

과거의존 파론도 게임의 재분배 모형[†]

진건주¹ · 이지연²

¹²영남대학교 통계학과

접수 2014년 11월 20일, 수정 2014년 12월 12일, 게재확정 2014년 12월 19일

요약

파론도 역설은 두 개의 지는 게임이 결합하여 이기게 되거나, 두 개의 이기는 게임이 결합하여 지게 되는 현상을 말한다. 본 논문에서는 여러 명으로 구성된 집단에서 임의로 한 명을 선택하여 본인의 과거 실적에 의해 승패 확률이 정해지는 과거의존 파론도 게임을 실시하거나 또는 단순히 상금을 임의로 선택한 또 다른 사람에게 전달만 하는 게임을 진행하는 경우를 살펴본다. 각 게임은 지거나 공정한 게임인 반면에 두 게임을 임의로 결합한 혼합게임은 이기게 되는 파론도 효과가 존재함을 확인한다. 또한 각 게임은 이기거나 공정한 게임인데 임의로 결합한 혼합게임은 지게 되는 역 파론도 효과가 존재하는 확률 모수의 범위도 완성한다.

주요용어: 과거의존 파론도 게임, 기대상금, 마코프 체인, 재분배 모형, 정상확률, 파론도 역설.

1. 서론

파론도 현상은 넓은 의미로, 두 개의 유사한 성질의 시스템이 결합하여 반대 성질의 시스템으로 변형되는 현상을 말한다. 이것은 파론도 (J. M. R. Parrondo)가 소개한 두 개의 지는 게임을 결합하여 이기는 게임이 되게 하는 간단한 동전 게임에서 유래하였다 (Parrondo, 1996; Harmer와 Abbott, 2002). 그가 처음 소개한 파론도 게임은 두 개의 게임 A와 B로 구성되며, 게임 A는 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2} - \epsilon$ 인 동전을 던져서 앞면이 나오면 게임자는 1원을 얻고, 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 게임 B는 게임자가 현재 가지고 있는 누적 상금이 3의 배수이면 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{10} - \epsilon$ 인 동전을 던지고, 3의 배수가 아니면 앞면이 나올 확률이 $\frac{3}{4} - \epsilon$ 인 동전을 던져 게임 A와 마찬가지로 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 그러면 $0 < \epsilon < 1/10$ 일 때, 게임 A와 B는 게임당 점근적 기대상금이 음수가 되어 항상 지는 게임이 된다. 반면에 때 시행에서 두 게임 A와 B 중 하나를 임의로 선택하여 진행하거나 또는 일정한 패턴에 의해 주기적으로 두 게임을 반복해서 시행하면 작은 $\epsilon > 0$ 에 대해 혼합게임의 점근적 기대상금이 양수가 되어 이기는 게임이 되게 할 수 있다 (Parrondo 등, 2000; Ethier와 Lee, 2009; Lee, 2009). 이러한 게임을 원금의존 (capital-dependent) 파론도 게임이라고 한다. Harmer 등 (2001)은 이 현상을, 게임 B만 단독으로 계속하면 궁극적으로 지게 되는데, 게임 A를 혼합하면 게임 A가 잡음 (noise)처럼 작용하여 게임 B의 지는 성질을 변형시켜 이기게 되는 역설적인 결과가 나타나

[†] 이 논문은 2013년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. 2013R1A1A3A04007670).

¹ (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 석사과정.

² 교신저자: (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 교수. E-mail: leeji@yu.ac.kr

는 것으로 설명하였다. 최근들어 이런 현상을 주식 투자에 적용하여 파론도 현상이 존재함을 확인하기도 하였다 (Cho와 Lee, 2012a; Cho와 Lee, 2012b).

Toral (2002)은 유사한 효과를 가지는 다른 유형의 잡음으로 재분배 모형을 소개하였다. 이 모형에서는 여러 명의 게임자들로 구성된 집단에서 기존 파론도 게임 A 를 게임자들 사이에서 자본을 전달하여 재분배하는 새로운 게임 A' 으로 대체하였다. 즉, 여러 명의 게임자들 중에서 임의로 선택된 게임자는 $1/2$ 의 확률로 원금의존 파론도 게임 B 를 하거나 또는 게임 A' 를 실시한다. 게임 A' 는 임의로 선택된 게임자가 임의로 선택된 또 다른 게임자에게 1원을 넘겨 주는 게임으로 전체 게임자들의 총 상금에는 변함이 없으므로 이 집단에게는 공정한 게임이다. 반면에 임의로 선택된 게임자에 의해 진행되는 원금의존 파론도 게임 B 는 $0 < \epsilon < 1/10$ 일 때 지는 게임이며, 전체 집단에 대해서도 여전히 지는 게임이 된다. 그러나 두 게임 A' 와 B 를 $1/2$ 의 확률로 결합한 혼합게임은 이기게 되어 파론도 현상이 나타남을 Toral (2002)은 특정한 확률 모수 값에 대한 시뮬레이션을 통하여 확인하였다. Ethier (2007)은 혼합게임의 점근적 기대상금을 계산하였고, Ethier와 Lee (2012)는 이를 확장하여 모든 확률 모수 값에 대해 임의적 혼합게임 뿐 아니라 주기적 반복 결합에 대해서도 파론도 현상이 존재함을 증명하였다.

