성된 학습을 통해 학생들의 길이 개념 학습이 촉진되었으며, 길이에 대한 사고 수준이 정교화 되었음을 알 수 있었다. 본 연구는 연구자의 석사학위 논문을 요약 및 재구성 하였다.

주제어: 수학과제, 인지적 요구수준, 학습경로

I. 서 론

수학 교과 수업에서 수학교과서의 활용도 조사(김민혁, 2012)에 따르면 영역에 따른 정도의 차이는 있었지만 우리나라 수학교사들은 수업구성과정에서 교과서, 교사용 지도서를 교실상황과 환경에 맞게 재구성하여 활용하고 있었으며, 수업목표, 수업내용, 평가내용의 선정과정에서 교과서 및 교사용 지도서의 활용정도가 큰 것으로 나타났다. 교사는 수학 교과서에 제시되어있는 수학과제를 어떻게 학생들에게 표현하고 가르칠지 고민하게 된다. 특히 과제에 따라 학생들의 수업 참여도가 달라지고 수학 학습 기회는 학생들이 실제로 참여하는 과제의 사고 수준과 종류에 의해 결정된다는 선행연구들은 과제의 중요성을 더욱 부각시키고 있다(English, 1998; Jacqueline, 1999). 전미수학교사협회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)에서는 효과적으로 지도하는데 있어서 가치 있는 수학과제가 매우 중요하며, 이 과제는 중요한 수학적 아이디어를 소개하고 학생들이 지적으로 참여하고 도전하도록 하는데 사용되고, 잘 선택된 과제는 학생들의 호기심을 돋우며, 수학을 하도록 이끈다고 수학과제의 역할과 중요성에 대하여 기술한바 있다. 이러한 수학과제의 역할에 따라 교실 수업에서 교사가 학생들에게 제시할 적절한 수학과제를 선

1) 한국교원대학교 대학원

2) [교신저자] 한국교원대학교

택하는 것은 매우 중요하고 이를 위해서는 다양한 유형의 수학과제를 갖춘 수학 교과서가 필수적이다. 따라서 수학과제를 바탕으로 수학교과서를 분석하는 연구는 매우 중요하다고 할 수 있다.

여기서 학생들이 다양한 유형의 수학과제를 통해 느끼게 되는 인지적 요구에 대한 분석도 함께 이루어져야한다. Stein et al.(2000)은 수학과제의 인지적 요구 수준의 중요성에 대해 다음과 같이 강조한 바 있다. 학생들이 일상적인 방식으로 기억하고 있는 절차들을 수행하도록 요구하는 과제는 학생의 사고를 하나의 협의의 기회로 이끌기 십상이다. 반면에, 학생들로 하여금 개념을 사용하도록 요구하고, 수학적으로 의미 있는 것이나 관련된 수학적 아이디어들을 의식적으로 연계 짓도록 이끄는 과제들은 학생들의 생각을 보다 폭넓게 할 수 있는 다양한 기회를 제공할 수 있다고 하였다(Stein et al, 2000, p.11).

하지만, 이러한 채택 방법은 수학과제와 학생들의 학습 과정 사이의 관계를 직접적으로 고려하지 않는다고 Simon(1995)은 말한바 있다. 또한, 수학교육자들이 계획하기의 역설을 겪는다고 주장한 Ainley & Pratt (2002)에 따르면, 교사들이 특정 학습목표로부터 수업을 계획하게 되면 그들이 선택하는 수학과제가 학생들에게 무의미하게 되는 문제가 생기며 교사들이 수학과제에 맞추어 수업을 계획하면 학생들의 활동에 초점이 없으며 평가하기 어려운 학습이 된다고 하였다. 이러한 문제점에 대한 하나의 해결책으로 Simon(1995)은 학습과정에 초점을 맞출 수 있는 이론적 구조로서 가설 학습 경로(hypothetical learning trajectories)를 제시하고 있다.

수학교육의 중요한 문제 중의 하나는 과정이 구체적으로 잘 알려지지 않은 새로운 수학적 개념의 발달을 촉진시키는데 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 수학교육자들은 학습과정에서 수학과제가 가지는 역할을 이해할 필요가 있다고 한다. 이러한 관점에서 Simon & Tzur(2004)의 가설 학습 경로 개념은 수학의 개념적 학습을 촉진시킬 수 있는 수학과제를 어떻게 설계하고 사용할지에 대하여 생각할 수 있는 방법을 제시하였다고 할 수 있다.

이와 같은 연구 배경을 토대로 「초등학교 수학 1~2학년군 수학③ 4. 길이재기」(교육과학기술부,2012)단원에 포함된 수학과제의 인지적 요구수준과 학습경로가 어떠한지를 분석 후, 과제의 인지적 요구수준과 학습경로를 수정하여 재구성한 과제가 실제 학습 과정에서 어떠한 특징을 보이는지를 분석하였다. 본 연구를 통해 초등학교 수학 길이 측정 지도와 관련하여 그동안 고려되지 않았던 과제의 인지적 요구 수준 및 사고수준의 발달방향에 따른 학습경로를 적용함으로써 길이 측정 지도상의 개선에 도움이 되리라 기대된다.

II. 이론적 배경

1. 수학과제의 인지적 요구 수준

수학 교실에서 수학과제가 중요한 역할을 한다는 것은 공통적이지만 가치 있는 수학과제에 대한 논의 및 수업에서 과제를 분석하는 관점은 다양하다. 본 연구에서는 Stein et al.(2000)의 과제의 특징과 인지적 요구의 관계를 적용한 분석지침을 바탕으로 수학 과제를 분석하고자 한다.

Stein et al.(2000)은 수학과제를 “수학적 아이디어의 계발을 위해서 기여하는 교실 활동의 일부분” 이라고 정의하였으며, 수학과제의 유형을 그 과제의 인지적 요구 수준으로 분

석하였다. 여기서 인지적 요구 수준이란 “학생들이 주어진 과제에 참여하고 성공적으로 해결하기 위해서 학생들에게 요구되는 사고의 종류와 수준”(Stein et al., 2000; 방정숙, 2004에서 재인용)을 의미한다.

Stein et al.(2000)은 인지적으로 낮은 수준의 과제로는 ‘암기’와 ‘이해·의미·개념과 연계 없는 절차’, 인지적으로 높은 수준의 과제로는 ‘이해·의미·개념과 연계 있는 절차’와 ‘수학 행하기’로 과제의 유형을 구분하고 있으며, 과제의 특징과 인지적 요구의 관계를 적용하여 수학 과제 분석지침(Task Analysis Guide)을 아래와 같이 제안하였다.

<표 1> 인지적 요구의 관계를 적용한 수학 과제 분석지침. Stein et al.(2000)
 <Table 1> The task analysis guidance for cognitive demands

낮은 수준의 요구 lower-level demands
암기형 과제 memorization tasks
<ul style="list-style-type: none"> · 전에 학습한 사실, 규칙, 공식, 정의 등을 재생 또는 잘 기억하게 한다. · 절차가 아예 존재하지 않거나, 절차를 사용하기에는 시간이 너무 짧아서 절차를 사용하여 풀 수 없다. · 이전에 보았던 구체적 조작물을 그대로 재현하고 무엇을 산출해야 하는지가 분명하면서도 직접적으로 제시되어 있어서 전혀 애매하지 않다 · 학습된 사실, 규칙, 공식, 정의의 토대인 개념이나 의미와 연결되지 않는다.
연계 없는 절차형 과제 procedures without connections tasks
<ul style="list-style-type: none"> · 알고리즘적이다. 특정 절차를 사용하라고 문제에 제시되어 있거나 이전의 교수법, 경험, 또는 과제의 배열에 기초해 보았을 때 절차의 사용이 분명하다. · 성공적으로 과제를 완성하기 위해서 어떤 것이 필요하고 어떻게 해야 할 것인지에 대해 전혀 모호하지 않으며, 제한된 인지적 수준이 필요하다. · 과제 수행을 위해 활용되는 절차와 관련된 개념이나 의미와 연결되지 않는다. · 수학적 이해를 추구하기보다는 정확한 답을 산출하는 데 초점을 둔다. · 설명이 필요하지 않거나 사용한 절차를 단순하게 기술하는 정도에 초점을 둔다.
높은 수준의 요구 higher-level demands
연계 있는 절차형 과제 procedures with connections tasks
<ul style="list-style-type: none"> · 절차를 활용하기는 하지만, 학생들이 수학적 개념과 아이디어에 대해 좀 더 깊이 이해하도록 하는 데에 초점을 둔다. · 근본적인 개념적 아이디어와 밀접한 연관을 가지는 광범위하고 일반적인 절차를(명시적으로 또는 암시적으로) 따를 수 있는 방법을 제안한다. · 시각적인 도표, 구체적 조작물, 기호, 문제 상황과 같이 다양한 방법으로 표현되어 표상 양식 간에 연계함으로써, 학생들이 의미를 찾는데 도움을 준다. · 어느 정도의 인지적인 노력이 요구되어 일반적인 절차를 따를 수 있지만, 학생들이 생각하지 않고서는 그 절차를 따를 수 없다. · 학생들은 성공적으로 과제를 수행하고 이해하기 위해서 절차의 저변에 깔린 개념적인 아이디어를 고려할 필요가 있다.

