

# 상하동요하는 2차원 주상체의 고유진동수; 주파수 영역 해석

송제하<sup>1</sup>·이승준<sup>2,†</sup>  
한진중티엠에스 기본연구팀<sup>1</sup>  
충남대학교 선박해양공학과<sup>2,†</sup>

## Natural Frequency of 2-Dimensional Cylinders in Heaving; Frequency-Domain Analysis

Je-ha Song<sup>1</sup>·Seung-joon Lee<sup>2,†</sup>  
Basic R&D Team, HHIC-TMS<sup>1</sup>  
Dept. Naval Architecture and Ocean Engineering, Chungnam National University<sup>2,†</sup>

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Following the previous works on the natural frequency of heaving circular cylinder, i.e. Lee and Lee (2013) and Kim and Lee (2013), an investigation of the same spirit on the 2-dimensional cylinder of Lewis form has been conducted. As before, the natural frequency is defined as that corresponding to the local maximum of the MCFR (Modulus of Complex Frequency Response), which is given by the equation of motion in the frequency domain analysis. Hydrodynamic coefficients were found by using the Ursell-Tasai method, and numerical results for them were obtained up to much higher frequencies than before, for which the method was known as numerically unstable in the past. For a wide range of  $H$ , the beam-draft ratio, and  $\sigma$ , the sectional area coefficient, including their practical ranges for a ship, results for the natural frequency were computed and presented in this work. Two approximate values for the natural frequency, one proposed by Lee (2008) and another one by the damped harmonic oscillator, were also compared with the current results, and for most cases it was observed that the current result is between the two values. Our numerical results showed that the values of the local maximum of MCFR as well as the natural frequency increase as  $\sigma$  increases while  $H$  decreases. At present, extension of the present finding to the 3-dimensional ship via the approximate theory like the strip method looks promising.

**Keywords** : Natural frequency(고유진동수), Frequency domain analysis(주파수 영역 해석), Heaving cylinder(상하동요하는 주상체), Added mass(부가 질량), Wave damping(조파 감쇠), Lewis form (Lewis 형상), Modulus of complex frequency response (복소진동응답크기)

## 1. 서론

최근 들어 부유식 구조물을 활용한 해양에너지 개발이 활발히 이루어 지고 있다. 부유식 구조물은 수면 위에서 상하동요(heaving), 횡동요(rolling), 선수동요(yawing) 등의 움직임을 보이게 되며, 시추 및 생산 설비의 효율을 극대화 하기 위해 초기 설계시 6자유도 운동에 대한 고유진동수 예측이 매우 중요시 되고 있다. 부유체의 6자유도 운동중의 하나인 상하동요에 관하여 이전 연구로는 Lee and Lee (2013)의 주파수 영역 해석을 통해, 그리고 Kim and Lee (2013)는 시간 영역 해석을 통해, 자유수면 상에서 상하동요하는 원주의 무차원 고유진동수  $\Omega_1$ 을 MCFR

(Modulus of Complex Frequency Response)의 국부 최대값으로 정의할 수 있음을 보였다.

본 연구에서는 자유수면 상에서 상하동요하는 2차원 주상체의 고유진동수를 주파수 영역 해석을 통해 얻었으며, 원주를 포함한 여러 가지 형상을 주상체의 형상으로는 Lewis 형상을 사용하였다. 자유 상하동요하는 주상체의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(m + m_a)\ddot{Y} + \mu\dot{Y} + CY = 0 \quad (1)$$

여기서  $m_a$ 는 부가 질량,  $\mu$ 는 조파 감쇠이며,  $C$ 는 복원력상

수이다. 부가 질량과 조파 감쇠를 얻기 위해서는 Tasai (1959)의 Ursell-Tasai 방법을 사용하였다. 차후의 시간 영역 해석을 고려하여 진동수가 매우 큰 영역에서 대해서도 수치 계산을 수행하였으며, 기존의 결과들과 비교하여 매우 큰 진동수들에 대해서도 수치적으로 안정된 결과를 얻었다. 이 결과를 사용하여, 실제 선박에 사용되는 형상들의 범위를 포함하는 폭-흘수 비  $H$ 와 단면적 계수  $\sigma$ 의 범위에 대해 고유진동수  $\Omega_n$ 을 얻었다.

한편 Lee (2008)는 부가 질량만을 고려한 근사적인 고유진동수  $\Omega_a$ 를 구하는 방법을 제안한 바 있는데, 이 방법에 의한 근사값도 구하여 위에서 정의된 고유진동수  $\Omega_n$ 의 값들과 비교하였다. 또한 통상 많이 사용되는 조화감쇠 동요 근사에 의한 고유진동수  $\Omega_h$ 도 구하여 같이 비교하였으며, 일반적으로  $\Omega_a > \Omega_n > \Omega_h$ 의 결과를 얻었다. 계산된 범위 내에서는  $H$ 가 감소하거나,  $\sigma$ 가 증가하면, 고유진동수  $\Omega_n$ 과 이 진동수에서의 MCFR의 값은 증가하는 경향을 보였다. 본 연구에서 얻어진 결과를 토대로 실제 선박에 대한 고유진동수 추정 또한 스트립 방법 등을 사용하여 가능할 것으로 판단된다. 2절, 3절에서는 문제의 정식화와 그 해법에 대해 간단히 설명하고, 4절에서는 계산 결과에 대한 토론, 5절에서는 결론을 맺기로 한다.

## 2. 문제의 정식화

### 2.1 좌표계

본 연구에서의 좌표계는 Fig. 1에 나타낸 바와 같으며, 물리적 평면에 대해  $(x, y)$ 와 Lewis 변환을 위한 수학적 평면에 대해  $(\xi, \eta)$ 를 사용하였고, 주상체의 반폭은  $a$ , 흘수는  $d$ 이다.

