ISSN 1975-8359(Print) / ISSN 2287-4364(Online)
The Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers Vol. 64, No. 11, pp. 1598～1604`, 2015
http://dx.doi.org/10.5370/KIEE.2015.64.11.1598

이산시간 불확실 특이시스템의 유한시간 강인 산일성 상태궤환 제어기 설계

Robust Finite-time Dissipative State Feedback Controller Design for Discrete-time Uncertain Singular Systems

김 종 해* · 오 도 창†
(Kim Jong Hae · Oh Do Chang)

Abstract - In this paper, we treat the problem of a robust finite-time dissipative state feedback controller design method for discrete-time singular systems with polytopic uncertainties. A BRL(bounded real lemma) for finite-time stability of discrete-time singular systems is derived. A finite-time dissipative state feedback controller design method satisfying finite-time stability and dissipativity is proposed by LMI(linear matrix inequality) technique on the basis of the obtained BRL. Moreover it is shown that the obtained condition can be extended into polytopic uncertain systems by proper manipulations. Finally, illustrative examples are given to show the applicability of the proposed method.

Key Words : Robust dissipativity, Finite-time control, Uncertainty, Discrete-time singular systems

1. 서 론

유한시간 안정성(FTS: Finite Time Stability)에 대한 연구는 1950년대에 개념이 처음으로 소개되어지면서 미리 설정한 유계와 유한시간 구간을 다루는 연구결과가 나온다[1]. 처음에는 단시간 안정성이라는 개념과 혼동되어 사용했으나 연구가 진행되면서 유한시간 안정성의 새로운 개념이 정립되었다. FTS는 고전적인 안정성과 다르게 연구가 활발히 진행되었던 이유는 정해진 시간안에 시스템의 동특성 등의 작동을 다룬다는 것과 다루는 시스템 변수의 유계가 미리 필요하다는 것이다. 따라서 FTS는 안정성의 정의에서 유의미한 내용이다[2]. 특히 FTS는 무한시간 제어가 적절하지 못하거나 심지어 불안정한 경우인 실제 시스템 응용문제에 있어서 매우 실질적 적용방법이다. 미리 설정한 유한시간 구간내에서의 시스템 동작을 다루기 때문에 제어하고자 하는 시스템의 궤적은 주어진 유계를 넘지 않는다[3]. 또한 무한시간 제어가 시스템에 따라 적절하지 못하거나 심지어 불안정한 경우에 사용하는 리아푸노프 안정성, 점근적 안정성, BIBO 안정성과는 달리 FTS는 과도응답에 오히려 중요한 역할을 한다[4]. 과도응답 제어시스템은 안정성과 불안정의 문제가 아니라 시스템의 평형상태에 영향을 끼치고 있다는 것에 중점을 두고 있고, 도착시간과 시스템의 작은 구간 이내의 동작이 과도응답 제어시스템의 관심사이다. 고전적인 안정성 개념은 무한시간에서의 시스템 동작을 다루기 때문에 실질적(practical)이지 못하다. 게다가, 고전적인 안성성 이론에서는 시스템 변수가 일정한 유계를 가지는 것을 요구하는 반면에 변수의 유계는 미리 설정하지 않는다. LaSalle 등[5]은 실질적 안정성의 용어는 설정된 유계를 가지는 무한시간 구간에서의 시스템 동작을 위하여 소개하였다. 결국 FTS는 설정한 구간동안 시스템의 유계를 다루는 개념이다.

또한 산일성(dissipativity)은 전기회로나 동적 시스템의 피동성(passivity)의 일반적 성질을 나타낸다. 피동성은 강인 안정성에 중요한 역할을 하는 회로 해석과 밀접한 관련이 있다[6-8]. 따라서 피동성은 전력시스템, 신경회로망, 동기화 등에 적절한 설계방법임을 보여준다[9-11]. 최근 선형 동적시스템의 일반적인 형태이고, 물리적 변수들 사이에 존재하는 대수 제약조건을 표현하는 이론적인 면이나 실용적인 면의 관점에서 동적시스템의 중요한 형태가 특이현상이다. 기존의 상태공간 모델을 가지고 해결하기 어려운 특이시스템에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 성질로 인하여 다양한 시스템에 광범위하게 적용되어지기 때문에 특이시스템에 대한 피동성 연구결과들[12-15]이 나왔다. 하지만 대부분의 결과들은 무한시간에 대한 연구결과들[6-15]이다.