수학 행하기 과제

doing mathematics tasks

- 예측할 수 있거나 잘 연습된 접근 방법, 해결책이 없고, 복잡하고 비알고리즘적인 사고를 요구한다.
- 학생들이 수학적 개념, 과정, 관계의 본질을 탐구하고 이해하게 한다.
- 자신의 인지적 과정에 대해서 스스로 점검하고 규제하게 한다.
- 과제 해결을 위해 학생들의 경험과 관련 지식을 적절히 활용하게 한다.
- 학생들이 과제를 분석하고, 해결 전략과 해결책을 제한하는 등 과제의 조건을 능동적으로 조사하게 한다.
- 학생에게 상당한 인지적 노력이 요구되고, 해결 과정 예측이 어려워 어느 정도 불안을 초래할 수도 있다.

수학과제에의 피상적인 특성을 넘어 과제에서 요구하는 실제적인 요구 수준을 분석하기 위하여 Stein et al.(2000)이 제시한 분석지침을 과제분석의 틀로 삼았다.

2. 가설학습경로

Simon(1995)은 교사들이 학습이 진행되는 경로를 예상하는 것을 가설 학습 경로(hypothetical learning trajectories)라고 하였는데 실제의 학습 경로를 미리 알 수 없기 때문에 ‘가설’이라는 단어를 사용하였다. 가설 학습 경로는 기대되는 학생들의 성향을 특성화하여 나타낸다. 가설 학습 경로는 교사들에게 특정한 교수안을 선택하는 데 있어서 이론적 근거를 제공한다. 교사는 어떻게 학습이 진행되는 것이 최선인지 결정하여 가설 학습 경로를 고안하게 된다. 따라서 가설 학습 경로는 각각의 교수 상황에서 진행되는 교수방향의 계획뿐만 아니라 학생들의 사고에 대한 대답도 고려하게 된다.

가설 학습 경로는 교사가 정한 학습목표, 학습을 촉진시킬 수학과제, 그리고 학생의 학습 과정에 대한 가설로 구성된다. 이때, 교사가 정한 학습 목표가 다른 요소들을 위한 방향을 제시하는 반면, 학습 과제의 선택과 학습 과정에 대한 가설은 상호의존적으로 이루어진다고 한다. 다시 말해, 과제는 학습 과정에 대한 가설에 근거하여 선택되고 학습 과정에 대한 가설은 관련된 과제를 근거로 세워진다. 가설 학습 경로는 다음의 네 가지 사항을 가정하고 있다.

첫째, 가설 학습 경로는 학생들의 현재 지식에 대한 이해를 바탕으로 세워진다.

둘째, 가설 학습 경로는 특정 수학적 개념을 학습하기 위한 계획 수단이다.

셋째, 수학과제는 특정 수학적 개념을 학습하는 것을 촉진시키는 도구를 제공하며, 따라서 교수학적 과정의 핵심 요소이다.

넷째, 이 과정의 가설적이고 본질적으로 불확실한 특성상 교사는 정기적으로 가설 학습 경로의 모든 요소를 점검하고 수정해 나가야 한다.

3. 길이 측정 학습경로

Clements & Sarama (2009)는 학습경로(learning trajectories)의 중요한 세 가지 요소에 대하여 다음과 같이 밝히고 있다.

첫째, 목표(goal) : 개념의 다발(the big ideas of mathematical concepts). 수학적으로 중심이 되고 일관성 있는 기술, 아동의 사고로 구성되며, 미래의 학습을 생성한다.

둘째, 발달진행(development progressions) : 학습의 방향(the paths of learning). 사고의

수준으로 각 수준은 전 수준보다 정교하게 수학적 목표 성취를 이끈다. 발달진행은 수학적 주제에 대한 기술 및 이해의 발달에 따른 아동의 전형적인 방향을 서술한다. 인생이 시작되면서 수학적 능력의 발달도 시작된다. 어린 아동들은 태어나면서부터 수, 공간 감각, 패턴 같은 특정한 수학적 능력을 가지고 있다. 하지만, 어린 아동들의 생각과 상황의 이해는 어른들의 것과는 고유하게 다르다. 이런 이유로, 좋은 교사는 아동의 관점으로 아동이 생각하고 행동하는 것과 상황을 이해하려는 시도를 한다. 또한, 아동과의 상호작용에서 수업 과제 및 아동의 행동을 아동의 관점으로 고려해야 한다.

셋째, 수업과제(instructional tasks) : 교수의 방향(the paths of teaching). 발달 진행에서 사고의 수준에 어울리는 수업과제의 모음으로 구성된다. 과제는 사고수준에 도달하기 위해 필요한 기술 및 개념의 학습을 돕도록 설계되었다. 한 수준에서 다음 수준으로 아동의 성장을 촉진하기 위해 과제를 사용할 수 있다.

Sarama et al.(2011)은 기존의 길이에 대한 학습경로의 중대한 약점으로 아동의 종적인 행동 발달은 검사하지 않고, 사고 수준의 발달적 과정의 인지적인 요소(action on objects)를 검사하지 않았다고 지적하고 있다. 따라서 이 약점을 개선하기 위해, 참여자가 제한된 수이긴 하지만 교수 실험 방법론을 이용하여 매년 18~22명 정도의 전체학급을 대상으로 수업을 하고, 그 중 유치원에서부터 1학년까지 3년 동안 5명 학생을 종단 연구하였다. 또한, Szilag, Clements & Sarama (2013)는 유치원생부터 초등학교 2학년 까지 학생들의 길이 측정 아이디어의 개발을 조사 하였다. 주요 목적은 발달상의 진행이나 사고 수준의 계열이 일관되게 대부분의 아동에게서 관찰됨을 확실하게하기 위한, 길이 측정을 위한 가설 학습 경로의 사고수준을 평가하고 설명하는 것이다. 연구 결과 각 수준에서 물체에서의 정신적 활동 및 과업을 포함하는 사고수준에 대한 자세한 설명과 학생들의 수준을 수정하여 발달상의 진행을 다음과 같이 밝히고 있다.

<표 2> 길이 측정을 위한 학습 경로(Szilag, Clements & Sarama, 2013).

<Table 2> Learning trajectory for length measurement

발달상의 진행 (developmental progression)	물체에서의 활동 (actions on objects)
수량 인식기 (length quantity recognizer) 초기에 정렬된 물체에서 더 긴 것을 식별하지만, 더 긴 물체를 결정하기 위해 물체를 정렬하는 것은 알지 못한다. 원형 물체가 더 긴 것이 사실인 경우에도 직선 물체가 원형 물체보다 더 길다고 나타낼 수 있다.	초기의 스킴은 물체 모양의 비율 측면에 대한 길이 어휘와 관련 있다. 예를 들어, “길다”는 가로 세로의 비가 큰 물체에 적용된다. 이 경향은 공존할 수 있고, 초기에는 초기 길이 비교 연산자보다 우선시 된다
직접 길이 비교기 (length direct comparer) 초기에 두 물체 중 더 긴 것을 결정하기 위해 물리적으로 움직여서 정리 할 수 없지만, 증거를 제공하기 위해 과업을 한다. “ ~을 ~방향으로 돌리면, 더 길어집니다.” 각각 제3의 길이와 관련하는 방법에 근거하여 두 물체 사이에서 비교적 길이 관계 추론을 할 수 없다.	시각적인 비교가 상당 기간 선호되며, 직접 비교는 단지 확인하고, 종종 그러한 검증을 위한 외부의 압력 하에 사용된다. 시각적 비교나 정확한 비교의 요구가 불가능한 과제와 함께 또는 정신적 회전과 같은 시각 기반 작업의 한계의 인식을 허용하는 메타인지 개발과 함께, 물리적으로 움직이고 물체를 정렬하는 행동방식이 점차 주도권을 달성한다.