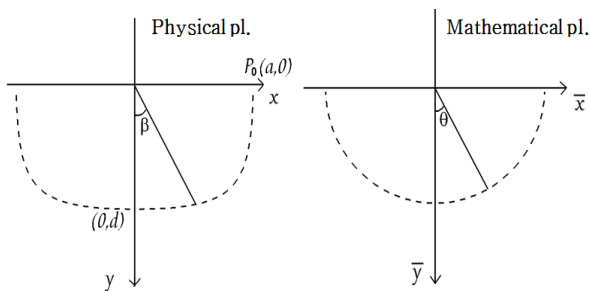


Fig. 1 Co-ordinate system

본 연구에서는 이상 유체의 비회전성 유동장을 가정하며, 대칭성에 기인하여 제 1사분면만을 고려하면 충분하다. 주상체의 상하동요는 다음 식으로 주어지는데,

$$Y(t) = l \cos(\omega t + \epsilon) \quad (2)$$

여기서  $l$ 는 상하동요의 진폭이고,  $\omega$ 는 진동수,  $\epsilon$ 은 방사파와의 위상차로 미지량이다.

### 2.2 경계치 문제

자유수면 상에서 상하동요하는 2차원 주상체에 대한 경계치 문제는, 비압축성 유체에 대한 연속방정식, 선형화된 자유수면 경계조건, 수저조건, 물체 경계조건 및 방사조건으로 구성되며 속도 포텐셜  $\phi(x, y, t)$ 에 대해 다음과 같다.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0 \text{에서.} \quad (3)$$

$$K\phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0 \text{에서.} \quad (4)$$

여기서  $K = \omega^2/g$ 으로 파수이다.

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty \text{일 때.} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{dY}{dt} \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \text{물체 표면에서.} \quad (6)$$

$\hat{n}$ 는 물체 표면에서 바깥쪽으로 향하는 법선 방향의 단위 벡터이며, 수학적 평면에서 물체는 단위 원에 상응하므로, 물체 경계조건을 유량 함수에 대해 다시 쓰면 다음을 얻는다.

$$\left(-\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)_{\alpha=0} = \frac{dY}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \quad (7)$$

여기서  $\zeta = \xi + i\eta = ie^\alpha e^{-i\theta}$ 로 쓸 수 있으며, 따라서  $\alpha = 0$ 는 단위 원의 원주에 상응한다.

마지막으로 주상체의 상하동요에 의해 생성된 파도는 주상체로부터 먼 쪽으로 전파된다는 방사조건을 만족해야 한다.

## 3. 이론적 해석

### 3.1 Ursell-Tasai 방법

본 연구에서 사용한 Ursell-Tasai 방법은 매우 잘 알려져 있으므로, 자세한 사항은 Song (2014)으로 미루기로 하고, 다음 절들에서 사용할 물리량들에 대한 혼동을 피하기 위해 정의 위주로 간략히 다루기로 한다.

Lewis 변환은 다음 식으로 주어진다.

$$z(\zeta) = x + iy = M_f \left( \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_3}{\zeta^3} \right) \quad (8)$$

여기서  $M_f$ 는 배율 계수(magnification factor)이고,  $a_1, a_3$ 는 단면형상 계수(sectional form parameter)이다. 따라서 다음 관계를 얻으며,

$$x = M_f(\sin\theta + a_1\sin\theta - a_3\sin3\theta) \quad (9)$$

$$y = M_f(\cos\theta - a_1\cos\theta + a_3\cos3\theta) \quad (10)$$

주상체의 반폭  $a$ 와 흘수  $d$ 를 다음과 같이 얻는다.

$$a = M_f(1 + a_1 + a_3) \quad (11)$$

$$d = M_f(1 - a_1 + a_3) \quad (12)$$

또한 주상체의 단면적 계수(sectional area coefficient)  $\sigma$ 와 폭-흘수 비(beam-draft ratio)  $H$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma = \frac{A_s}{2ad} = \frac{\pi(1 - a_1^2 - 3a_3^2)}{4(1 + a_1 + a_3)(1 - a_1 + a_3)} \quad (13)$$

$$H = \frac{2a}{d} = \frac{2(1 + a_1 + a_3)}{(1 - a_1 + a_3)} \quad (14)$$

식 (13)에서의  $A_s$ 는 주상체의 단면적이다.

Ursell (1949)에 따르면 속도 포텐셜은 다음과 같다.

$$\frac{\pi\omega}{gb} \phi = \cos\omega t \left( \phi_c + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} R_{2n} \right) + \sin\omega t \left( \phi_s + \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} R_{2n} \right) \quad (15)$$

여기서  $b$ 는 주상체의 상하동요에 의해 생성 전파되는 물체로부터 상당히 떨어진 곳에서의 진행파, 즉 방사파의 진폭이다.  $p_{2n}$ 과  $q_{2n}$ 은 미정으로 물체 경계조건을 만족하도록 결정되어야 하며,  $\phi_c$ 와  $\phi_s$ 는 진행파,  $R_{2n}$ 은 국부교란 유동을 나타낸다. 또한 식 (15)의 속도 포텐셜에 공액(conjugate)인 유량 함수는 다음과 같다.

$$\frac{\pi\omega}{gb} \psi = \cos\omega t \left\{ \psi_c + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} S_{2n} \right\} + \sin\omega t \left\{ \psi_s + \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} S_{2n} \right\} \quad (16)$$

여기서  $\psi_c$ 와  $\psi_s$ 는 각각  $\phi_c$ 와  $\phi_s$ 의 공액이다.  $\kappa = K a$ 라고 하면 유량 함수를 사용한 물체 경계조건은 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} p_{2n} = -\psi_c - \alpha_L(\theta)\pi \sin\kappa \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} q_{2n} = -\psi_s - \alpha_L(\theta)[-\pi \cos\kappa + (ci(\kappa) \sin\kappa - si(\kappa) \cos\kappa)] \quad (18)$$

여기서  $\alpha_L(\theta)$ 는 다음과 같은 함수이고,

$$\alpha_L(\theta) = \frac{\sin\theta + a_1 \sin\theta - a_3 \sin3\theta}{1 + a_1 + a_3} \quad (19)$$

$ci, si$ 는 각각 코싸인 적분, 싸인 적분이다.