최근 Amato 등[16]은 이산시간 시스템에 대한 유한시간 제어에 대한 해석과 설계조건에 대한 결과를 제시하였다. 하지만 다루었던 시스템이 비특이시스템으로 제한되었다. 따라서 Wo 등[17]은 이산시간 특이시스템에 대한 FTS에 대한 결과를 제시하였다. 하지만 제안한 조건들은 수치적으로 해를 구하기 힘든 조건이다. 또한 Stojanovic 등[18]은 연속시간 특이시스템에 대한 FTS 안정성 조건과 상태궤환 제어기 설계방법을 제시하였다. 하지만 주어진 조건의 해를 얻기 위해서는 제안한 알고리듬의 과정을 거쳐야 한

† Corresponding Author : Dept. of Medical Engineering, Konyang University, Korea
E-mail : docoh@konyang.ac.kr
* Dept. of Electronic Engineering, Sun Moon University, Korea
Received : September 1, 2015; Accepted : October 29, 2015

다는 단점이 있다. Antic 등[19]은 이산시간 지연 특이시스템에 대한 FTS을 위한 조건을 제시하였으나 비선형행렬부등식 조건으로 표현되어서 해를 구하기 쉽지 않다. 특히 구하고자 하는 조건의 변수가 역행렬의 변수 표현이 포함되어 있어서 최적화를 위한 새로운 접근방법이 필요하다. 따라서 본 논문의 첫 번째 목적은 이산시간 비특이 시스템에 대한 FTS 조건을 구하고자 하는 변수의 견지에서 최적화가 가능한 선형행렬부등식 조건을 얻는 것이다. 그리고 지금까지 연구결과들[16-19]은 산일성 문제를 다루지 않았고 FTS 문제에서 산일성 성능을 다루는 논문은 없는 실정이다. 따라서 본 논문의 두 번째 목적은 이산시간 불확실성 특이시스템에 대한 FTS와 산일성 성능을 만족하는 상태궤환제어기 설계방법을 제시하는 것이다.

본 논문은 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대하여 FTS와 산일성 조건을 만족하는 상태궤환 제어기 설계방법을 선형행렬부등식 방법을 사용하여 제안한다. 먼저, 이산시간 특이시스템에 대한 FTS 조건에 대한 유계실수정리를 제안한다. 제안한 유계실수정리를 기반으로 FTS와 산일성 조건을 만족하는 상태궤환 제어기 설계방법을 최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법을 사용하여 제안한다. 또한 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대한 문제로 확장하여 상태궤환 제어기 설계방법을 제시한다. 수치예제를 통하여 제안한 알고리듬의 타당성을 확인한다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. I, 0 과 R^r은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, 영행렬과 $r\times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터를 각각 의미한다. $X_{(n\times n)}$는 X가 $n\times n$ 차원을 가지는 행렬이고, $*$는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소이고, $\langle X\rangle = X+X^T$ 이다.

2. 문제 설정

이산시간 불확실성 특이시스템

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k)+Bu(k)+B_w w(k) \\ z(k) &= Cx(k)+D_w w(k) \end{aligned} \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(k)\in \boldsymbol{R}^n$는 상태변수, $u(k)\in \boldsymbol{R}^n$는 제어입력, $z(k)\in \boldsymbol{R}^p$는 추정되어지는 변수, $w(k)\in \boldsymbol{R}^q$는 $l_2[0,\infty)$에 속하는 외란입력신호, E는 $rank(E)=r\le n$을 만족하는 특이행렬이고, 모든 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다. 시스템 행렬은 잘 모르지만 폴리토프형의 알고 있는 볼록 컴팩트 집합인

$$X := (A, B, B_w, C, D_w)\in \Omega \tag{2}$$

에 속한다고 가정한다. 여기서 Ω는

$$\Omega := \left\{ X(\lambda) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i \chi_i,\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i = 1,\ \lambda_i \ge 1 \right\} \tag{3}$$

이고 $\chi_i := (A_i, B_i, B_{wi}, C, D_{wi})\in\Omega$, $(i=1,\ldots,N\ )$이며, χ_i는 다면 정의역(polyhedral domain) Ω의 i번째 꼭지점(vertex)을 표시한다. 본 논문의 목적은 불확실 이산시간 특이시스템 (1)을 위하여 유한시간 안정성과 산일성을 만족하는 상태궤환 제어 이득

$$u(k) = Kx(k) \tag{4}$$

를 설계하는 것이다. 식 (1)과 식 (4)로부터 폐루프 특이시스템은

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= (A+BK)x(k)+B_w w(k) \\ z(k) &= Cx(k)+D_w w(k) \end{aligned} \tag{5}$$

와 같이 구할 수 있다.