<p>간접 길이 비교기 (indirect length comparer) (2009년도에 제시했던 Indirect Length comparer를 수정) 두 물체의 길이를 제3의 물체를 대신하여 비교한다. 두 물체의 길이를 끈 조각으로 비교 측정이 요구될 때, (동등한 길이 단위 없이) 세는 동안 길이를 따라서 움직이거나 짐작함으로써 길이를 부여할 수 있다.</p>	<p>길이의 추상적 개념, 물체로부터 추출되고 정신적으로 표현(물리적 연결을 위한 필요성에 대비) 될 수 있는 하나로 먼저 만들어져야 한다. 뿐만 아니라, 추이적(transitive) 추론의 명확한 사용(언어화 할 수 있는지의 여부)은 천천히 개발되며, 종종 후속하는 수준의 진행과 중복된다.</p>
<p>6개 이상 연속 순서기 (serial orderer to 6+) 길이 순서 짓기. 1~6까지 표시한다. (끝에서 끝으로 길이 측정기와 동시에 발달) 주어진 큐브 탑을 1~6까지 순서대로 놓는다.</p>	<p>길이 관계를 추정하는 능력(시행착오 접근방식)은 결국 배열에서 각각을 전의 것보다 더 긴지, 후의 것보다 더 짧은지 비교해 보는 방식에 의해 보완된다. (보다 효율적인 전략의 결과)</p>
<p>끝에서 끝까지 길이 측정기 (end to end length measurer) 물체를 따라서 끝에서 끝까지 다양한 크기의 단위를 놓을 수 있고, 같은 길이의 측정에서 다른 수를 부여하기도 한다. 하나의 단위를 다수 복사하는 것은 불가능하지만, 비록 임의적이지만 순차적으로 물체를 따라서 단위를 밀어 넣고 셀 수 있다.</p>	<p>측정 대상 물체의 길이를 표시하고 유지 되더라도, 부과된 부분을 ‘단위’로서 그 길이위에 같은 정신적 조작을 적용하는 방식을 할 필요는 없다.</p>
<p>길이 단위 관계기 및 반복기 (length unit relater & iterater) (2009년도에는 length unit iterater와 length unit relater를 분리했었음) 자와 같이, 더 작은 단위를 사용하기 전에 더 긴 단위를 사용하여 반복할 수 있다.</p>	<p>지각 가능한 물체를 따라서 정신적 단위를 반복하는 능력을 포함. 각각의 배치 이미지는 물리적 단위를 다음의 반복되는 위치로 옮기는 동안 유지될 수 있다.(초기에는 배치에 약간의 제약이 있음) 지각적 맥락의 도움으로, 물체의 길이를 측정하기 위해 적은수의 더 큰 단위가 필요함을 예측할 수 있다. 모두 세는 (counting-all) 가산 방식의 적용이 측정에 적용될 수 있다.</p>
<p>경로 측정기 (path measurer) (새로운 수준 : 2009년도의 length measurer 수준을 포함) 몇몇 비교 상황에서 직선이 아닌 경로의 길이를 표현하기 위해 유연한 물체를 사용한다. 일부 직접 비교 상황에서 지그재그 경로를 끈게 편다. 동일한 단위로 구성된 물체로 자를 이해한다. 따라서 수가 없는 자나 부러진 자를 사용한다.</p>	<p>선행하는 방식은 개념적으로 측정 대상물체가 동일한 길이의 선분(수학적 의미에서 단위로 대상물체를 측정하도록 만든다)으로 분할 될 수 있다는 것을 예측한다. 연결된 길이로 구성된 길이와 경로는 유연하게 구성되고 분해 될 수 있으며, 전체 길이를 유지(보존)한다. 이 방식은 의도적인 반영을 위해 사용할 수 있으며, 길이 비교에 적용될 수 있다. 이전에 개발된 방식은 밀접하게 연관되고 통합되었으며, 다양한 상황에 넓게 적용 될 수 있다. (예, 물체 또는 경로를 따라 이동에 관여하지 않을 경우)</p>

<p>개념적 자 측정기 (conceptual ruler measurer) “내부의(internal)’ 측정 도구를 가지고 있다. 정신적으로 물체를 따라 이동하여 그것을 분할하고, 선분을 센다. 측정에서 연결된 길이 (connected length)를 산술적으로 조작한다. 정확도로 추정한다. “방의 가장 자리를 따라서 차례로 1m 막대를 상상했습니다. 그것이 방의 길이가 9m라고 추정한 방법입니다.”</p>	<p>길이 스킴(scheme)의 내면화는 동일 길이 (equal-length) 부분의 수로 주어진 길이의 정신적 분할을 한다. 또는 존재하거나 상상한 물체에 이미지를 투영함으로써 길이의 정신적 추정이 일어난다.</p>
--	---

위의 연구에서 밝힌 아동의 길이 측정에 있어 사고 수준의 발달방향을 바탕으로 본 연구에서 길이 재기 단원의 학습경로를 수정하여 아동의 학습방향을 따르는 교수 방향으로 수학과제를 재구성하였다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 방법

「초등학교 수학 1~2학년군 수학③ 4. 길이재기」 단원을 선택하여 Stein et al.(2000)이 제시한 과제의 특징과 인지적 요구의 관계를 적용한 수학과제 분석지침에 따라 교과서에서 제시한 수학과제의 인지적 요구 수준을 분석하였다. 또한, 길이 측정에 대한 기술 및 이해의 발달에 따른 아동의 전형적인 방향을 서술한 Szilag, Clements & Sarama(2013)의 길이 측정을 위한 학습 경로에 따라 교과서에 제시된 수학과제의 학습 경로를 분석하여 교과서 수학과제에 대한 심층적인 이해를 추구하였다.

재구성한 길이 측정 단원 수학과제의 실제 학습 과정에서 나타나는 인지적 요구 수준의 특징 및 학습경로에서의 사고 수준의 특징은 어떠한지를 분석하기 위해 교과서 수학과제 분석결과를 바탕으로 교과서의 수학과제를 학생들의 높은 인지 수준의 사고 과정을 이끌어 낼 수 있는 과제 및 Szilag, Clements & Sarama(2013)가 제시한 길이 측정 영역에 있어서의 아동의 발달 진행에 따른 학습경로를 따를 수 있도록 재구성하였다. 재구성된 수학과제를 2학년 수업에 직접 적용하여 그 과정에서 학생들에게 나타나는 과제의 인지적 요구 수준의 특징 및 학습 경로에서의 사고 수준의 특징은 어떠한지를 기술하고 그 과정을 면밀히 분석하고 시사점을 모색하였다.

따라서 본 연구의 목적을 달성하기 위한 연구 설계로 수학과제 분석 및 면담, 교수실험을 통한 질적 사례연구 방법을 적용하였다.

2. 연구설계 및 대상

첫째, 현행 초등학교 교과서 「초등학교 수학 1~2학년군 수학③ 4. 길이재기」 단원의 수학과제를 선행연구인 Stein et al.(2000)의 인지적 요구에 따른 과제 유형과 분석 지침 및 Szilag, Clements & Sarama(2013)의 길이 측정을 위한 학습 경로에 따라 분석하였다. 이를 바탕으로 교과서에 제시된 높은 인지 수준의 과제는 그대로 사용하기도 하고, 학급 특성

및 학생들의 학습능력을 고려하여 상황에 맞게 보완 수정하면서 학생들의 높은 인지 수준의 사고 과정을 이끌어 낼 수 있는 과제로 재구성하였다. 또한, Szilag, Clements & Sarama(2013)가 제시한 길이 측정 영역에 있어서의 아동의 발달 진행에 따른 학습경로를 따를 수 있도록 과제를 재구성하였다. 수학과제를 분석한 결과와 재구성된 수학과제를 전문가의 검토를 통해 수정 보완하였다.

둘째, 재구성된 수학과제를 중심으로 총 10차시의 수업을 실시하였다. 실제 교수·학습 과정에 참여한 학생들은 2학년 한 학급의 학생들로 남학생 13명, 여학생 13명으로, 총 26명이었다. 수업에 참여한 총 26명의 학생 중 수학성취 수준을 고려하여 많은 정보를 얻을 수 있을 것으로 예상되는 4명을 선정하여 재구성된 수학과제의 해결에서 나타나는 특징을 집중적으로 관찰하고, 면담을 통하여 재구성된 과제에 나타나는 학생들의 인지적 사고 수준 및 학습 경로에서의 사고의 수준의 특징을 파악하여 시사점을 도출하였다.