한편 방사파의 진폭과 상하동요하는 2차원 주상체의 진폭의 비,  $b/l$ 은 다음과 같이 주어지는데,

$$\frac{b}{l} = \frac{\pi\kappa}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (20)$$

여기서  $\kappa_L = \kappa / (1 + a_1 + a_3)$ 라고 하면,  $A$ 와  $B$ 는 각각 다음과 같다.

$$A(\kappa) = \pi \sin\kappa + \quad (21)$$

$$\kappa_L \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n p_{2n} \left( -\frac{1}{2n-1} + \frac{a_1}{2n+1} + \frac{3a_3}{2n+3} \right)$$

$$B(\kappa) = -\pi \cos\kappa + [ci(\kappa) \sin\kappa - si(\kappa) \cos\kappa] + \quad (22)$$

$$\kappa_L \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q_{2n} \left( -\frac{1}{2n-1} + \frac{a_1}{2n+1} + \frac{3a_3}{2n+3} \right)$$

식 (17), (18)을 풀어  $p_{2n}$ 과  $q_{2n}$ 을 구하면, 비정상 유동에 대한 베르누이 방정식을 사용하여 물체표면에서의 압력을 구할 수 있고, 압력의 연직방향 성분을 적분하여 부가 질량과 조파 감쇠를 얻을 수 있다. 먼저 물체표면 상에서의 압력은 다음과 같고,

$$P|_s = \frac{\rho g b}{\pi} (-M \cos\omega t + N \sin\omega t) \quad (23)$$

$$M = \phi_s + \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} R_{2n}, N = \phi_c + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} R_{2n} \quad (24)$$

여기서 하첨자  $S$ 는 물체표면을 뜻하며,  $M, N$  또한 물체표면에서 계산된 값이다. 부가 질량과 조파 감쇠는 다음과 같이 얻을 수 있으며,

$$m_a = \frac{2\rho a^2(M_0 B + N_0 A)}{A^2 + B^2}, \mu = \frac{2\rho a^2\omega(M_0 A - N_0 B)}{A^2 + B^2} \quad (25)$$

여기서  $M_0, N_0$ 는 다음과 같다.

$$M_0 = \int_0^{\pi/2} M\beta_L(\theta)d\theta, N_0 = \int_0^{\pi/2} N\beta_L(\theta)d\theta \quad (26)$$

$$\beta_L(\theta) = \frac{\cos\theta + a_1 \cos\theta - 3a_3 \cos 3\theta}{1 + a_1 + a_3} \quad (27)$$

또한 수치 계산의 정확성을 검사하기 위해 다음 식을 이용할 수 있다.

$$M_0A - N_0B = \frac{\pi^2}{2} \quad (28)$$

따라서 부가 질량계수와 조파 감쇠계수는 다음과 같이 주어진다.

$$C_a = \frac{m_a}{m} = \frac{4}{\pi} \frac{M_0B + N_0A}{A^2 + B^2} \frac{(1 + a_1 + a_3)^2}{1 - a_1^2 - 3a_3^2} \quad (29)$$

$$C_\mu = \frac{\mu}{m\omega} = \frac{4}{\pi} \frac{M_0A - N_0B}{A^2 + B^2} \frac{(1 + a_1 + a_3)^2}{1 - a_1^2 - 3a_3^2} \quad (30)$$

위의 식에서  $a_1 = a_3 = 0$ 인 경우, 원주에 대한 결과를 얻는 것을 확인할 수 있다.

### 3.2 고유진동수

상하동요하는 주상체의 부가 질량과 조파 감쇠를 고려하지 않은 경우에 대한 원고유진동수(pre-natural frequency)  $\omega_0$ 와 그에 상응하는 무차원 파수  $\kappa_0$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\omega_0^2 = \frac{2\rho ga}{\rho A_s} = \frac{2ga}{A_s}, \kappa_0 = \frac{\omega_0^2 a}{g} = \frac{2a^2}{A_s} \quad (31)$$

Lee (2008)는 부가 질량만을 고려한 경우의 근사적인 고유진동수  $\omega_a$ 를 다음 식의 해로 정의하였다.

$$\omega_a^2 = \frac{2\rho ga}{m + m_a} = \frac{\omega_0^2}{1 + c_a(\omega_a)} \quad (32)$$

이하에서는 모든 진동수를 원고유진동수  $\omega_0$ 로 무차원화하고,  $\Omega_a$ 와 같이 나타내기로 한다.

식 (1)로부터 무차원화된 MCFR,  $R^*(\Omega)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있는데,

$$R^*(\Omega) = \frac{R(\omega)}{C} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (1 + C_a)\Omega^2]^2 + C_\mu^2\Omega^4}} \quad (33)$$

여기서  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ 이며,  $\frac{dR^*}{d\Omega} = 0$ 일 때의 무차원 진동수  $\Omega_n$ 을 무차원 고유진동수로 정의한다.

위에서 정의한 무차원 진동수들을 표로 정리하면 Table 1과 같다.

Table 1 Definition of various frequencies

	Definition
$\Omega_a$	Dimensionless freq. considering $C_a$ only
$\Omega_m$	Dimensionless freq. considering $C_{a\min}$ only
$\Omega_h$	Dimensionless freq. approx. of damped harmonic oscillator
$\Omega_n$	Dimensionless freq. considering $C_a$ and $C_\mu$

## 4. 계산 결과

### 4.1 주상체의 횡단면 형상

실제 선박의 횡단면 형상을 고려하여, 폭-흘수 비  $H = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$ , 또 단면적 계수  $\sigma = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ 에 대해, Lee and Lee (2013)에 의해 개발된 공치법(collocation method)을 사용하여 수치 계산을 수행하였다.