정의 1[18, 19]: 주어진 양의 정수 N에 대해서 특이시스템 $Ex(k+1)=Ax(k)$ 이 $\{\alpha,\beta,\mathrm{N}\}$에 관하여 FTS하기 위해서는 아래의 조건

$$x(0)^T x(0) < \alpha \Rightarrow x(k)^T E^T E x(k) < \beta,\ \ k=\{1,2,\ldots,\mathrm{N}\} \tag{6}$$

을 만족하는 것이다. 여기서 $\alpha<\beta$이다.

정의 1을 기반으로 이산시간 특이시스템이 유한시간 안정하기 위한 조건은 아래의 보조정리 1에서 설명한다.

보조정리 1(유한시간 안정성): 주어진 양의 실수 $\alpha<\beta$와 $\gamma>1$에 대해서, 특이시스템 $Ex(k+1)=Ax(k)$ 이 $\{\alpha,\beta,\mathrm{N}\}$에 관하여 유한시간 안정하기 위해서는

$$\begin{aligned} &A^T PA - \gamma E^T PE < 0 \\ &\lambda_1 I < P,\quad \lambda_2 I > E^T PE,\quad -\beta\gamma^{-N}\lambda_1 + \alpha\lambda_2 < 0 \end{aligned} \tag{7}$$

을 만족하는 양의 실수 λ_1, λ_2와 양의 정부호 행렬 P가 존재하는 것이다.

증명: [3]의 정리 5.4와 [19]의 정의 1을 이용하면 조건을 구할 수 있다. $V(x(k)) = x(k)^T E^T PEx(k)$로 잡으면, 식 (7)의 첫 번째 식은

$$V(x(k+1)) - \gamma V(x(k)) < 0,\ \ k\in\{0,\ldots,\mathrm{N}\} \tag{8}$$

을 의미하고 $x(k+1)$은 특이시스템의 해에 따라서 계산되어진다. 식 (8)의 반복적인 계산과 정의 1에 의하면

$$V(x(k)) < \gamma^k V(x(0)) < \gamma^k \alpha \lambda_{\max}(E^T PE),\ \ k\in\{1,\ldots,\mathrm{N}\} \tag{9}$$

를 얻는다. 또한, 아래의 관계인

$$V(x(k)) \ge \lambda_{\min}(P) x(k)^T E^T E x(k) \tag{10}$$

을 만족한다. 식 (9)와 (10)으로부터

$$x(k)^T E^T Ex(k) < \frac{\gamma^k}{\lambda_{\min}(P)}\left[\alpha\lambda_{\max}(E^T PE)\right] \tag{11}$$

의 유도가 가능하고, 식 (11)에서

$$\frac{\gamma^k}{\lambda_{\min}(P)}\left[\alpha\lambda_{\max}(E^T PE)\right] < \beta \tag{12}$$

를 만족하면

$$x(k)^T E^T Ex(k) < \beta,\ \ k\in\{0,...,\mathrm{N}\} \tag{13}$$

을 의미한다. 따라서 $0 < \lambda_1 < \lambda_{\min}(P)$과 $\lambda_{\max}(E^T PE) < \lambda_2$로 설정하면 $\lambda_1 I < P$ 와 $\lambda_2 I > E^T PE$ 와 같은 조건을 얻을 수 있고, 식 (12)에서부터 식 (7)의 마지막 조건을 구할 수 있다. ■

정의 1과 보조정리 1로부터 특이시스템이 유한시간 안정성을 만족하는 상태궤환 제어기가 존재할 조건을 이끌어 낼 수 있다. 다루고자 하는 특이시스템이 유한시간 안정하다는 것은 시간영역의 유계를 정하면 상태가 어떤 영역을 벗어나지 않는다는 의미이다. 그러나 리아푸노프 안정성 이론에서 시간영역과 유계는 결정되지 않는다. 유한시간 제한 시스템이 반드시 리아푸노프 점근적 안정성(Lyapunov asymptotic stable)을 의미하지 않고 또한 리아푸노프 안정성이 유한시간 제한(finite-time bounded)이 될 필요도 없다 [20].