<표 3> 연구 대상 학생들의 일반적인 특징
<Table 3> General characteristics of students

	특징
학생 A (남학생)	· 수학적 사고력과 문제해결력이 우수하며 과제집착력이 있음. 어려운 문제도 차근차근 생각해서 풀 수 있고 다른 친구들에 비해 속도가 빠르고 정확함.
학생 B (여학생)	· 전반적으로 수학에 대한 성취도가 양호한 편이며 흥미도 높고 집중도 잘하나, 다른 영역에 비해 연산 부분이 조금 부족함.
학생 C (남학생)	· 수학과 성취도가 다른 과목에 비해 높은 편이고 흥미도 높은 편임.
학생 D (여학생)	· 수 개념을 비교적 잘 이해하고 있으며 평면도형의 모양과 그 구성 요소에 대한 이해가 높음. 수학 시간에 문제 해결에 적극적이거나 덧셈과 뺄셈 연산 기능이 부족하고 수학에 대한 흥미 도는 낮은 편임.

3. 자료수집 및 분석

수업에 늘 활용되는 교과서이지만 실행 연구를 위하여 좀 더 자세히 또는 새로운 각도에서 현재의 교과서를 분석할 수 있다(우정호 외, 2007). 따라서 본 연구에서는 과제의 인지적 요구 수준 및 학습경로라는 두 가지 분석기준으로 교과서의 수학과제를 분석하였다.

우선 Stein et al.(2000)이 제시한 과제의 특징과 인지적 요구의 관계를 적용한 수학과제 분석지침에 따라 교과서의 수학과제를 규명하여 네 가지 유형(memorization, procedures without connections, procedures with connections, doing mathematics) 중 한 가지로 분석하였다. 과제분석의 중요한 둘째 분석기준은 길이 측정에 대한 기술(skill) 및 이해의 발달에 따른 아동의 전형적인 방향을 서술한 Szilag, Clements & Sarama(2013)의 길이 측정을 위한 학습 경로이다. 따라서 수학과제에서 학생들에게 요구하는 사고의 수준을 Szilag, Clements & Sarama(2013)가 제시한 길이 측정을 위한 학습 경로에 따라 8가지 단계 중 한 단계로 분석하였다.

위와 같은 분석기준에 따라 수학과제를 분석한 결과를 바탕으로 과제의 인지적 요구 수준 및 학습경로를 수정하여 수학과제를 재구성하였다. 재구성된 수학과제의 인지적 요구 수준의 특징 및 학습 경로에서의 사고의 수준의 특징은 어떠한지를 기술하고 길이 측정

지도를 위한 시사점을 모색하기 위하여 2학년 한 학급을 대상으로 수업을 실시하여 그 과정에서 나타나는 학생들의 학습 과정을 관찰하고, 심층면담 자료와 활동지, 현장일지, 전사 등을 종합하여 분석하였다.

IV. 연구 결과

1. 교과서 수학과제 분석

본 연구에서는 교과서에서 제시되는 ‘생각열기’, ‘활동 1’, ‘마무리’ 와 같은 하나의 활동을 하나의 수학과제로 보고, 각 차시별로 수학과제의 인지적 요구 수준과 학습 경로에서의 발달 진행 수준을 분석하여 과제 유형을 밝혔다.

가. 「여러 가지 방법으로 길이 비교하기」 과제

<표 4> 교과서에 제시된 「여러 가지 방법으로 길이 비교하기」 과제 및 과제유형
 <Table 4> Tasks and task types of 「Comparing the length in several ways」

주 제	1. 여러 가지 방법으로 길이 비교하기	차시	2/10	
학습 목표	<ul style="list-style-type: none"> • 직접 비교의 장, 단점을 말할 수 있다. • 간접 비교의 장, 단점을 말할 수 있다. 			
과제 내용		문항 번호	과제 유형	
			인지적 요구 수준	발달 진행
생각 열기	임금님과 재단사가 옷의 길이를 어떻게 비교했는지 알아봅시다. 임금님은 바지 길이를 어떻게 비교했습니까? 재단사는 자신이 만들어 온 옷의 소매 길이를 어떻게 비교했습니까?	1-①	압기형 과제	길이 직접 비교기
활동 1	재단사가 되어 옷의 길이를 비교해 보시오.	1-②	연계없는 절차형 과제	
활동 2	임금님 몸의 여러 부분의 길이를 비교해 보시오. 길이가 가장 긴 부분은 어느 부분입니까? 길이를 가장 쉽게 비교할 수 있는 방법은 무엇입니까?	1-③	수학 행하기 과제	간접 길이 비교기
마무리	여러 가지 물건의 길이를 비교해 보세요. 표시된 부분의 길이가 얼마나 차이가 나는지 이야기해 보시오. 위와 같은 방법으로 비교하면 어떤 점이 불편합니까?	1-④	연계 있는 절차형 과제	

1) 인지적 요구 수준

가) 생각열기 : 본 과제는 스토리텔링을 통하여 수학적으로 의미 있게 활동을 시작할 수 있도록 되어있다. 따라서 스토리텔링을 듣고 이야기 속 상황을 이해하는 것이 주요 목

표이다. 이야기 속 사실, 절차, 규칙, 공식, 정의 등을 재생하거나 잘 기억하게 하는데 초점을 두고 있으며 학생들 스스로 과제를 분석하거나 해결 전략을 모색할 필요가 없는 「암기형 과제」이다.

나) 활동1 : 옷을 맞대는 직접 비교로는 길이가 얼마나 차이가 나는지 정확히 알 수 없으며, 무거운 물건과 같이 옮길 수 없는 물건은 비교하기 힘들다는 단점을 알게 하는 것이 초점이지만, 이미 교과서에 삽화로 절차를 안내해주고 있으며, 성공적으로 과제를 완성하기 위해서 어떤 것이 필요하고 어떻게 해야 할 것인지에 대해 전혀 모호하지 않은 「연계 없는 절차형 과제」이다.

다) 활동2 : 추가적인 절차에 대한 설명이 없으므로 학생들이 쉽게 예측할 수 없고, 다양한 도구를 활용하는 등 학생들 스스로 과제를 분석하고 해결 전략을 모색하게 하는 비교적 인지 수준이 높은 과제이다. 학생들로 하여금 수학적 개념, 과정, 관계 등의 성질에 대해 탐구 및 이해하도록 유도하고 과제를 분석하여 해결전략과 해결 방법의 가능성에 제한을 주는 제약에 대해 적극적으로 검토하게 하는 「수학 행하기 과제」이다.

라) 마무리 : 두 가지 물건의 길이의 정확한 차이를 알 수 없다는 간접 비교의 단점을 알아차리게 하고, 길이를 숫자로 표현할 수 있는 방법이 필요함을 인식하게 한다. 또한, 이전 과제(활동2)를 모방하여 과제를 조작하거나 만드는 과정에서 과제의 성질, 개념의 범위, 해결 과정 등을 학생들 스스로 재조직하여 해결하게 하는 수학과제이므로 「연계 있는 절차형 과제」이다.

2) 발달 진행

가) 생각열기, 활동1 : 이 활동의 주안점은 옷을 맞대는 직접 비교로 길이가 얼마나 차이가 나는지 정확히 알 수 없으나, 두 물체 중 어느 것이 더 길고 짧은지 또는 길이가 같은지 물리적으로 나열하거나 직접 입어봄으로써 “더 짧다.”, “더 길다.” 등으로 두 길이를 직접비교하는 「길이 직접 비교기(length direct comparer)」 수준의 과제이다.

나) 활동2, 마무리 : 직접비교와 간접 비교가 필요한 상황에 따라 적절한 비교 방법을 적용하고, 직접 비교할 수 없는 두 길이는 막대나 끈과 같은 제3의 물체를 대신하여 비교한다. 또한, 두 가지 길이의 정확한 차이를 알 수 없다는 간접 비교의 단점을 알아차리게 하고, 길이를 숫자로 표현할 수 있는 방법이 필요함을 인식하게 하므로 「간접 길이 비교기(Indirect length comparer)」 수준의 과제이다.

나. 「초등학교 수학 1~2학년군 수학③ 4. 길이재기」 단원의 수학과제 분석결과

앞서와 같이 「초등학교 수학 1~2학년군 수학③ 4. 길이재기」(교육과학기술부, 2012). 단원의 총 7주제의 수학과제 분석결과를 주제별-문항별 번호를 부여하여 과제의 인지적 요구 수준과 발달 진행에 따른 길이 측정을 위한 학습경로를 따라 정리하면 <표 5>와 같다.