본 논문에서는 이러한 원금의존 파론도 게임의 재분배 모형을 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형으로 확장하여 모든 확률 모수 값에 대해 파론도 효과와 역 파론도 효과가 존재하는 범위를 찾고자 한다. 과거의존 (history-dependent) 파론도 게임 B 는 사용되는 동전이 현재의 누적 금액에 의해 결정되는 것이 아니라 바로 직전의 과거 두 번의 시행 결과에 의해 결정되는 게임이다 (Parrondo 등, 2000; Lee, 2011). 2절에서는 과거의존 파론도 게임을 소개하고 기존에 얻어졌던 결과로서 한 명의 게임자에 의해 진행되는 과거의존 파론도 게임에 대해 파론도 효과와 역 파론도 효과가 존재하는 확률 모수의 범위를 설명한다. 3절에서는 여러 명의 게임자들에 의해 진행되는 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형에 대한 자세한 설명과 기대상금을 계산하여 파론도 효과와 역 파론도 효과가 존재하는 확률 모수의 범위를 완성한다. 더불어 특정 게임자 한 명에 대한 과거의존 파론도 게임의 결과를 이용하여 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형을 분석하는 특별한 관계에 대해서도 설명한다.

2. 과거의존 파론도 게임

Parrondo 등 (2000)이 소개한 과거의존 파론도 게임 B 는 한 명의 게임자에 의해 진행되며, 게임자의 직전 두 번의 시행 결과가 패-패 (각각 패-승, 승-패, 승-승)이면 앞면이 나올 확률이 p_0 (각각 p_1, p_2, p_3)인 동전을 던진다. $0 < \epsilon < 1/4$ 인 ϵ 에 대해 $p_i, i = 0, 1, 2, 3$ 는 다음과 같다.

$$p_0 := \frac{9}{10} - \epsilon, \quad p_1 = p_2 := \frac{1}{4} - \epsilon, \quad p_3 := \frac{7}{10} - \epsilon. \quad (2.1)$$

동전을 던져서 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 과거의존 파론도 게임 B 를 오래 반복하면 시행당 점근적 기대상금이 음수가 되는 $\epsilon > 0$ 을 찾을 수 있어 지는 게임이 된다. 반면 앞면이 나올 확률이 $1/2 - \epsilon$ 인 동전을 항상 사용하는 게임 A 는 $\epsilon > 0$ 일 때 지는 게임이 된다.

게임 A 와 B 를 확률 $\gamma > 0$ 로 결합한 혼합게임 $\gamma A + (1 - \gamma)B$ 을 고려하면, 모든 $0 < \gamma < 1$ 에 대해 혼합게임의 시행당 점근적 기대상금이 양수가 되는 아주 작은 $\epsilon > 0$ 이 존재하여 이기는 게임으로 만들 수 있다 (Ethier와 Lee, 2009). 한편, 게임 A 를 a 번, 게임 B 를 b 번, 다시 게임 A 를 a 번, 게임 B 를 b 번 규칙적으로 반복하는 주기적 반복게임 $[a, b]$ 에 대해서도 Ethier와 Lee (2009)는 게임 A 와 게임 B 의 시행당 기대상금은 음수인 반면에 주기적 반복게임 $[a, b]$ 의 시행당 기대상금은 양수가 되는 $\epsilon > 0$ 이 존재함을 확인하였다. 더불어 (2.1)의 특정한 확률 모수에서의 파론도 현상 뿐 아니라 $\kappa > 0, \lambda > 0$ 와 $\lambda < 1 + \kappa$ 에 대해

$$p_0 := \frac{1}{1 + \kappa} - \epsilon, \quad p_1 = p_2 := \frac{\lambda}{1 + \lambda} - \epsilon, \quad p_3 := 1 - \frac{\lambda}{1 + \kappa} - \epsilon \quad (2.2)$$

로 확장된 확률 값의 과거의존 파론도 게임 B 에 대해서도 파론도 현상을 분석하였다. (2.1)의 확률 값은 $\kappa = 1/9$ 이고 $\lambda = 1/3$ 인 특별한 경우이다. Ethier와 Lee (2009)는 (2.2)의 확률 모수에 대해 $\epsilon = 0$ 일 때, 두 게임 A 와 B 는 공정한 게임이지만, 임의적 혼합게임 $\gamma A + (1 - \gamma)B$ 와 주기적 반복게임 $[a, b]$ 이 $\kappa < \lambda < 1$ 또는 $\kappa > \lambda > 1$ 일 때 이기는 게임이 되어 파론도 효과가 나타나고, $\lambda < \min(\kappa, 1)$ 또는 $\lambda > \max(\kappa, 1)$ 일 때는 지는 게임이 되어 역 파론도 효과가 존재함을 증명하였다.

3. 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형

2절의 과거의존 파론도 게임은 한 명의 게임자에 의해 진행되지만, 본 절에서는 여러 명의 게임자들로 구성된 집단에 의해 진행되는 게임을 고려한다. N (≥ 2)명의 게임자들로 구성된 집단에서 한 명의 게임자를 임의로 선택한다. 그를 게임자 i ($i = 1, 2, \dots, N$)라고 하자. 게임 A' 는 무작위로 선택된 게임자 i 가 또 다른 무작위로 선택된 게임자 j ($j \neq i, j = 1, 2, \dots, N$)에게 1원을 넘겨 주는 게임이다. 그러면 게임자 i 는 1원을 잃어 패의 상태가 되고, 게임자 j 는 1원을 얻어 승의 상태가 된다. 그러나 전체 게임자들의 총 상금에는 변함이 없으므로 게임 A' 는 전체 게임자들의 집단에는 공정한 게임이다. 한편, 게임 B 는 앞면이 나올 확률이 각각 p_0, p_1, p_2, p_3 인 4개의 동전을 사용하여, 게임자 i 의 직전 두 번 시행의 결과가 패-패이면 p_0 동전을, 패-승이면 p_1 동전을, 승-패이면 p_2 동전을, 승-승이면 p_3 동전을 사용한다. 즉, 게임자 i 의 직전 두 번 시행의 결과에 따라 현재 시행에서 사용할 동전이 정해지는 과거의존 파론도 게임을 실시한다. 게임자 i 는 정해진 동전을 던져 앞면이 나오면 1원을 얻어 승의 상태가 되고, 뒷면이 나오면 1원을 잃어 패의 상태가 되며, 승의 상태가 되면 전체 게임자들의 총 상금은 1원 증가하고 패의 상태가 되면 1원 감소한다. 그러므로 확률 모수 p_0, p_1, p_2, p_3 의 범위에 따라 지거나 공정하거나 이기는 게임이 된다.