정의 2[20]: 특이시스템 $Ex(k+1) = Ax(k)$에 대하여, $\det(zE-A)$이 항등적으로 영이 아니면 정규적(regular)이라 정의하고 $rank(E) = \deg(\det(zE-A))$ 이면 인과적(causal)이라 한다.

정의 3[21]: 모든 불확실성 (2)에 대하여, 행렬부등식

$$J = \sum_{k=0}^{N}\left[-w(k)^T z(k) + \eta w(k)^T w(k)\right] < 0, \quad N > 0 \tag{14}$$

를 만족하면, 불확실 특이시스템 (5)는 산일성(dissipation) η를 가지는 강인 피동적이라고 정의한다. 따라서, 식 (4)의 상태궤환 제어기 설계의 목적은 폐루프 특이시스템 (5)가 정규적이고 인과적이며 유한시간 안정하고, 식 (14)의 산일성 조건을 만족하는 것이다.

정의 4[22]: 특이시스템 $Ex(k+1) = Ax(k)$ 이 정규적이고 인과적이며 안정하다면 특이시스템은 허용가능하다(admissible)라고 정의한다.

3. 강인 유한시간 산일성 제어기 설계

본 절에서는 비강제(unforced) 특이시스템에 대한 유한시간 안정성과 산일성을 만족하는 유계 실수정리(bounded real lemma) 조건을 제시한다. 구한 조건을 기반으로 상태궤환 제어기 설계방법을 제시하고 폴리토픽 불확실성을 가지는 특이시스템에 대한 제어기 설계방법으로 확장한다. 먼저 비강제 특이시스템

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) \\ z(k) &= Cx(k) + D_w w(k) \end{aligned} \tag{15}$$

에 대한 유한실수정리를 구하고자 한다. 여기서 각 변수에 대한 정의는 식 (1)과 동일하다.

정리 1: 주어진 실수 $\gamma > 1$과 $\alpha < \beta$에 대하여, 이산시간 비강제 특이시스템 (15)가 정규적이고 인과적이며 유한시간 안정하고 식 (14)의 강인 피동성을 만족하기 위해서는 아래의 행렬부등식

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Omega & (A-E)^T X - X^T + Z\Phi^T + E^T P & -C^T + X^T B_w \\ * & P - \langle X \rangle & X^T B_w \\ * & * & 2\eta I - \langle D_w \rangle \end{bmatrix} < 0 \\ &\lambda_1 I < P, \quad \lambda_2 I > E^T PE, \quad -\beta\gamma^{-N}\lambda_1 + \alpha\lambda_2 < 0 \\ &\Omega = \langle (A-E)^T X \rangle + (1-\gamma)E^T PE \end{aligned} \tag{16}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P와 행렬 Z, X, 양의 실수 λ_1, λ_2, η가 존재하는 것이다. 여기서, Φ는 $E^T\Phi = 0$을 만족하는 행렬이다.

증명: 변수 $y(l) = x(l+1) - x(l)$ 로 설정하면, 식 (15)는

$$\begin{aligned} \bar{E}\bar{x}(k+1) &= \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}w(k) \\ z(k) &= \bar{C}\bar{x}(k) + \bar{D}w(k) \end{aligned} \tag{17}$$

과 같이 되고, 변수들은 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} &\bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} E & I \\ A-E & -I \end{bmatrix},\ \bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ Ey(k) \end{bmatrix} \\ &\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix}, \bar{C} = [C\ 0],\ \bar{D} = D_w \end{aligned}$$