(주제 1. 여러 가지 방법으로 길이를 비교하기, 2. 몸을 이용하여 길이 재기, 3. 물건을 이용하여 길이 재기, 4. 단위길이가 다른 때의 불편함 알기, 5. 편리한 길이의 단위 정하기, 6. 자를 사용하여 길이 재기, 7. 길이 어렵하기)

(문항 ①. 생각열기, ②. 활동1, ③활동2, ④ 마무리)

<표 5> 2009개정 초등학교 1~2학년군 수학③ 4. 길이재기 단원 수학과제의 인지적 요구 수준 및 학습경로

<Table 5> The level of cognitive demands and learning trajectory of mathematical tasks, 2009 Revised Elementary School, 1-2 grade group, Mathematics③, Chapter4. Length Measurement

발달 진행 에	개념적 자 측정기		7-①		7-②,③ 7-④,⑤
	경로 측정기				6-⑥
따른 길이	길이 단위 관계기 및 반복기	2-① 3-① 6-③,④,⑤	2-② 3-②,④ 4-①,②,④	2-③,④ 3-③ 5-②,③,④ 6-①,②	4-③ 5-①
	측정 을	끝에서 끝까지 길이 측정기			
위한	6개 이상 연속 순서기				
	간접 길이 비교기			1-④	1-③
학습 경로	길이 직접 비교기	1-①	1-②		
		암기형 과제	연계 없는 절차형 과제	연계 있는 절차형 과제	수학 행하기 과제
인지적 요구 수준에 따른 과제 유형					

위와 같이 「초등학교 수학 1~2학년군 수학③ 4. 길이재기」 단원의 과제 유형을 분석한 결과 과제의 인지적 요구 수준은 인지적 수준이 낮은 「암기형 과제(memorization tasks)」부터 가장 높은 「수학 행하기 과제(doing mathematics tasks)」까지 그 수준이 다양하게 나타났다. 인지적 요구 수준이 낮은(lower-level demands) 과제의 경우, 본래부터 낮은 사고를 하도록 만들어졌다기보다는 문제를 제시하는 방식이나 과정에서 발생한 문제나 관련된 삽화로 인해 낮은 인지적 요구 수준의 문제로 쇠퇴된 것으로 보인다. 이를 과제 자체가 가지고 있는 수학적 개념 및 아이디어에 대해 좀 더 깊이 이해할 수 있고, 절차를 활용하면서 학생들이 높은 수준의 사고를 할 수 있는 기회를 제공할 수 있는 방향으로 과제를 재구성할 필요가 있다.

학습 경로의 분석 결과 길이 단위의 도입 전략에 따라 직접비교, 간접비교, 임의 단위로의 측정, 표준단위로의 측정, 간접 측정이라는 단계로의 접근으로 이루어지고 있다. 이러한 접근은 수학과제와 학생들의 학습 과정 사이의 관계를 직접적으로 고려하지 못하고 있다. 어린 학생들의 생각과 상황의 이해는 어른들의 것과는 고유하게 다르다. 교사는 학생의 관점으로 학생이 생각하고 행동하는 것과 상황을 이해하려는 시도를 해야 하며, 학생과의 상호작용에서 수업 과제 및 학생의 행동을 학생의 관점으로 고려해야 한다(Szilag, Clements & Sarama, 2013). 발달 진행(developmental progression)은 수학적 주제에 대한 기술 및 이해의 발달에 따른 아동의 전형적인 방향을 서술하는 것으로, 발달 진행에서의 사고 수준에 어울리는 수업과제로 재구성하여 학생의 학습방향을 고려한 교수 방향으로

조정할 필요가 있다.

2. 수학과제 재구성

교과서 과제 분석 결과를 바탕으로 낮은 인지적 수준의 과제는 학생들의 높은 인지 수준의 사고 과정을 이끌어 낼 수 있는 과제로 설정하기 위하여 추가 조건을 제시하거나 과제를 바꾸어 설정하였다. 다만, 몇몇 생각열기의 과제는 인지적 수준이 낮은 과제이기는 하지만 스토리텔링 중심 교과서의 특성상 스토리텔링을 듣고 이야기 속 상황을 이해하는 것이 의미가 없는 과제가 아니므로 그대로 유지하기도 하였으며, 자의 사용법을 학습한 이후에 자를 이용하여 능숙하게 길이를 측정하기 위한 몇몇 연습과제 또한 인지적 수준이 낮은 과제이기는 하지만 학생들이 자의 사용에 능숙해 지는 것이 중요한 의미 있는 과제이므로 그대로 유지하였다.

학습경로 면에서 아동의 자연스러운 사고 수준의 발달 방향에 따라 과제의 흐름을 설정하기 위하여 교과서 과제에서는 제시되어 있지 않은 「6개 이상 연속 순서기(serial orderer to 6+)」, 「끝에서 끝까지 길이 측정기(end to end length measurer)」 단계의 과제를 학생들이 학습할 수 있도록 과제의 조건을 바꾸거나 새로운 과제를 추가하였다. 추가 과제를 통하여 다음단계인 「길이 단위 관계기 및 반복기(length unit relater & iterater)」가 좀 더 정교해지고 촉진되기를 기대하며 설정하였다. 또한, 부분의 합으로써 구부러진 경로의 길이 측정 및 눈금이 지워진 자를 사용하여 단순히 끝점으로 거리를 읽는 것이 아니라 단위의 누적으로 길이를 측정함을 학생들이 경험할 수 있도록 「경로 측정기(path measurer)」 수준의 과제를 재구성하였다. 마지막으로, 어렵하기 차시에서만 아니라 다양한 학습 과정에서 어림을 유도하여 학생들의 양감을 기를 수 있도록 하여 「개념적 자 측정기(conceptual ruler measurer)」를 정교히 할 수 있기를 기대하며 과제를 재구성하였다.

3. 재구성 과제 실행

가. 「끝에서 끝까지 길이 측정기(end to end length measurer)」의 과제유형 추가

활동을 통해서 길이의 차이를 정확하게 표현하기 위해선 작은 물체로 길이를 재어야 한다고 답한 학생들의 의견을 바탕으로 1부터 10까지 길이가 다양한 색막대를 사용해서 물건의 길이를 재어보도록 하였다. 색막대를 이용하여 각 부분의 길이를 비교하기에 앞서 각자 가진 연필 중에서 길이가 가장 긴 연필의 길이를 색막대를 이용하여 재어보도록 학생들에게 요구하였다.



학생1



학생4

[그림 1] 동등한 단위길이의 필요성을 인식하지 못한 학생의 예
[Fig 1] The students who do not recognize the necessity of identical unit

학생1과 학생4 모두 사용한 막대의 개수로서 길이를 각각 2와 5로 나타냄으로 단위의 누적으로서 길이를 표현해야함을 인지하고 있음을 알 수 있었다. 하지만, 두 학생 모두 측정에 있어 동등한 단위길이만을 이용해야 함을 인지하지 못하고, 여러 색상의 색막대를 섞어가며 끝점만을 맞추면서 길이를 측정하고 있었다. 교사의 도움으로 길이를 수로 표현하기 위해서는 같은 단위길이를 사용해야 함을 깨닫고, 오류를 수정하여 같은 색 색막대를 사용하여 길이를 수로 나타낼 수 있었지만, 본 활동이 없었다면 동등한 단위길이의 필요성에 대해 학생 스스로 고민해 볼 기회를 제공해 주지 못하였을 것이다.

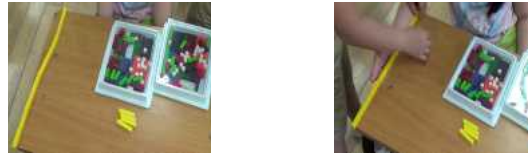
앞선 활동에서 끈으로 길이를 재어서 비교하였던 물건의 6부분을 색막대 여러 개를 이용하여 수로 나타내 보도록 하는 추가된 과제를 실시하였다. 우선 책상의 긴 쪽의 길이를 색막대를 이용하여 재어 보도록 하였을 때, 네 명의 학생 모두 같은 색 색막대만을 이용하여 길이를 재었다. 학생1은 노란색 색막대 12개, 학생2는 초록색 색막대 13개, 학생4는 노란색 색막대 11개를 사용하여 길이를 측정하고 수로 나타내었다. 이때, 같은 책상의 길이인데 수로 나타내었더니 11, 12, 13으로 다른 이유를 물었을 때 학생들이 길이가 다른 색막대를 이용하였기 때문에 수로 나타내면 다르다는 대답을 하였다. 이를 통해 학생들이 임의 단위의 길이에 따라서 같은 물건이라도 수가 다르게 나타난다는 것을 인지했음을 알 수 있다.