각 게임자들의 연이은 두 번의 시행에서의 결과인 패-패, 패-승, 승-패, 승-승을 각각 상태 0, 1, 2, 3으로 나타내자. 게임 A' 와 B 는 다음의 두 가지 마코프 체인으로 설명할 수 있다. 첫 번째 마코프 체인 $\{\mathbf{X}_n, n \geq 0\}$ 은 x_i 를 게임자 i 의 상태라고 할 때, N 차원의 벡터 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 로 전체 게임자들의 상태를 나타내는 것이다. 두 번째 마코프 체인 $\{\mathbf{N}_n, n \geq 0\}$ 은 n_0 (각각 n_1, n_2, n_3)를 N 명 중 상태가 0 (각각 1,2,3)인 게임자들의 수라고 할 때, 상태 (n_0, n_1, n_2, n_3) 로 나타낸다. $\{\mathbf{X}_n, n \geq 0\}$ 은 상태 공간이

$$\Sigma_N := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) : i = 1, \dots, N \text{에 대해 } x_i \in \{0, 1, 2, 3\}\} = \{0, 1, 2, 3\}^N$$

이고, 이 상태 공간의 크기는 $|\Sigma_N| = 4^N$ 이다. $\{\mathbf{N}_n, n \geq 0\}$ 의 상태 공간은

$$\bar{\Sigma}_N := \{(n_0, n_1, n_2, n_3) \in \mathbf{Z}_+^4 : n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = N\}$$

이고, 그 크기는 $|\bar{\Sigma}_N| = \binom{N+3}{3}$ 가 된다.

게임 B 에 대한 마코프 체인 $\{\mathbf{X}_n, n \geq 0\}$ 의 전이확률은 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)$ 일 때, i 번째 요소 x_i 를 제외한 나머지 요소들은 모두 같은 $\mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, x_N)$ 에 대해

$$P_B^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} N^{-1}p_{x_i} & x_i \text{가 홀수이고 } y_i=3 \text{이거나 또는 } x_i \text{가 짝수이고 } y_i=1 \text{이면,} \\ N^{-1}q_{x_i} & x_i \text{가 홀수이고 } y_i=2 \text{이거나 또는 } x_i \text{가 짝수이고 } y_i=0 \text{이면} \end{cases}$$

이고, 그 외의 경우에는 $P_B^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 이다. 여기서 $q_x := 1 - p_x$, $x = 0, 1, 2, 3$ 이다.

한편, 게임 A' 에 대한 전이확률은

$$P_{A'}^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := [N(N-1)]^{-1}$$

로서, $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ 이고 $i \neq j$ 인 i, j 에 대해서 x_i 의 상태가 홀수이면 $y_i = 2$, x_i 의 상태가 짝수이면 $y_i = 0$, 그리고 x_j 의 상태가 홀수이면 $y_j = 3$, x_j 의 상태가 짝수이면 $y_j = 1$ 이고, i, j 이외의 나머지 요소들은 같은 값들을 갖는 상태 벡터 \mathbf{x}, \mathbf{y} 에 대해 위와 같은 확률 값을 가지고 그 외의 경우에는 0이다.

두 게임 A' 와 B 를 결합하여 확률 $\gamma \in (0, 1)$ 로 게임 A' 를 진행하고, $1 - \gamma$ 의 확률로 게임 B 를 실시하는 혼합게임 $\gamma A' + (1 - \gamma)B$ 의 전이확률행렬 $\mathbf{P}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}$ 은

$$\mathbf{P}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} := \gamma \mathbf{P}_{A'}^{(N)} + (1 - \gamma) \mathbf{P}_B^{(N)} \quad (3.1)$$

가 된다.

좀 더 간단한 마코프 체인 $\{N_n, n \geq 0\}$ 에서의 게임 A' 와 B 의 각 전이확률행렬 $\bar{\mathbf{P}}_{A'}^{(N)}$ 와 $\bar{\mathbf{P}}_B^{(N)}$ 은 Table 3.1과 같다. Ethier (2007)는 $\gamma = 1/2$ 일 때의 혼합게임의 전이확률행렬 $\bar{\mathbf{P}}_{(1/2, 1/2)}^{(N)}$ 을 유사한 형태로 유도하였다.