유한시간 안정성을 만족하기 위한 정의 1과 보조정리 1로부터 리아푸노프 함수(Lyapunov function)를

$$V(\bar{x}(k)) = \bar{x}(k)^T \bar{E}^T \bar{P} \bar{E} \bar{x}(k) \tag{18}$$

과 같이 설정하면 식 (8)로부터 $\Delta V(\bar{x}(k)) = V(\bar{x}(k+1)) - \gamma V(\bar{x}(k))$와 같이 된다. 따라서, 유한시간 안정성과 산일성을 만족하기 위해서는

$$\begin{aligned} \Delta V(\bar{x}(k)) \le\ & V(\bar{x}(k+1)) - \gamma V(\bar{x}(k)) \\ & - w(k)^T z(k) - z(k)^T w(k) + 2\eta w(k)^T w(k) < 0 \end{aligned} \tag{19}$$

를 얻는다. 또한 $\bar{E}^T\bar{\Phi} = 0$ 로 두면

$$2\bar{x}(k+1)^T\bar{E}^T\bar{\Phi}\bar{Z}^T\bar{x}(k)=0 \tag{20}$$

을 유추할 수 있다. 정의 1과 보조정리 1의 유한시간 안정성과 식 (14)의 산일성 조건으로부터

$$\begin{aligned} J \le \sum_{k=0}^{N}\big[&-w(k)^T z(k) - z(k)^T w(k) + 2\eta w(k)^T w(k) \\ &+ \Delta V(\bar{x}(k)) + 2\bar{x}(k+1)^T\bar{E}^T\bar{\Phi}\bar{Z}^T\bar{x}(k)\big] < 0 \end{aligned} \tag{21}$$

을 얻는다. $\theta(k)=\left[\bar{x}(k)^T\ w(k)^T\right]^T$ 로 잡으면, 식 (21)은

$$\theta(k)^T \Lambda \theta(k) < 0 \tag{22}$$

와 같이 되고 변수는 아래와 같이 정의된다.

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\langle\bar{A}^T\bar{\Phi}\bar{Z}^T\rangle-\gamma\bar{E}^T\bar{P}\bar{E} & \bar{Z}\bar{\Phi}^T\bar{B}-\bar{C}^T \\ * & 2\eta I-\langle\bar{D}\rangle\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{A}^T\bar{P} \\ \bar{B}^T\bar{P}\end{bmatrix}\bar{P}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{P}\bar{A} & \bar{P}\bar{B}\end{bmatrix}$$

식 (17)의 변수들과 $\bar{P}=\begin{bmatrix}P & 0\\ * & \alpha I\end{bmatrix}$, $\bar{Z}=\begin{bmatrix}Z & I\\ 0 & I\end{bmatrix}$, $\bar{\Phi}=\begin{bmatrix}\Phi & 0\\ * & X\end{bmatrix}$의 변수를 $\Lambda<0$에 대입하고 $\alpha\to 0$로 두면 식 (16)의 첫 번째 조건을 얻을 수 있다. $w(k)=0$ 인 비강제 특이시스템 (15)의 정규성과 인과성을 증명하기 위해서, 식 (16)의 첫 번째 조건은

$$\begin{bmatrix}\langle\bar{A}^T\bar{\Phi}\bar{Z}^T\rangle-\gamma\bar{E}^T\bar{P}\bar{E} & \bar{A}^T\bar{P} \\ * & -\bar{P}\end{bmatrix}<0 \tag{23}$$

을 만족하고 식 (23)은 슈어 여수(Schur complement) 정리에 의해서

$$\bar{A}^T\bar{P}\bar{A}-\gamma\bar{E}^T\bar{P}\bar{E}+\langle\bar{Z}\bar{\Phi}^T\bar{A}\rangle<0 \tag{24}$$

로 변형된다. [22]의 정리 1과 동일한 증명과정을 거치면 비강제 특이시스템 (15)가 정규적이고 인과적임을 직접적으로 보여줄 수 있다. 또한 정의 1과 보조정리 1의 결과를 이용하면 유한시간 안정성을 위한 조건인 식 (16)의 나머지 조건들을 직접 얻을 수 있다. ■

정리 1로부터 유한시간 안정성과 산일성을 만족하는 상태궤환 제어기 설계는 정리 2에서 주어진다.