### 4.2 수치 계산 검증

계산 결과의 정확성을 검증하기 위해 식 (28)을 사용하여 오차  $E$ 를 다음과 같이 정의하고,

$$E = \left( \frac{M_0A - N_0B}{\pi^2/2} - 1 \right) \times 100(\%) \quad (34)$$

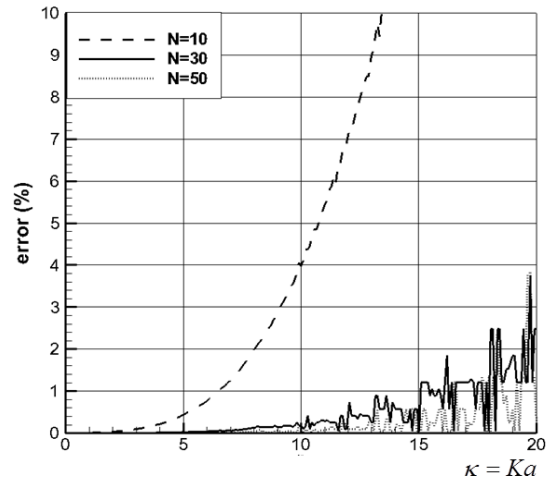


Fig. 2 Error as a function of  $\kappa$  for increasing  $N$

비교적 오차가 큰 경우인  $H=3.5$ ,  $\sigma=0.8$  인 형상에 대해 공치법에서의 미정 계수의 수인  $N=10, 30, 50$ 에 대한 오차를 Fig. 2에 보였다. 여기서  $N=50$ 에 대한 수치 결과는  $\kappa < 15$ 에 대해 1.0% 이하의 오차를 주고 있음을 확인할 수 있으며, 본 연구의 계산에서는  $N=50$ 으로 취한 공치법을 사용하였다.

### 4.3 계수 $p_{2n}$ 과 $q_{2n}$

속도 포텐셜의 수렴을 확인하기 위해  $H=3.5$ ,  $\sigma=0.8$ 인 경우에 대해  $p_{2n}$  과  $q_{2n}$ 의 변화를 Fig. 3, Fig. 4에 보였다.

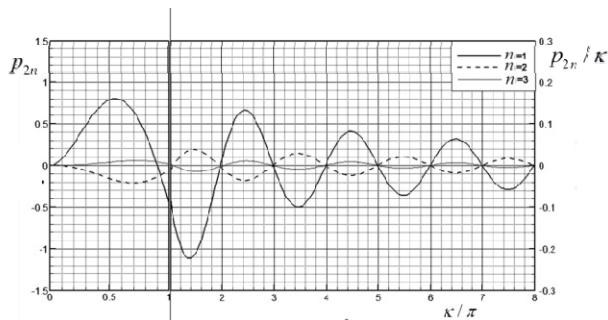


Fig. 3 Convergence of coefficients  $p_{2n}$  for increasing  $n$

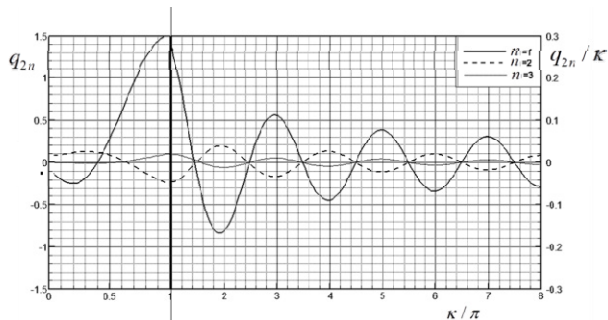


Fig. 4 Convergence of coefficients  $q_{2n}$  for increasing  $n$

여기서 수평축,  $\frac{\kappa}{\pi} = \frac{2a}{\lambda}$  이며,  $\frac{\kappa}{\pi} = 1$ 을 기준으로 좌우의 수직축의 크기를 다르게 나타내었다. 식 (17)과 (18)의 급수에서 계수  $p_2$ 와  $q_2$ 가 지배적임을 확인할 수 있으며, 또한 각각의 계수들이  $\kappa$ 에 따라 진폭이 서서히 감소하는 조화함수의 형태를 보이고 있고, 이는 원주에 대한 결과와 본질적으로 유사함을 확인하였다.

### 4.4 $b/l$ , 부가 질량 계수와 조파 감쇠 계수

각각의 형상에 대해  $b/l$ 은  $\kappa$ 의 함수이며, 국부 최대값을 가지는데,  $\sigma$ 가 변화함에 따른  $b/l$ 의 최대값을 Fig. 5에 보였다.  $H$ 가 증가할수록, 또  $\sigma$ 가 감소할수록 각 형상에 대한  $b/l$ 의 국부 최대값이 증가함을 알 수 있으며, 이는 폭이 크고, 또 수면 부근에서의 형상 변화가 클수록  $b/l$ 의 최대값이 증가하는 것을 뜻한다.

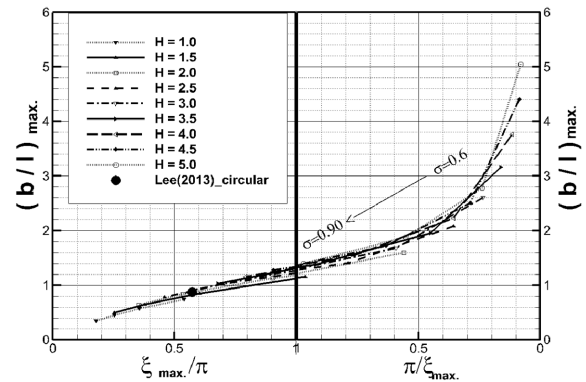


Fig. 5 Local maxima of  $b/l$  and the corresponding  $\xi$ , for varying  $H$  and  $\sigma$

Tasai (1959)는  $K_4(\kappa)$ 를 다음과 같이 정의하였고,

$$K_4 = \frac{4}{\pi} \frac{M_0 B + N_0 A}{A^2 + B^2} \frac{(1 + a_1 + a_3)^2}{(1 + a_1)^2 + 3a_3^2} \quad (35)$$

$K_4(\kappa)$ 에 대한 Tasai의 결과와 비교하여 Fig. 6, 7에 보였다. Tasai의 결과보다 훨씬 넓은  $\kappa$ 의 범위에 대해 충분히 만족할 만한 정확성을 가지는 결과를 얻고 있음을 확인할 수 있다.