Table 3.1 Transition probabilities of $\{N_n, n \geq 0\}$ for game A' and B . From state (n_0, n_1, n_2, n_3) , a transition is made to state (n'_0, n'_1, n'_2, n'_3)

game	(n'_0, n'_1, n'_2, n'_3)	type		probability $\bar{P}_{A'}^{(N)}$
		of player i	of player j	
A'	$(n_0 - 1, n_1 + 1, n_2, n_3)$	0	0	$n_0(n_0 - 1)/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0, n_1 - 1, n_2, n_3 + 1)$	0	1	$n_0 n_1/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0, n_1 + 1, n_2 - 1, n_3)$	0	2	$n_0 n_2/[N(N - 1)]$
A'	(n_0, n_1, n_2, n_3)	0	3	$n_0 n_3/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0 - 1, n_1, n_2 + 1, n_3)$	1	0	$n_0 n_1/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0, n_1 - 2, n_2 + 1, n_3 + 1)$	1	1	$n_1(n_1 - 1)/[N(N - 1)]$
A'	(n_0, n_1, n_2, n_3)	1	2	$n_1 n_2/[N(N - 1)]$
A'	(n_0, n_1, n_2, n_3)	1	3	$n_2 n_3/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0, n_1 + 1, n_2 - 1, n_3)$	2	0	$n_0 n_2/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0 + 1, n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 + 1)$	2	1	$n_1 n_2/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0 + 1, n_1 + 1, n_2 - 2, n_3)$	2	2	$n_2(n_2 - 1)/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0 + 1, n_1, n_2 - 1, n_3)$	2	3	$n_2 n_3/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0 - 1, n_1 + 1, n_2 + 1, n_3 - 1)$	3	0	$n_0 n_3/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0, n_1 - 1, n_2 + 1, n_3)$	3	1	$n_1 n_3/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0, n_1 + 1, n_2, n_3 - 1)$	3	2	$n_2 n_3/[N(N - 1)]$
A'	$(n_0, n_1, n_2 + 1, n_3 - 1)$	3	3	$n_3(n_3 - 1)/[N(N - 1)]$
game	(n'_0, n'_1, n'_2, n'_3)	type		probability $\bar{P}_B^{(N)}$
		of player i	result	
B	$(n_0 - 1, n_1 + 1, n_2, n_3)$	0	win	$n_0 p_0/N$
B	(n_0, n_1, n_2, n_3)	0	lose	$n_0 q_0/N$
B	$(n_0, n_1 - 1, n_2, n_3 + 1)$	1	win	$n_1 p_1/N$
B	$(n_0, n_1 - 1, n_2 + 1, n_3)$	1	lose	$n_1 q_1/N$
B	$(n_0, n_1 + 1, n_2 - 1, n_3)$	2	win	$n_2 p_2/N$
B	$(n_0 + 1, n_1, n_2 - 1, n_3)$	2	lose	$n_2 q_2/N$
B	(n_0, n_1, n_2, n_3)	3	win	$n_3 p_3/N$
B	$(n_0, n_1, n_2 + 1, n_3 - 1)$	3	lose	$n_3 q_3/N$

3.1. 기대상금

기대상금을 계산하기 위해 Ethier와 Lee (2009)의 마코프 체인에 의해 진행되는 게임의 평균에 대한 강대수의 법칙 (strong law of large numbers)이 필요하며 그 내용은 다음과 같다.

정리 3.1 (Ethier와 Lee, 2009) 유한 상태공간 Σ 에서 정의되는 분할불가 (irreducible)이고 비주기적 (aperiodic) 마코프 체인 $\{X_n, n \geq 0\}$ 의 전이확률행렬과 정상분포를 각각 \mathbf{P} 와 $\boldsymbol{\pi}$ 라고 하자. 함

수 $w : \Sigma \times \Sigma \mapsto \mathbf{R}$ 로 상금행렬 (payoff matrix) $\mathbf{W} = (w(i, j))_{i, j \in \Sigma}$ 을 나타내고, 모든 n 에 대해 $\xi_n := w(X_{n-1}, X_n)$ 이고 $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ 로 정의하면 S_n 은 n 번의 시행 후의 누적 상금이 된다. (i, j) 의 요소가 $P(i, j)w(i, j)$ 인 행렬을 $\dot{\mathbf{P}}$ 라고 하고, 열벡터 $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)^\top$ 라고 두면, 게임당 점근적 기대상금

$$\mu := \pi \dot{\mathbf{P}} \mathbf{1}$$

은 임의의 초기상태 X_0 에 대해

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \text{ a.s.}$$

을 만족한다.

이 결과를 게임 B 의 마코프 체인 $\{\mathbf{X}_n, n \geq 0\}$ 에 적용하면 $\Sigma := \Sigma_N$ 그리고 $\mathbf{P} := \mathbf{P}_B^{(N)}$ 이 된다. 특별히 $N = 1$ 일 때는 한 명의 게임자로 진행되는 기존의 과거의존 파론도 게임과 동일하므로 정상분포 $\pi_B^{(1)} := \pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 는 전이확률행렬

$$\mathbf{P}_B^{(1)} := \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

에 대해 $\pi = \pi \mathbf{P}_B^{(1)}$ 과 $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ 를 만족하여

$$\pi = \frac{1}{p_0 p_1 + 2p_0 q_3 + q_2 q_3} (q_2 q_3, p_0 q_3, p_0 q_3, p_0 p_1) \quad (3.2)$$

로 얻어진다. $N \geq 2$ 일 때의 정상분포 $\pi_B^{(N)}$ 는 (3.2)의 정상분포 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 로 이루어진 N 차원의 $\pi \times \pi \times \dots \times \pi$ 가 됨을 다음과 같이 확인할 수 있다. 즉, $\pi_B^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \pi_{x_1} \pi_{x_2} \dots \pi_{x_N}$ 가 된다:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_N)} \pi_{x_1} \dots \pi_{x_N} P_B^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \sum_{i=1}^N \pi_{y_1} \dots \pi_{y_{i-1}} \pi_{y_{i+1}} \dots \pi_{y_N} \\ & \quad \left(\sum_{x_i: x_i \neq y_i} \pi_{x_i} P_B^{(N)}((y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_N), (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_N)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \pi_{y_1} \dots \pi_{y_{i-1}} \pi_{y_{i+1}} \dots \pi_{y_N} \frac{1}{N} \left(\sum_{x_i: x_i \neq y_i} \pi_{x_i} P_B^{(1)}(x_i, y_i) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pi_{y_1} \dots \pi_{y_N} \\ &= \pi_{y_1} \dots \pi_{y_N}. \end{aligned}$$