[그림 2] 임의 단위 길이에 따라 같은 물건이라도 수가 다르게 나오는 예

[Fig 2] The examples of different numbers shown depending on the length of unit

또한, 학생1과 학생4는 같은 색의 색막대를 사용하였는데 수로 나타냈을 때 11과 12로 결과가 다른 이유를 질문했을 때, 학생4는 색막대를 사용하고 남는 부분을 버렸고, 학생2는 하나를 더 넣어서 모자라는 부분을 채웠다고 답하였다. 이때, 두 학생 중 누가 더 길이를 정확하게 측정했다고 할 수 있을지 교사가 질문하였는데, 학생2는 하나를 더 넣으면서 노란색 색막대가 책상을 조금 넘기는 하였지만 학생4가 버린 부분에 비해 그 차이가 더 적으므로 학생2가 좀 더 정확하게 측정하였다고 학생들이 답하였다. 이를 통해 「끝에서 끝까지 길이 측정기(end to end length measurer)」의 과제유형을 제공함으로써 학생들이 측정을 하면서 모자라거나 남는 부분을 어떻게 처리해야 더 정확한 측정을 할 수 있는가를 시각적으로 명확하게 비교하여 합리적으로 판단할 수 있는 기회를 제공하였음을 알 수 있다.



[그림 3] 정확한 길이 측정을 위해 수정하는 예
[Fig 3] Modification for correcting the length of object

이어서 책상의 짧은 쪽의 길이를 색막대를 이용하여 측정해 보도록 하였다. 학생2와 학생4가 같은 노란색 색막대를 이용하였는데, 학생2는 9개, 학생4는 8개를 사용하였다. 이번에도 같은 색의 색막대를 사용하였는데 측정값이 다른 이유를 질문하였더니 같은 모둠 학생들이 학생2가 길이를 측정한 방법을 가리키며 색막대를 겹치지 않고 반듯하게 재어야 하는데 학생2가 비뚤비뚤 재어서 길이가 바르지 않다면서, 수정하는 행동을 보였다. 이후 학생2와 학생4가 측정한 방법을 시각적으로 비교해가면서 학생4가 책상의 남은 부분을 버리고 노란색막대 8개를 사용하여 측정값을 나타낸 반면에 학생2는 노란색막대 9개를 사용하여 책상을 조금 넘기는 하였지만 학생4가 버린 부분에 비해 그 차이가 더 적으므로 학생2가 좀 더 정확하게 측정하였다고 학생들이 답하였다.

【에피소드 2 : 올바른 측정 방법 인지】

T: 이렇게 색막대로 물건의 길이를 잴 때 어떻게 재야할까?

S1: 학생2처럼 비뚤비뚤 재면 안 되고 반듯하게 재야해요.

T: 또 주의할 점이 있을까?

S3: 빈틈이 있으면 안돼요.

S4: 같은 색만 사용해야 돼요.

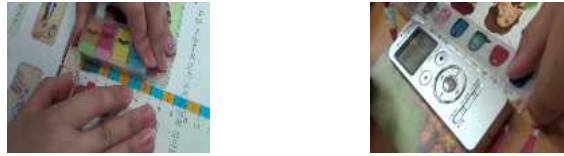
이를 통해 추가된 「끝에서 끝까지 길이 측정기(end to end length measurer)」의 과제가 시각적으로 동등한 단위길이를 측정 대상의 끝에서 끝까지 늘어놓으며 측정의 중요한 구성요소인 단위로 측정의 대상을 겹치지 않기, 빈틈없이 덮기, 반복 측정 가능, 단위의 누적으로 길이를 나타내는 경험을 학생들에게 제공했음을 알 수 있다. 사용하는 색 막대의 종류가 다르면 물건의 길이가 달라 똑같은 길이를 재더라도 수가 다르게 나옴을 시각적으로 명확하게 보여주었으며, 길이의 측정에 있어서 색막대가 모자라거나 넘치는 경우 길이를 수로 나타내기 위해 어떤 측정값을 선택하는 것이 합리적인지 학생 스스로 결정을 할 수 있도록 명확한 기준을 제공하였음을 알 수 있다.

나. 「자를 사용하여 길이를 바르게 재기」에서의 재구성 과제 실행

생각열기활동을 통해 자의 올바른 사용법을 탐구하고, 활동1에서 물건의 끝점을 자의 시작점인 0에 맞추어야 하는 전략과 연결 지어서 부러진 자의 경우 시작점인 0에 맞출 수 없을 때의 올바른 측정 방법에 대해 알게 되었다. 두 과제를 통해 알게 된 자의 올바른 사용법을 바탕으로 활동을 통해 자의 사용에 능숙해질 수 있도록 충분히 연습할 기회를 제공하였다.

마무리 활동에서는 자를 사용하여 여러 가지 물건의 길이를 제어 보도록 하였는데, 앞

서 교과서에 제시되었던 길이와는 달리 물건의 길이가 정확하게 cm로 표현되지 않는 경우가 많았다.



[그림 4] 어림값의 표현이 필요한 예
[Fig 4] The necessity of representation for the estimated value

【에피소드 3 : 길이의 어림 표현】

T : 지우개통의 길이가 얼마인가요? S2: 6cm요.
T : 왜 6cm라고 생각했나요?
S2: 6cm가 조금 넘어서요.

다음 차시에서 길이가 자의 눈금 사이에 있을 때는 가까이에 있는 쪽의 숫자를 읽으며, 크기를 어렵해서 “약” 이라고 표현하는 것을 배우게 되는데, 실제 수업에서는 이 보다 먼저 본 차시에 더 필요함을 알 수 있었다.

【에피소드4 : 자의 끝점으로 길이를 인식하는 학생】

T : 싸인펜의 길이가 얼마인가요? S3: 16cm요.
T : 왜 16cm라고 생각했나요?
S3: 싸인펜 끝이 16cm랑 만나요.

학생3과 같이 자로 길이를 측정함에 있어 1cm의 누적으로서 길이를 아직 이해하지 못하고 자의 끝점만을 읽는 아동이 있었다. 이후 학생들에게 눈금의 숫자가 지워진 자로 물건의 길이를 측정해 보도록 하는 재구성된 과제를 제시하였다.



[그림 5] 1cm의 누적으로 길이를 측정하는 예
[Fig 5] Measurement with repeating 1cm

학생3은 연필의 길이를 재기 위하여 눈금 한 칸 한 칸을 세어가며 길이를 측정하는 모습을 보였다.

【에피소드 5: 자의 끝점이 아닌 1cm의 누적으로 길이를 인식하게 된 학생】

T : 연필의 길이가 얼마인가요? S3: 10cm요.
T : 왜 10cm라고 생각했는지 얘기해 줄 수 있나요?
S3: 1cm가 10번이니깐 10cm예요.

학생의 응답을 통해 숫자가 지워진 자를 이용하여 물건의 길이를 측정해 보는 활동이 단순한 끝점 사이의 거리가 아닌 1cm의 누적으로서의 길이를 이해하는데 학생들에게 도움이 되었음을 알 수 있었다.

다음으로 자를 이용해서 책상의 긴 쪽의 길이나 사물함의 길이와 같이 자신이 가지고 있는 자로 한 번에 측정할 수 없는 물건들의 길이를 재어보도록 학생들에게 과제를 제시하였다.



[그림 6] 자보다 긴 물건의 길이를 측정하지 못하는 학생의 예
[Fig 6] A student who can't measure an object, longer than a ruler

학생4의 경우 자신이 가지고 있는 15cm의 자보다 긴 싸인펜 길이를 구하는데 어려움을 보였다. 15cm넘는 부분의 처리를 어떻게 할지 고민하던지 자신이 가지고 있는 연필을 대어보고는 그 연필의 길이를 자로 재어서 15cm와 더하여 싸인펜 길이가 16cm라고 응답하였다.



[그림 7] 자를 임의단위처럼 사용하는 예
[Fig 7] Student using ruler as an optional unit

학생1의 경우는 사물함의 길이를 측정할 때, 자의 0점에 맞추어 길이를 측정하는 것이 아니라 자를 임의단위처럼 사용하여 길이의 눈금이 넘는 부분까지 표시하고 15cm인 자가 4번이니까 사물함의 길이는 60cm라고 응답하였다. 자보다 긴 길이를 어떻게 측정하면 좋을지 교사와 의견을 나눈 후, 계속해서 자보다 긴 물건들의 길이를 측정해보도록 하였다.