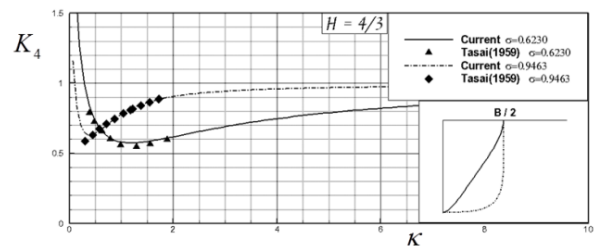


Fig. 6 Comparison of current results for  $K_4$  with those of Tasai (1959) for  $H=4/3$

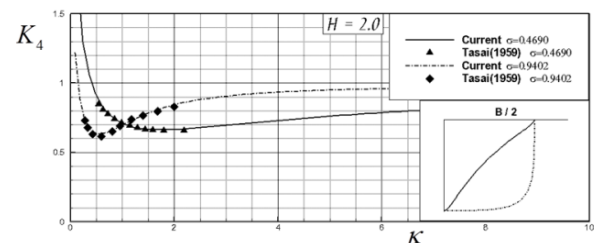


Fig. 7 Comparison of current results for  $K_4$  with those of Tasai (1959) for  $H=2.0$

각 경우에 대해 부가 질량 계수  $C_a(\kappa)$ 는 국부 최소값을 가지며, 이들 최소값의 각  $H$ 에 대해  $\sigma$ 에 따른 변화 경향을 최소값에 상응하는  $\kappa$ 의 값, 즉  $\kappa_{min}$ 의 함수로 Fig. 8에 보였다.  $C_a$

의 최소값과 그에 상응하는  $\kappa$ 의 값, 즉  $\kappa_{min}$ 은  $H$ 가 증가할수록, 또  $H \geq 2.0$ 인 경우에는  $\sigma$ 가 감소할수록 커지는 것을 확인할 수 있으며, 원주에 대한  $C_a$ 의 최소값은  $H \geq 2.0$ 인 경우에 대해서는 모든 형상 중 가장 작은 값을 가짐에 유의한다.

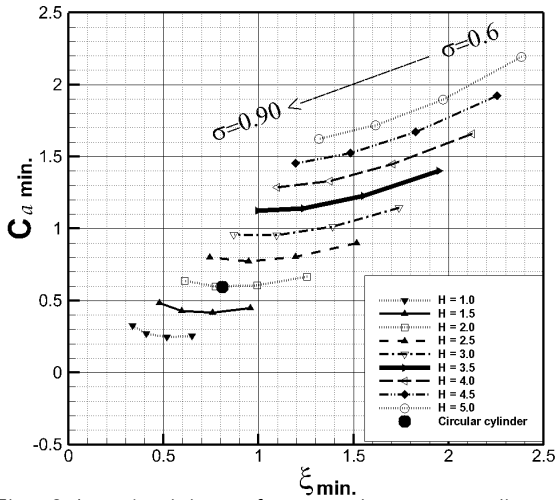


Fig. 8 Local minima of  $C_a$  and corresponding  $\kappa_{min}$  for various  $H$  and  $\sigma$

#### 4.5 부가질량에 상응하는 주상체의 무차원 진동수

Lee (2008)는 부가 질량만을 고려한 근사적인 고유진동수  $\omega_a$ 를 다음과 같은 반복자(iterator)를 통해 정의하였다.

$$\omega_{j+1} = \frac{\omega_0^2}{1 + C_a(\omega_j)}, \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_j = \omega_a \quad (36)$$

위 식을 이용하여 얻은 무차원 고유진동수  $\Omega_a$ 를 각  $H$ 에 대해  $\sigma$ 의 함수로 Fig. 9에 보였다.

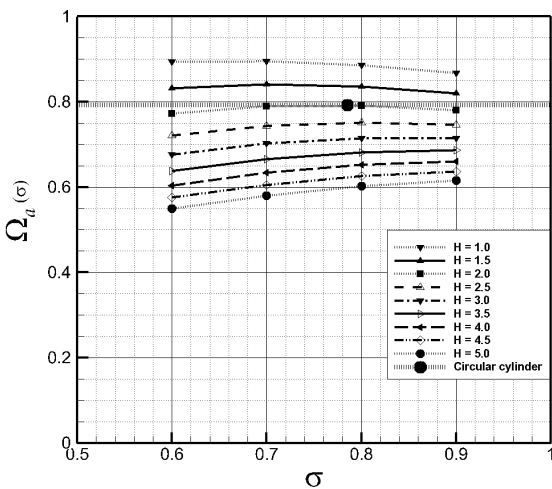


Fig. 9 Approximate natural frequency  $\Omega_a$  as a function of  $\sigma$  for various  $H$

$\Omega_a$ 는  $H$ 가 감소할수록, 또  $H \geq 2.0$ 인 경우에는  $\sigma$ 가 증가할수록 커지는 것을 확인할 수 있다. Lee and Lee (2013)는 2차원 원주에 대해  $\Omega_a=0.7919$ 를 얻었고, 이는  $\Omega_n=0.7970$ 과 비교하여 매우 좋은 근사임을 보였는데, 위의 그림에서 원주에 대한  $\Omega_a$ 는  $H \geq 2.0$ 인 모든 형상 중 최대값을 가짐을 알 수 있다.