여기서 첫 번째 등호는 \mathbf{y} 로의 전이는 상태 벡터 \mathbf{y} 와 단 한 개의 요소만 다르고 나머지 요소들은 동일한 상태 벡터 \mathbf{x} 에서만 가능하기 때문이고, 세 번째 등호는 π 가 $\mathbf{P}_B^{(1)}$ 의 정상분포로서 $\pi = \pi \mathbf{P}_B^{(1)}$ 를 만족하기 때문에 성립한다.

게임 B 를 두 번째 마코프 체인 $\{\mathbf{N}_n, n \geq 0\}$ 으로 나타내면 $\Sigma := \bar{\Sigma}_N$ 그리고 $\mathbf{P} := \bar{\mathbf{P}}_B^{(N)}$ 이고, 정상분포 $\bar{\pi}_B^{(N)}$ 는 $(N, \boldsymbol{\pi})$ 의 다변량 분포 (multinomial distribution)로서

$$\bar{\pi}_B^{(N)}(n_0, n_1, n_2, n_3) = \binom{N}{n_0, n_1, n_2, n_3} \pi_0^{n_0} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \pi_3^{n_3},$$

$$0 \leq n_0, n_1, n_2, n_3 \leq N, n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = N$$

가 된다 (Ethier와 Lee, 2012).

따라서 게임 B 의 기대상금 $\mu_B^{(N)}$ 는 정리 3.1을 적용하면

$$\begin{aligned} \mu_B^{(N)} &= \boldsymbol{\pi}_B^{(N)} \dot{\mathbf{P}}_B^{(N)} \mathbf{1} \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_N)} \pi_{x_1} \cdots \pi_{x_N} \sum_{i=1}^N N^{-1} (p_{x_i} - q_{x_i}) \\ &= N^{-1} \sum_{(n_0, n_1, n_2, n_3)} \binom{N}{n_0, n_1, n_2, n_3} \pi_0^{n_0} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \pi_3^{n_3} [n_0(p_0 - q_0) + n_1(p_1 - q_1) \\ &\quad + n_2(p_2 - q_2) + n_3(p_3 - q_3)] \\ &= \pi_0(p_0 - q_0) + \pi_1(p_1 - q_1) + \pi_2(p_2 - q_2) + \pi_3(p_3 - q_3) \end{aligned} \quad (3.3)$$

로 얻어진다. (3.2)의 정상분포를 식 (3.3)에 대입하면 기대상금은, 모든 $N \geq 2$ 에 대해

$$\mu_B^{(N)} = \frac{p_0 p_1 - q_2 q_3}{p_0 p_1 + 2p_0 q_3 + q_2 q_3}$$

가 된다. 확률 모수 p_0, p_1, p_2, p_3 가 (2.2)의 형태로 표현되고 $\epsilon = 0$ 이면, 그 기대상금은

$$\mu_B^{(N)} = 0$$

으로 항상 공정한 게임이 된다.

한편, 혼합게임 $\gamma A' + (1 - \gamma)B$ 도 Σ_N 에서 정의되는 분할불가이고 비주기적 마코프 체인이므로 (3.1)의 전이확률행렬 $\mathbf{P}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}$ 과 정상분포 $\boldsymbol{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}$ 을 이용하면, 정리 3.1에 의해

$$\begin{aligned} \mu_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} &= \boldsymbol{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} \dot{\mathbf{P}}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} \mathbf{1} \\ &= \boldsymbol{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} \left(\gamma \dot{\mathbf{P}}_{A'}^{(N)} + (1 - \gamma) \dot{\mathbf{P}}_B^{(N)} \right) \mathbf{1} \\ &= (1 - \gamma) \boldsymbol{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} \dot{\mathbf{P}}_B^{(N)} \mathbf{1} \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 이 때, 마지막 등호는 $\dot{\mathbf{P}}_{A'}^{(N)} \mathbf{1} = (0, 0, \dots, 0)^T$ 이기 때문에 성립한다. 따라서 혼합게임의 기대상금은

$$\begin{aligned} \mu_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)} &= (1 - \gamma) \sum_{(x_1, \dots, x_N)} \pi_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \sum_{i=1}^N N^{-1} (p_{x_i} - q_{x_i}) \\ &= N^{-1} (1 - \gamma) \sum_{(n_0, n_1, n_2, n_3)} \bar{\pi}_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}(n_0, n_1, n_2, n_3) [n_0(p_0 - q_0) + n_1(p_1 - q_1) \\ &\quad + n_2(p_2 - q_2) + n_3(p_3 - q_3)] \\ &= N^{-1} (1 - \gamma) [\bar{n}_0(p_0 - q_0) + \bar{n}_1(p_1 - q_1) + \bar{n}_2(p_2 - q_2) + \bar{n}_3(p_3 - q_3)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