학생1은 더 이상 자를 단위로 사용하지 않고 자의 0점에 물건의 끝을 정확하게 맞추고, 15cm 되는 부분을 연필로 표시하고 자를 옮겨서 확인하여 책상의 길이가 15cm가 4번이고 3cm가 더 되니까 63cm가 된다고 응답하였다. 학생3도 마찬가지로 정확하게 0점을 맞추기 시작했으며, 자를 옮겨가며 두 길이의 누적으로 물감통의 길이가 27cm라고 응답하였다.

위의 활동을 통하여 측정의 근본적인 개념을 다시 확인하며, 길이를 재는 광범위하고 일반적인 절차를 깨달을 수 있는 높은 인지적 수준을 요구하는 과제임을 알 수 있다.

마지막으로 굵은 길이를 측정하는 재구성된 과제를 제시하였다. 4명의 학생 모두 시각적인 비교에서 굵은 길이인 (가)의 길이가 직선길이인(나)보다 더 길 것 이라고 예상하였고, 확인해 볼 것을 요구 하자 3명의 학생은 자를 이용하여 (가)의 굵은 부분의 길이를 각각 측정하여 세 부분의 합으로서 전체 길이가 10cm임을 밝히고 (가)와 (나)의 길이가 모두

10cm임을 확인하였다. 하지만, 학생3의 경우, 처음 선분의 길이를 2cm로 측정하고 둘째 부분을 측정하기 위하여 꺾인 부분에서 2cm를 시작점으로 하여 5cm, 다시 꺾인 부분에서 5cm를 시작점으로 하여 전체길이가 10cm가 된다고 밝혔다. 왜 그렇게 측정했는가? 라는 질문에 굽은 길이라서 자를 옮겨가며 재었다고 응답하였다.



[그림 8] 부분의 합으로서 전체 길이를 인식하지 못하는 예
[Fig 8] No recognition of the entire length as a sum of the parts

눈금에 숫자가 지워진 자를 이용하여 길이를 측정함으로써 1cm의 누적으로 길이를 이해하고, 자보다 긴 물건의 길이 측정을 통해 분할된 길이의 합을 통하여 전체 길이를 인식할 수 있는 활동을 경험했음에도 학생3은 아직 이러한 측정의 일반절차를 인지하지 못했음을 알 수 있었다. 이를 통해 학생3과 같이 아직 측정의 일반절차를 인지하지 못한 학생들을 위하여 단위의 누적으로서 길이 측정, 굽은 경로나 자보다 긴 길이의 측정활동이 좀 더 지속적으로 제공 되어야함을 알 수 있다.

다. 「길이 어렵하기」에서의 재구성 과제 실행

길이 어렵하기 수업은 눈짐작으로 실제의 길이에 가깝게 예상하는 방법을 학습하고, 실제의 길이와 비교하여 봄으로써 길이감을 형성하는 것이 주요 활동이다. 따라서 되도록 많은 경험을 통해서 좀 더 정확한 양감을 기를 수 있도록 반복적인 활동을 실시하였다.

아직 양감 형성이 완전하지 못한 학생들에게는 관련된 지식이나 경험을 활용하여 문제를 해결해야하는 것은 어려울 수 있다. 따라서 어렵하여 길이 자르기 활동에 앞서 학생들이 어렵하는 방법을 잘 찾아 낼 수 있도록 비계를 설정해 주기 위해 색막대의 길이를 어렵해보는 게임 활동을 실시하였다. 검은 봉지 안 색막대의 길이를 어렵하는 놀이 활동으로 술래가 눈을 감고 있으면 다른 친구들이 봉지 안에 1cm부터 10cm까지의 다양한 색막대 중 하나를 집어넣고, 술래는 눈을 감고 색막대를 만져보기만 하여 길이를 어렵하는 놀이 활동이다. 놀이 활동 후, 몸의 여러 부분을 어렵해 보는 활동2를 시행하였다. 몸의 여러 부분을 어렵할 때 어떤 전략을 사용해야 할지 교사가 안내해 주지 않았음에도 학생4는 지난 차시에서 길이가 1cm인 흰색막대를 사용하여 길이를 측정하였던 경험으로 떠올리며 그때의 양감을 바탕으로 여러 부분의 길이를 측정하는 모습을 보였다.



[그림 9] 1cm 흰색막대의 측정 경험을 전략으로 사용하여 어렵하는 예
[Fig 9] Using the strategy of measuring 1cm white rod for estimation

이를 통해, 길이가 1cm 흰색막대를 통하여 길이를 어렵하고 확인해보는 활동과 길이를 측정해 보는 활동 등이 학생들에게 1cm의 양감을 기르는데 도움이 되었으며, 어렵전략으

로 까지 이어졌음을 알 수 있다.

많은 학생들이 어렵하는 전략으로 눈짐작보다는 손가락너비, 손가락 마디 같은 자신의 몸의 일부분을 참조물로 사용하는 것을 선호하였으며, 앞선 활동에서의 측정을 통해 길이를 알고 있는 가위, 딱풀, 지우개 등의 물건을 참조물로 사용할 수 있음을 인지하지 못하였다. 지속적인 어렵활동이 이루어지면서 어렵값과 측정값의 차이를 줄이기 위해서 어떻게 하면 좋을지 전체논의를 통해 길이를 알고 있는 막대를 어렵에 사용하면 좋을 것이라는 의견에 따라 마지막 어렵하기 놀이에서는 길이가 5cm인 막대를 활용하여 길이를 어렵할 수 있도록 교사가 안내하였다.

【에피소드 6: 참조물을 사용하여 어렵이 정교해짐】

T : 칫솔의 길이를 얼마로 어렵했어? S3: 약 12cm요.

T : 왜 12cm 정도라고 생각했는지 설명해 줄 수 있을까?

S3: 막대로 두 번해서 10cm에다가 남는 부분은 한 2cm정도?

T : 왜 남는 부분이 2cm정도라고 생각했어?

S3: 음…….막대 반보다 적어서요.



[그림 10] 막대를 참조물로 어렵하는 예

[Fig 10] Estimating object using a bar for the reference

어렵전략으로 몸의 일부분이나 자신이 1cm라고 생각하는 길이만큼 추측하며 길이를 어렵하는 것보다 실제 길이를 알고 있는 물건을 이용하여 어렵했을 때, 실제의 측정값과 더 가깝게 어렵을 했으며, 추론하는 방법도 좀 더 합리적임을 알 수 있었다. 따라서 길이를 알고 있는 참조물을 사용하는 어렵활동이 충분히 이루어질 필요가 있다.

V. 결 론

위와 같은 연구결과를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 요구 수준을 높게 재구성한 과제의 실행에서 나타난 것처럼 학생들로 하여금 개념을 사용하도록 요구하고, 수학적으로 의미 있는 것이나 관련된 수학적 아이디어들을 의식적으로 연계 짓도록 이끄는 과제들은 학생들의 생각을 보다 폭넓게 하고 보다 다양하게 할 수 있음(Stein at al, 2000)을 알 수 있었다. 따라서 과제의 설정에서부터 과제에서 학생들에게 요구하는 수준을 높게 하여 제시할 필요가 있다. 이때, 수업에서 낮은 인지 수준의 과제들만 치우친다면 측정에서의 단위의 선택이나 측정 절차에 대한 고민 없이 단기수행의 과제들의 비중이 높아져 학생들의 편협적인 사고를 유발할 것이다. 그렇다고 높은 인지 수준의 과제가 많은 것이 좋다는 것은 아니다. 수학과제마다 높은 인지적 사고를 요구한다면 과제 해결에 시간이 오래 걸리는 문제로 인해 수업에서 교사가 적절한 교수·학습

방법을 구현하기 어려울 것이며, 학생들의 수학적 태도의 정의적 측면에서 부정적인 영향을 줄 수도 있기 때문이다. 따라서 다양한 유형의 과제들을 적절히 구성하여 실행 하여야 할 필요가 있다.