각 경우에 대해 부가 질량 계수  $C_a$ 가 최소값을 가지는 진동수  $\Omega_m$ 을 Fig. 9에서와 같은 방식으로 Fig. 10에 보였다.  $\Omega_a$ 와  $\Omega_m$ 이 전반적으로 매우 유사한 경향을 나타냄을 확인할 수 있다.

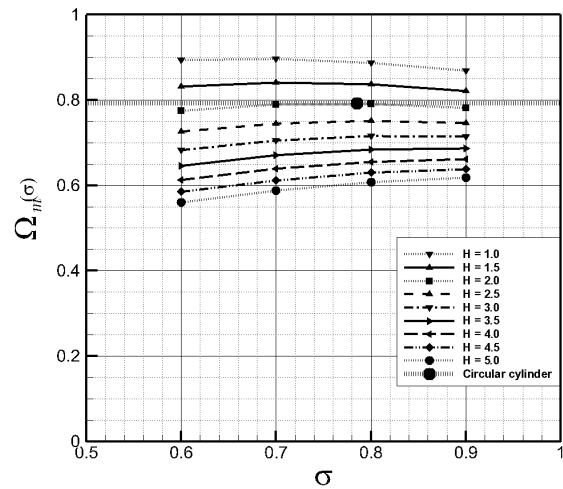


Fig. 10 Approximate natural frequency  $\Omega_m$  as a function of  $\sigma$  for various  $H$

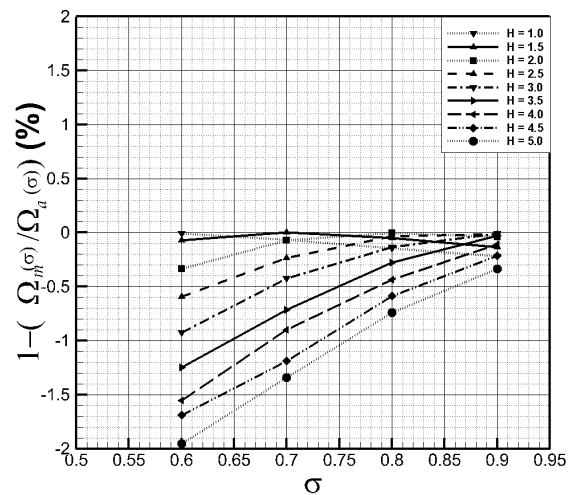


Fig. 11 Difference between  $\Omega_a$  and  $\Omega_m$  in percentage as a function of  $\sigma$  for various  $H$

$\Omega_a$ 와  $\Omega_m$ 의 차이를 %로 Fig. 11에 보였다.  $\Omega_a$ 와  $\Omega_m$ 의 값은  $H \geq 1.0$ 인 모든 형상에 대해 2% 이하의 차이를 보

이며,  $\Omega_a$ 는  $\Omega_m$ 으로 근사하여도 큰 오차를 범하지 않음을 알 수 있고, 또 대체적으로  $\sigma$ 가 감소하면 오차가 증가함을 확인할 수 있다. Lee, et al. (2013)에 따르면  $\Omega_a \approx \Omega_m$  이기 위한 조

건은  $\delta = \left| \frac{1}{1 + C_{a\min}} - \Omega_m^2 \right| \ll 1$ 인데, 예를 들어  $H=5.0$ ,

$\sigma = 0.6$ 인 경우,  $\kappa_{\min} = 2.4$ ,  $C_{a\min} = 2.2$ 이고,  $\Omega_m^2 = \frac{\kappa_{\min}\sigma}{H}$

$= 0.12\kappa_{\min}$ 이며, 따라서  $\delta = 0.0245$ 를 얻어, 위의 조건이 만족 되는 것을 확인할 수 있다.

### 4.6 상하동요 무차원 진동수들의 비교

식 (33)의 MCFR의 국부 최대값에 상응하는 진동수, 즉 본 연구에서 상하동요의 고유진동수로 정의한  $\Omega_n$ 을 각 형상에 대해 Fig. 9에서와 같은 방식으로 Fig. 12에 보였다. 전반적으로는  $\Omega_a$  및  $\Omega_m$ 과 비슷한 경향, 즉  $\Omega_n$ 은  $H$ 가 감소할수록, 또  $H \geq 2.0$ 인 경우에는  $\sigma$ 가 증가할수록 큰 값을 가지는 것을 볼 수 있으며, Lee and Lee (2013)가 얻은 2차원 원주에 대한 값인  $\Omega_n = 0.7970$ 이  $H \geq 2.0$ 인 모든 형상 중 최대값임을 알 수 있다.

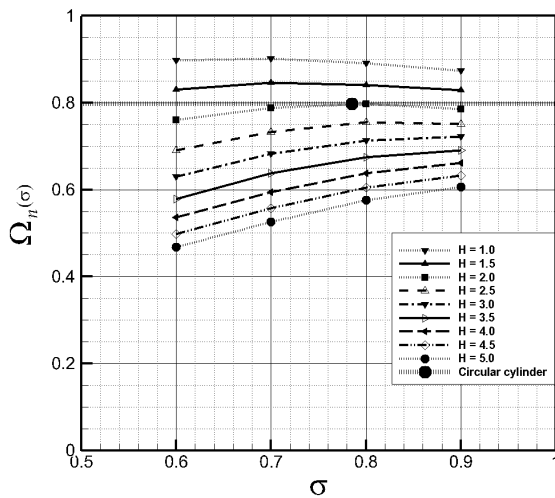


Fig. 12 Natural frequency  $\Omega_n$  as a function of  $\sigma$  for various  $H$

한편, 식 (33)의  $R^*$ 가 국부 최대값을 가지는  $\Omega_n$ 에서의 부가 질량과 조파 감쇠를 사용하면, 식 (1)에서 보인 운동 방정식의 계수가 상수인 미분방정식으로 변화하며, 이와 같은 근사는 조파 감쇠 동요로 볼 수 있고, 이에 대한 MCFR  $R_h^*(\Omega)$ 는 다음과 같다.

$$R_h^*(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (1 + c_{an})\Omega^2]^2 + C_{\mu n}^2 \Omega^4}} \quad (37)$$

여기서  $C_{an} = C_a(\Omega_n)$ ,  $C_{\mu n} = C_\mu(\Omega_n)$ 이고, 수치 계산 결과를 사용하여  $\frac{dR_h^*}{d\Omega} = 0$ , 국부 최대값을 가지는 진동수  $\Omega_h$ 를 구할 수 있으며, 이 결과를 Fig. 13에 보였다.