가 된다. 단, $\bar{n}_0 := E_{\bar{\pi}_{(\gamma,1-\gamma)}^{(N)}} [n_0]$, $\bar{n}_1 := E_{\bar{\pi}_{(\gamma,1-\gamma)}^{(N)}} [n_1]$, $\bar{n}_2 := E_{\bar{\pi}_{(\gamma,1-\gamma)}^{(N)}} [n_2]$ 그리고 $\bar{n}_3 := E_{\bar{\pi}_{(\gamma,1-\gamma)}^{(N)}} [n_3]$ 이며, 여기서 $\bar{\pi}_{(\gamma,1-\gamma)}^{(N)}$ 는 상태 공간 Σ_N 에서의 혼합게임 $\gamma A' + (1-\gamma)B$ 의 정상분포를 나타낸다. 기대값들 $\bar{n}_0, \bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ 을 계산하기 위해 Table 3.1의 전이확률을 이용하면

$$\begin{aligned} E[n'_0 - n_0 | \mathbf{N}_n = (n_0, n_1, n_2, n_3)] & \\ = \gamma \frac{-n_0(n_0 - 1) - n_0 n_1 + n_1 n_2 + n_2(n_2 - 1) + n_2 n_3 - n_0 n_3}{N(N-1)} + (1-\gamma) \frac{-n_0 p_0 + n_2 q_2}{N} & (3.5) \\ = \frac{\gamma(-n_0 + n_2) + (1-\gamma)(-n_0 p_0 + n_2 q_2)}{N} \end{aligned}$$

가 된다. 나머지도 동일한 방법으로 계산하면

$$\begin{aligned} E[n'_1 - n_1 | \mathbf{N}_n = (n_0, n_1, n_2, n_3)] &= \frac{\gamma(n_0 - 2n_1 + n_2) + (1-\gamma)(n_0 p_0 - n_1 + n_2 p_2)}{N}, \\ E[n'_2 - n_2 | \mathbf{N}_n = (n_0, n_1, n_2, n_3)] &= \frac{\gamma(n_1 - 2n_2 + n_3) + (1-\gamma)(n_1 q_1 - n_2 + n_3 q_3)}{N}, \\ E[n'_3 - n_3 | \mathbf{N}_n = (n_0, n_1, n_2, n_3)] &= \frac{\gamma(n_1 - n_3) + (1-\gamma)(n_1 p_1 - n_3 q_3)}{N} \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 위의 각 식의 우변은 (n_0, n_1, n_2, n_3) 에 관한 선형결합이고, 정상분포 $\bar{\pi}_{(\gamma,1-\gamma)}^{(N)}$ 로 양변에 기대값을 취하면 좌변의 n_i 와 n'_i 의 기대값은 동일하므로 그 차이는 0이 된다. 따라서 다음과 같은 $\bar{n}_0, \bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ 에 대한 선형식을 얻는다.

$$(0, 0, 0, 0) = (\bar{n}_0, \bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3) \left[\gamma \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + (1-\gamma) \begin{pmatrix} -p_0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & -q_3 \end{pmatrix} \right].$$

위의 선형식을 $\bar{n}_0 + \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 = N$ 을 이용하여 풀면

$$\begin{aligned} \bar{n}_0 &= N(q_2 + \gamma p_2)(q_3 + \gamma p_3)/d \\ \bar{n}_1 &= N(p_0 + \gamma q_0)(q_3 + \gamma p_3)/d \\ \bar{n}_2 &= N(p_0 + \gamma q_0)(q_3 + \gamma p_3)/d \\ \bar{n}_3 &= N(p_0 + \gamma q_0)(p_1 + \gamma q_1)/d \end{aligned}$$

가 된다. 단, $d := (q_2 + \gamma p_2)(q_3 + \gamma p_3) + 2(p_0 + \gamma q_0)(q_3 + \gamma p_3) + (p_0 + \gamma q_0)(p_1 + \gamma q_1) > 0$ 이다. 이 기대값들을 식 (3.4)에 대입하면, 확률 모수 p_0, p_1, p_2, p_3 가 (2.2)의 형태이고 $\epsilon = 0$ 일 때 기대상금은

$$\mu_{(\gamma,1-\gamma)}^{(N)} = \frac{\gamma(1-\gamma)(1+\gamma)(\kappa+1)(\lambda-1)(\kappa-\lambda)}{d'}$$

가 된다. 단, $d' = [3(\lambda+1)\kappa^2 + (-3\lambda^2 + 2\lambda + 3)\kappa - \lambda^2 + \lambda]\gamma^2 + [(\lambda+1)\kappa^2 + (3\lambda^2 + 4\lambda + 5)\kappa - \lambda^2 - \lambda + 4]\gamma + 2(\lambda\kappa + \lambda^2 + 2\lambda)$ 이다. 이 식을 보면 기대상금이 더 이상 N 에 의존하지 않는 것을 확인할 수 있다. 그리고 분모는 $d' = (1+\kappa)^2(1+\lambda)d$ 이고 $d > 0$ 이므로 항상 양수이다. 따라서 혼합게임의 기대상금 $\mu_{(\gamma,1-\gamma)}^{(N)}$ 는 $\kappa < \lambda < 1$ 이거나 $\kappa > \lambda > 1$ 이면 양의 값을 가지고 $\lambda < \min(\kappa, 1)$ 이거나 $\lambda > \max(\kappa, 1)$ 이면 음의 값을 가진다. 특별히 $\gamma = 1/2$ 이면,

$$\mu_{(1/2,1/2)}^{(N)} = \frac{3(\lambda-1)(\kappa+1)(\kappa-\lambda)}{2[5(\lambda+1)\kappa^2 + (3\lambda^2 + 18\lambda + 13)\kappa + 5\lambda^2 + 15\lambda + 8]}$$

로 얻어진다.