둘째, 초등학교 교육과정 이전인 누리 과정에서도 측정 지도에 있어 길이, 크기, 무게, 길이, 시간 등의 속성을 비교하고 순서 짓는 것에서 시작하여 더 나아가 사물이 지닌 속성의 크기를 기준량(단위)을 정하여 수치로 나타내도록 지도하고 있다. 아동의 길이에 대한 사고 수준의 발달 방향은 일반적으로 길이 수량 인식기에서 직접, 간접 비교기를 지나 6개 이상 연속 순서기, 끝에서 끝까지 길이 측정기를 거쳐 하나의 단위길이를 사용하여 길이를 측정하고 단위와 길이 사이의 관계를 이해하는 길이 단위 관계기 및 반복기로 나아가는데 누리과정에서도 「6개 이상 연속 순서기(serial orderer to 6+)」, 「끝에서 끝까지 길이 측정기(end to end length measurer)」 수준에 대한 형식적인 지도가 없으므로, 초등학교 과정에서 이에 대한 형식적으로 지도할 필요가 있다.

셋째, 초등학교 1, 2학년 아동들의 인지발달 수준이 다양하다(강충열, 윤순중, 2007)는 선행연구처럼 실제 과제를 해결하는 과정에서 「끝에서 끝까지 길이 측정기(end to end length measurer)」가 확립되지 못해 동등한 단위길이의 필요성을 인지하지 못하고 있는 학생들이 발견되었다. 「끝에서 끝까지 길이 측정기(end to end length measurer)」 유형의 추가된 과제가 학생들이 동등한 단위의 필요성, 측정의 중요한 구성요소인 단위로 측정의 대상을 겹치지 않기, 빈틈없이 덮기, 반복 측정 가능, 단위의 누적으로 길이를 이해하는데 효과적임을 알 수 있었다. 나아가 하나의 단위를 반복 사용하여 길이를 측정하는 「길이 단위 관계기 및 반복기(length unit relater & iterater)」 또한 정교해지는 것을 볼 수 있었다. 따라서 다양한 수준의 학생들이 함께 수업을 받는 교실에서 이러한 학생들을 위해 형식적으로 「끝에서 끝까지 길이 측정기(end to end length measurer)」 유형의 과제를 제시할 필요가 있다.

넷째, 재구성된 과제에서 눈금에 숫자가 지워진 자를 이용하여 길이를 측정함으로써 1cm의 누적으로 길이를 이해하고, 자보다 긴 물건의 길이 측정을 통해 분할된 길이의 합을 통하여 전체 길이를 인식할 수 있는 활동들이 이루어졌다. 이러한 활동을 통해 단위의 누적으로서 길이 측정, 굵은 경로나 자보다 긴 길이의 측정에 대한 학생들의 이해가 나아짐을 볼 수 있었다. 길이 측정에 대한 아동의 사고 수준의 발달 방향을 따른 학습경로에 대한 Clements & Sarama (2009)의 연구에 따르면 일반적으로 2학년 아동의 사고 수준은 「경로 측정기(path measurer)」 이상 도달해 있다고 볼 수 있다. 하지만, 여전히 수업 실행 이후에도 경로측정기 수준의 사고가 확립되지 못하여 부분의 합으로서 전체를 인식하는데 어려움을 보이는 학생이 있었다. 이러한 학생을 위하여 지속적으로 측정의 일반 절차를 탐구할 수 있는 단위의 누적으로서 길이 측정, 굵은 경로나 자보다 긴 길이의 측정활동이 좀 더 지속적으로 제공 되어야 할 필요가 있다.

다섯째, 아직 양감이 형성되지 못하여 「개념적 자 측정기(conceptual ruler measurer)」 수준의 사고에 도달하지 못한 학생들은 어렵하여 길이재기활동을 어려워하였다. cm에 대한 양감이 형성되지 못하여 시각적인 어렵전략은 사용하지 못하였으며, 참조물을 이용한 어렵 활동이 많이 이루어졌다. 이때, 학생들은 자신의 몸의 부분을 이용하여 어렵하기를 선호하였지만, 이러한 어렵은 정교하지 못하고 측정값과 어렵값에서도 큰 오차를 보였다. 반면 길이를 알고 있는 물건을 참조물로 사용하였을 때 길이를 추론하는 전략도 더 합리적이었으며 어렵값과 측정값의 오차도 더 적음을 알 수 있었다. 따라서 다양한 차시에서 다양한 과제를 통해 어렵해 볼 수 있는 기회를 지속적으로 제공하고 길이를 알고 있는 참조물을 사용한 어렵전략 활동이 충분하게 이루어지게 할 필요가 있다.

참 고 문 헌

- 강충열, 윤순중 (2007). 초등학교 1,2학년 아동의 인지발달 수준 분석과 초등교육과정에 주는 시사점 탐색. *초등교육학연구*, 14(2), 77-97.
- 교육과학기술부 (2012). *수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8])*. 교육부.
- 구미영 (2015). *초등학교 길이 측정 단원의 수학과제 분석 및 재구성 - 초등학교 2학년을 중심으로*. 한국교원대학교 석사학위 논문.
- 김민혁 (2012). 수학교사의 교과서 및 교사용 지도서 활용도 조사. *학교수학*, 15(3), 503-531.
- 방정숙 (2004). 초등학교 수학 수업에 관한 과제 중심의 사례분석. *초등수학연구*, 17(2), 419-442.
- 우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈 (2007). *수학교육학 연구방법론*. 서울: 경문사.
- Ainley, J., & Pratt, D. (2002). Purpose and utility in pedagogical task design. In A. Cockburn & E. Nardi(Eds), *Proceedings of the twenty sixth annual conference of the international group for the psychology of mathematics education: Vol. 2*(pp.17-24). Norwich, UK: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach (Studies in Mathematical Thinking and Learning Series)*. Routledge.
- English, L. D. (1998). Children's perspectives on the engagement potential of mathematical problem tasks. *School Science and Mathematics*, 98(2), 67-72.
- Jacqueline, L. (1999, April). When the task is not just a task: What one mathematics teacher learned about facilitating student discourse. *Paper presented at the annual meeting of American Educational Research Association*. Montreal, CA.
- Kang, C. & Yoon, S. (2007). An analysis of the first to second grade elementary school children's cognitive development levels and implications for the elementary school curriculum. *Journal of Elementary Education Studies*, 14(2), 77-97.
- Kim, M. (2012). Secondary Mathematics Teachers' Use of Mathematics Textbooks and Teachers' Guide. *School Mathematics*, 15(3), 503-531.
- Ku, M. (2015). *Analyzing and restructuring mathematical tasks of length measurement in elementary school mathematics - Focused on 2nd graders*. Korea National University of Education Master's Thesis.
- Ministry of Education (2012). *Mathematics curriculum (Ministry of Education Announcement No. 2011-361 [Supplement 8])*.

- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The Author. 류희찬 외 공역(2007). **학교수학을 위한 원리와 기준**. 서울: 경문사.
- Pang, S. (2004). Case analysis of elementary school mathematics instruction via task analysis. *The Journal of Elementary Education, 17*(2), 419-442.
- Sarama, J., Clements, D. H., Barrett, J. E., Van Dine, D. W., & Mcdonel, J. S. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *ZDM Mathematics Education, 43*(5), 667-680.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.
- Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.
- Szilag, J., Clements, D. H., & Sarama, J. (2013). Young children's understanding of length measurement: Evaluating a learning trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(3), 581-620.
- U, J., Jung, Y., Park, K., Lee, K., Kim, N., Na, G., & Lim, T. (2007). **수학교육학 연구방법론**. 서울: 경문사.

<Abstract>

Analyzing and Restructuring Mathematical Tasks of Length Measurement in
Elementary School Mathematics
- Focused on 2nd Graders -

Ku, Miyoung³⁾; & Lee, Kwangho⁴⁾

The purpose of this research is to analyze the mathematical tasks of length measurement in two different perspectives, the level of cognitive demands and learning trajectories, and restructure the mathematical tasks so that the students' conceptual learning is promoted and students are able to have opportunities to think more broadly. Ten lessons with the restructured mathematical tasks were implemented for a class of 2nd grade elementary students. Also a qualitative and in-depth study was conducted with 4 students of the target group. The study shows that firstly, the restructured tasks requiring high level of cognitive skills, had positive effects in increasing the students' level of thinking and reasoning. Secondly, the tasks modified according to the learning trajectories of Szilag, Clements & Sarama(2013) in length measurement, have proven to promote students' concept learning and elaborate the students' level of thinking.

Key Words: Mathematical tasks, length, learning trajectories, cognitive demands

논문접수: 2015. 07. 22

논문심사: 2015. 08. 16

게재확정: 2015. 08. 21

3) start75@naver.com

4) paransol@knue.ac.kr