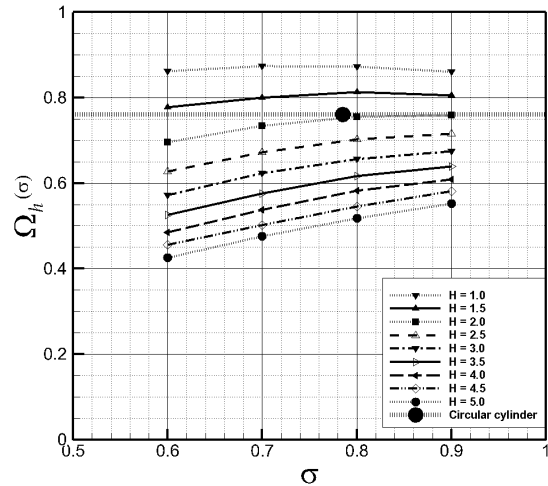


Fig. 13 Approximate natural frequency  $\Omega_h$  as a function of  $\sigma$  for various  $H$

일반적으로  $\Omega_h$ 는  $\Omega_n$ 보다 작은 값을 가지며, 각각의 단면 형상에 대한  $R_h^*(\Omega)$ 는  $R^*(\Omega)$ 와는 최대값의 위치, 최대값의 크기 등이 모두 다른 특징을 가진다.

$\Omega_a$ 와  $\Omega_n$ 의 차이,  $\Omega_h$ 와  $\Omega_n$ 의 차이를 %로 각각 Fig.14, 15에 보였다. 일반적으로  $\Omega_a > \Omega_n > \Omega_h$ 의 결과를 보여 주고 있다.  $H$ 가 증가할수록 또  $\sigma$ 가 감소할수록 그 차이는 증가한다. 이는 조파 감쇠가  $H$ 가 증가할수록 또  $\sigma$ 가 감소할수록 증가하는 경향과 일치하며, 조파 감쇠가 커지면 고유진동수를 결정함에 있어 조파 감쇠를 무시할 수 없음을 알 수 있다.

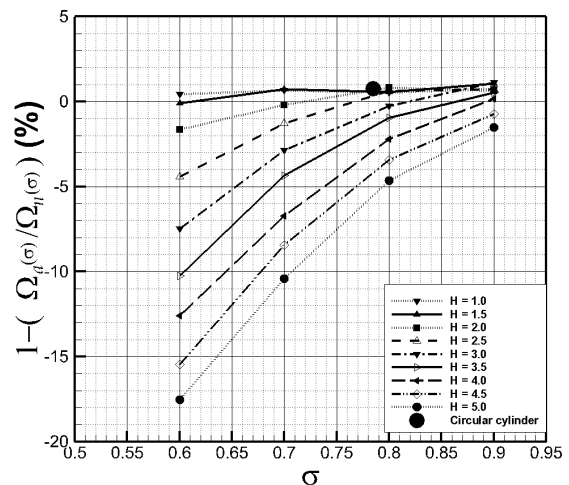


Fig. 14 Difference between  $\Omega_n$  and  $\Omega_a$  in percentage as a function of  $\sigma$  for various  $H$

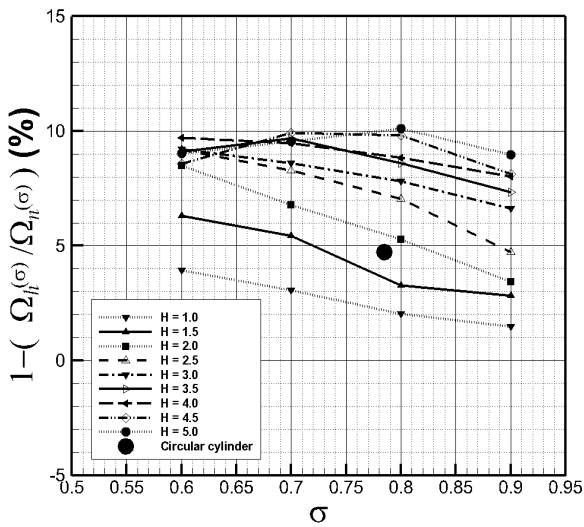


Fig. 15 Difference between  $\Omega_n$  and  $\Omega_h$  in percentage as a function of  $\sigma$  for various  $H$

#### 4.7 주상체의 형상 변화에 따른 고유진동수

주상체의 중간 형태인  $H=3.5$ ,  $\sigma=0.8$ 인 형상에 대한 결과를 기준으로 잡아  $H$ 와  $\sigma$ 가 각각 변화할 때,  $\Omega_n$ 의 값과 그에 상응하는 MCFR  $R^*$ 의 값이 어떻게 변화하는지를 Fig. 16, 17에 각각 보였다.  $H$ 가 감소함에 따라  $\Omega_n$ 과 그에 상응하는  $R^*$ 의 값이 증가함을 알 수 있으며, 이는  $C_{a\min}$ 이  $H$ 가 감소함에 따라 감소하는 경향과 부합하는 결과이다. 또한  $\sigma$ 가 증가함에 따라  $\Omega_n$ 과 그에 상응하는  $R^*$ 의 값이 증가함을 알 수 있으며, 이는  $C_{a\min}$ 이  $\sigma$ 가 증가함에 따라 감소하는 경향과 부합하는 결과이다(Fig. 8 참조).