3.2. 특정 게임자 한 명을 고려한 과거의존 파론도 게임의 재분배 모형

3.1절은 전체 게임자 N 명을 함께 고려하여 기대상금을 계산하였다. 본 절에서는 Ethier와 Lee (2012)가 원금의존 파론도 게임의 재분배 모형에서 확인한 것과 같이, N 명 중 특정 한 명만을 고려하여 기대상금을 계산하고 앞의 결과와 비교하고자 한다. 게임 B 가 진행될 때, 전체 N 명 중 특정한 게임자 i 의 전이확률행렬은 게임자 i 가 선택되었을 때는 $N = 1$ 일 때의 전이확률행렬과 같고, 선택되지 않았을 때는 다른 게임자에게서 전이가 진행되므로 게임자 i 의 상태에는 변화가 없다. 이 경우 게임자 i 의 전이확률행렬은 4차 항등행렬 I_4 가 된다. 그러므로 N 명 중 특정 한 명의 게임자에 대한 전이확률행렬 $\mathbf{P}_B^{(1,N)}$ 은 그 게임자가 선택될 확률 $1/N$ 과 선택되지 않을 확률 $(N-1)/N$ 을 고려하여

$$\mathbf{P}_B^{(1,N)} := N^{-1}[\mathbf{P}_B^{(1)} + (N-1)\mathbf{I}_4]$$

으로 나타낼 수 있다. 반면에 게임 A' 은 게임자 i 가 기부자 또는 수혜자로 선택될 수 있다. 기부자로 선택되는 확률은 $1/N$ 이고 수혜자로 선택되는 확률도 $\frac{(N-1)}{N} \times \frac{1}{(N-1)} = \frac{1}{N}$ 이 된다. 그리고 선택되지 않는다면, 위와 마찬가지로 상태 변화가 없으므로 그 때의 전이확률행렬은 I_4 이다. 따라서 N 명 중 특정 한 명의 게임자에 대한 게임 A' 의 전이확률행렬 $\mathbf{P}_{A'}^{(1,N)}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{A'}^{(1,N)} &:= N^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + N^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + N^{-1}(N-2)\mathbf{I}_4 \\ &= N^{-1}[2\mathbf{P}_A^{(1)} + (N-2)\mathbf{I}_4], \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{P}_A^{(1)}$ 은 앞면이 나올 확률이 $1/2$ 인 동전을 항상 사용하는 과거의존 파론도 게임 A 의 전이확률행렬로서

$$\mathbf{P}_A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

이다.

위의 전이확률행렬들을 이용하면

$$\dot{\mathbf{P}}_B^{(1,N)} := N^{-1}\dot{\mathbf{P}}_B^{(1)}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{A'}^{(1,N)} := 2N^{-1}\dot{\mathbf{P}}_A^{(1)}$$

가 되고, 혼합게임 $\gamma A' + (1-\gamma)B$ 의 전이확률행렬은

$$\mathbf{P} := \gamma\mathbf{P}_{A'}^{(1,N)} + (1-\gamma)\mathbf{P}_B^{(1,N)} = N^{-1}(2\gamma\mathbf{P}_A^{(1)} + (1-\gamma)\mathbf{P}_B^{(1)} + (N-1-\gamma)\mathbf{I}_4)$$

이므로

$$\dot{\mathbf{P}} := \gamma\dot{\mathbf{P}}_{A'}^{(1,N)} + (1-\gamma)\dot{\mathbf{P}}_B^{(1,N)} = N^{-1}(2\gamma\dot{\mathbf{P}}_A^{(1)} + (1-\gamma)\dot{\mathbf{P}}_B^{(1)})$$

가 된다. 한편 혼합게임의 정상분포 $\boldsymbol{\pi}_{(\gamma,1-\gamma)}^{(1,N)} := (\pi'_0, \pi'_1, \pi'_2, \pi'_3)$ 은 $\boldsymbol{\pi}_{(\gamma,1-\gamma)}^{(1,N)}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}_{(\gamma,1-\gamma)}^{(1,N)}$ 를 만족함으로

$$\begin{aligned} \pi'_0 &= (q_2 + \gamma p_2)(q_3 + \gamma p_3)/d \\ \pi'_1 &= (p_0 + \gamma q_0)(q_3 + \gamma p_3)/d \\ \pi'_2 &= (p_0 + \gamma q_0)(q_3 + \gamma p_3)/d \\ \pi'_3 &= (p_0 + \gamma q_0)(p_1 + \gamma q_1)/d \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 따라서 확률 모수 p_0, p_1, p_2, p_3 가 (2.2)의 형태이고 $\epsilon = 0$ 일 때, 혼합게임의 기대상금은 정리 3.1에 의해

$$\begin{aligned} \mu_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(1, N)} &= \pi_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(1, N)} \dot{P} \mathbf{1} \\ &= (\pi'_0, \pi'_1, \pi'_2, \pi'_3) \begin{pmatrix} -\frac{q_0 + \gamma p_0}{N} & \frac{p_0 + \gamma q_0}{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{q_1 + \gamma p_1}{N} & \frac{p_1 + \gamma q_1}{N} \\ -\frac{q_2 + \gamma p_2}{N} & \frac{p_2 + \gamma q_2}{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{q_3 + \gamma p_3}{N} & \frac{p_3 + \gamma q_3}{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\gamma(1-\gamma)(1+\gamma)(k+1)(\lambda-1)(k-\lambda)}{Nd'} \end{aligned}$$

가 된다. 이 값에 N 을 곱하면 $N\mu_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(1, N)} = \mu_{(\gamma, 1-\gamma)}^{(N)}$ 이 되어 특정 게임자 한 명에 관한 기대상금이 N 을 곱해주면 앞에서 구한 전체 게임자 N 에 대한 기대상금과 같아짐을 확인할 수 있다.

3.3. 파론도 현상

과거의존 파론도 게임의 재분배 모형에서 전체 N 명을 고려한 모형과 3.2절의 특정 게임자 한 명을 고려한 모형 모두에서 $\kappa < \lambda < 1$ 이거나 $\kappa > \lambda > 1$ 이면 기대상금이 양의 값을 가져 파론도 효과가 존재하고, $\lambda < \min(\kappa, 1)$ 이거나 $\lambda > \max(\kappa, 1)$ 이면 음의 값을 가져 역 파론도 효과가 존재함을 확인할 수 있다.

Figure 3.1은 파론도 효과와 역 파론도 효과가 발생하는 모수 κ, λ 의 범위를 나타내었다. 이 결과는 한 명의 게임자로 진행되는 기존의 과거의존 파론도 게임에서의 결과와 일치한다.

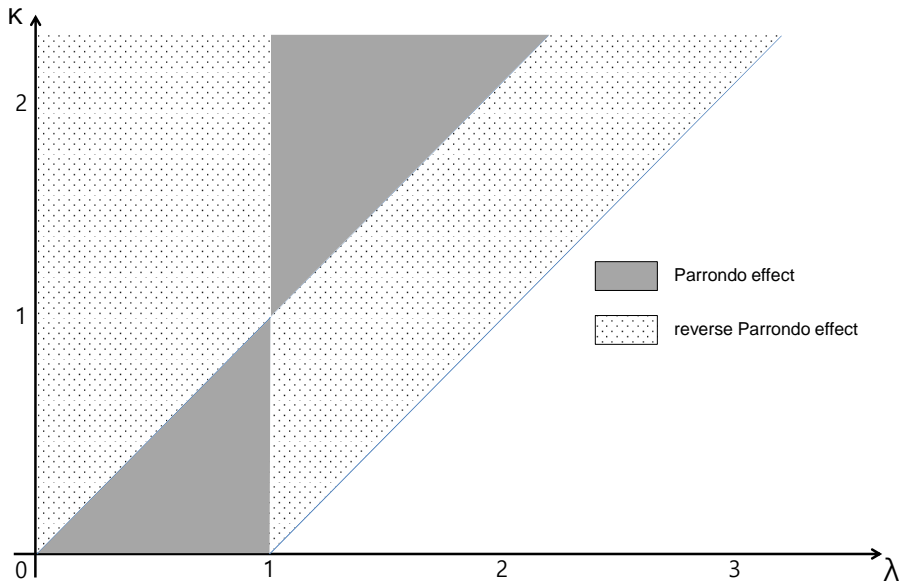


Figure 3.1 The parameter space for the Parrondo effect and the reverse Parrondo effect

References

- Cho, D. and Lee, J. (2012a). Parrondo paradox and stock investment. *Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 543–552.
- Cho, D. and Lee, J. (2012b). Spatially dependent Parrondo games and stock investments. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **23**, 867–880.
- Ethier, S. N. (2007) Markov chains and Parrondo's paradox. In *Optimal Play: Mathematical Studies of Games and Gambling*, edited by S. N. Ethier and W. R. Eadington, Institute for the Study of Gambling and Commercial Gaming, University of Nevada, Reno, 493–506.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2009). Limit theorems for Parrondo's paradox. *Electronic Journal of Probability*, **14**, 1827–1862.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2012). Parrondo's paradox via redistribution of wealth. *Electronic Journal of Probability*, **17**, no. 20, 1-21.
- Harmer, G. P., Abbott, D., Taylor, P. G., and Parrondo, J. M. R. (2001). Brownian ratchets and Parrondo's games. *Chaos*, **11**, 705–714.
- Harmer, G. P. and Abbott, D. (2002). A review of Parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, **2**, R71–R107.
- Lee, J. (2009). Optimal strategies for collective Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 973–982.
- Lee, J. (2011). Paradox in collective history-dependent Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 631–641.
- Parrondo, J. M. R. (1996). How to cheat a bad mathematician? In *the Workshop of the EEC HC&M Network on Complexity and Chaos*, ISI, Torino, Italy. Unpublished.
- Parrondo, J. M. R., Harmer, G. P. and Abbott, D. (2000). New paradoxical games based on Brownian ratchets. *Physical Review Letters*, **85**, 5226–5229.
- Toral, R (2002). Capital redistribution brings wealth by Parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, **2**, L305–L311.

A redistribution model of the history-dependent Parrondo game[†]

Geonjoo Jin¹ · Jiyeon Lee²

^{1,2}Department of Statistics, Yeungnam University

Received 20 November 2014, revised 12 December 2014, accepted 19 December 2014

Abstract

Parrondo paradox is the counter-intuitive phenomenon where two losing games can be combined to win or two winning games can be combined to lose. In this paper, we consider an ensemble of players, one of whom is chosen randomly to play game A' or game B . In game A' , the randomly chosen player transfers one unit of his capital to another randomly selected player. In game B , the player plays the history-dependent Parrondo game in which the winning probability of the present trial depends on the results of the last two trials in the past. We show that Parrondo paradox exists in this redistribution model of the history-dependent Parrondo game.

Keywords: Expected profits, history-dependent Parrondo games, Markov chains, Parrondo paradox, redistribution models, stationary distributions.

[†] This work was supported by the Basic Science Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Science, ICT & Future Planning (No. 2013R1A1A3A04007670).

¹ Graduate student, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongsan 712-749, Korea.

² Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongsan 712-749, Korea. E-mail: leejy@yu.ac.kr