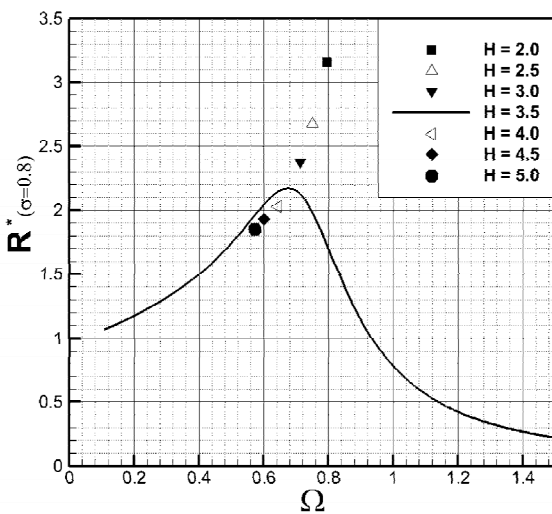


Fig. 16 Natural frequency  $\Omega_n$  and corresponding  $R^*$  for various  $H$  when  $\sigma=0.8$

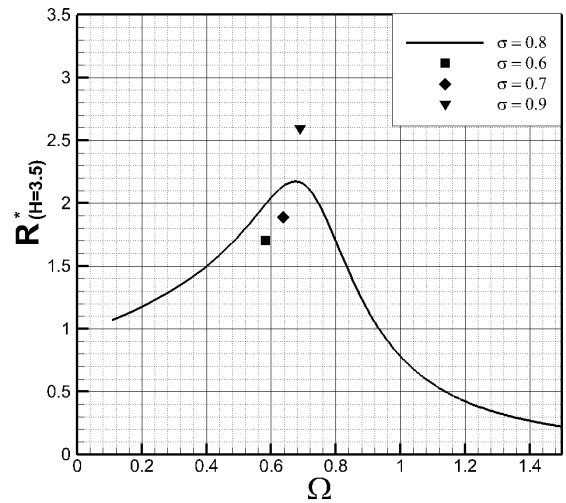


Fig. 17 Natural frequency  $\Omega_n$  and corresponding  $R^*$  for various  $\sigma$  when  $H=3.5$

### 5. 결론

본 연구에서는 상하동요하는 2차원 주상체의 고유진동수를 예측하기 위해서 Ursell (1949)과 Tasai (1959)가 2차원 주상체에 적용한 방법을 기본으로, Lewis 변환을 사용해 보다 광범위한 형태를 가지는 주상체의 부가 질량 계수와 조파 감쇠 계수를 공치법에 의한 수치 계산으로 얻었다. 이렇게 얻은 결과를 이용하고 MCFR을 사용하여 2차원 주상체의 고유진동수를 정의함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

$H \geq 2.0$  인 모든 형상에 대해 부가 질량과 조파 감쇠를 모두 고려하여 정의한 고유진동수  $\Omega_n$ 은 원고유진동수의 80%보다 작으며, 그 최대값은 원주의 고유진동수로 간주할 수 있음을 확인하였다.

차후의 시간 영역 해석을 위해 매우 큰  $\kappa$ 에 대해서도 조파 감쇠 계수와 부가 질량 계수를 안정되게 계산할 수 있는 수치 코드를 개발하였다.

부가 질량만을 고려한 고유진동수  $\Omega_a$ 는  $C_{a\min}$ 에 상응하는 진동수  $\Omega_m$ 과 2% 이하의 차이를 가진다.

MCFR의 국부 최대값에 상응하는 고유진동수  $\Omega_n$ 은 계산된 범위에서는 대체적으로  $\Omega_a$ 보다는 작고 조파감쇠 동요 근사에 의한  $\Omega_h$ 보다는 큰 값을 가진다.

주상체의  $H$ 가 감소할수록,  $\sigma$ 가 증가할수록 고유진동수  $\Omega_n$ 과 그에 상응하는 MCFR의 크기  $R^*$ 의 값은 증가하며, 이는  $C_{a\min}$ 의  $H$ ,  $\sigma$ 에 대한 경향과 부합하는 것으로 보인다.

부유체의 운동에 대해 strip 방법 또는 그와 유사한 방법을 사용하는 경우 본 연구에서 사용된 방법은 3차원 물체에 대해서도 큰 어려움 없이 확장될 수 있을 것으로 생각되며, 초기 설계 시 부유체의 상하동요 고유진동수 예측에 큰 도움이 될 것으로 생각된다.



## References

- Kim, K.B. & Lee, S.J., 2013. Natural Frequency of 2-Dimensional Heaving Circular Cylinder; Time Domain Analysis. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 50 (4), pp.224–231.
- Lee, D.Y. & Lee, S.J., 2013. Natural Frequency of 2-Dimensional Heaving Circular Cylinder; Frequency Domain Analysis. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 50(2), pp.111–119.
- Lee, S.J., 2008. Natural Frequency of 2-Dimensional Heaving Circular Cylinder. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 45(4), pp.389–395.
- Lee, S.J. Kim, K.B. & Lee, D.Y., 2013. Natural frequency of heaving circular cylinder in the free surface. *Proceedings of the Eighth International Workshop on Ship Hydrodynamics*, Seoul, 23–25 September 2013, pp.A1–6.
- Song, J.H., 2014. *Natural Frequency of 2-Dimensional Heaving Cylinder; Frequency Domain Analysis*. M.S. Thesis. Dept. Naval Architecture & Ocean Engineering, Chungnam National University.
- Tasai, F., 1959. On the Damping Force and Added Mass of Ships Heaving and Pitching. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 105, pp.47–56.
- The Society of Naval Architects of Korea, 1999. *Calculations of Ship*. Dongmyoung Publishers: Seoul.
- Ursell, F., 1949. On the Heaving Motion of Circular Cylinder on the Surface of a Fluid. *Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*, 2, pp.215–231.



송제하

이승준