정리 2: 주어진 $\gamma>1$과 $\alpha<\beta$에 대하여, 식 (5)가 정규적이고 인과적이며 유한시간 안정성과 산일성을 만족하기 위해서는

$$\begin{aligned} &\Pi=\begin{bmatrix}\Psi & (A-E)X-X^T+Z\Phi^T+EP & -B_w+X^TC^T \\ * & P-\langle X\rangle & X^TC^T \\ * & * & 2\eta I-\langle D_w\rangle\end{bmatrix}<0 \\ &\lambda_1 I<P,\quad \lambda_2 I>E^TPE,\quad -\beta\gamma^{-N}\lambda_1+\alpha\lambda_2<0 \\ &\Psi=\langle(A-E)X\rangle+\langle BY\rangle+(1-\gamma)E^TPE \end{aligned} \tag{25}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P, 행렬 Z, X, Y과 양의 실수 λ_1, λ_2, η가 존재하는 것이다. 여기서, Φ는 $E^T\Phi=0$ 을 만족하는 행렬이다. 또한 이산시간 특이시스템 (1)에 대해서 유한시간 안정성과 산일성을 만족하는 식 (4)의 상태궤환 제어기 이득은

$$K=YX^{-1} \tag{26}$$

으로부터 구해진다.

증명: 아래와 같은 이산시간 특이시스템

$$\begin{aligned} \bar{E}^T\bar{\zeta}(k+1) &= \bar{A}^T\bar{\zeta}(k)+\bar{C}^T\bar{w}(k) \\ z(k) &= \bar{B}^T\bar{\zeta}(k)+\bar{D}^T\bar{w}(k) \end{aligned} \tag{27}$$

을 고려하자. 여기서, $\bar{\zeta}(k)$와 $\bar{w}(k)$의 차수는 잘 정의되어 있다고 하자. $\det(z\bar{E}-\bar{A}^T)=\det(z\bar{E}^T-\bar{A}^T)$이므로 $(\bar{E},\bar{A})$가 정규적이고 인과적이기 위한 필요충분조건은 $(\bar{E}^T,\bar{A}^T)$이 정규적이고 인과적이다. 또한 특이시스템 (15)가 정규적이고 인과적이기 위한 등가의 조건은 특이시스템 (27)이 정규적이고 인과적이다. 또한, $\det(z\bar{E}-\bar{A})=0$의 해는 $\det(z\bar{E}^T-\bar{A}^T)$ 의 해와 동일하기 때문에 $w(k)=0$을 만족하는 특이시스템 (15)의 유한시간 안정성은 $\bar{w}(k)=0$를 가지는 식 (27)의 유한시간 안정성과 동일한 조건이다. 또한 특이시스템 (15)에 대한 산일성 성능지수 (14)가 허용가능한 것은 특이시스템 (27)이

$$J=\sum_{k=0}^{N}\left[-\bar{w}(k)^T z(k)-z(k)^T\bar{w}(k)+2\eta\bar{w}(k)^T\bar{w}(k)\right]<0,\ N>0 \tag{28}$$

의 산일성 조건을 허용가능한 것과 필요충분조건이다. 따라서 식 (16)의 조건에서 E, A, B_w, C, D_w의 각 행렬의 자리에 E^T, A^T, C^T, B_w^T, D_w^T 를 각각 대입하면

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix}\Xi & (A-E)X-X^T+Z\Phi^T+E^TP & -B_w+X^TC \\ * & P-\langle X\rangle & X^TC^T \\ * & * & 2\eta I-\langle D_w\rangle\end{bmatrix}<0 \\ &\Xi=\langle(A-E)X\rangle+(1-\gamma)E^TPE \end{aligned} \tag{29}$$

를 구할 수 있다. 다루고자 하는 이산시간 특이시스템 (1)의 유한시간 안정성과 산일성을 만족하는 상태궤환 제어기 식 (4)를 설계하기 위하여 식 (29)에서 A의 자리에 $A+BK$ 를 대입한다. $Y=KX$ 를 적용하여 정리하면 식 (25)의 첫 번째 조건을 얻을 수 있다. 식 (25)의 나머지 조건은 정의 1과 보조정리 1로부터 직접 얻을 수 있다. ■

정리 2에서 얻어진 결과는 폴리토필 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템 (1)을 다루는 문제로 확장 가능하다. 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대해서 정규적이고 인과적이며 유한시간 안정성과 산일성을 만족하는 상태궤환 제어기 설계

방법 정리 3에서 보여준다.

정리 3: 주어진 $\gamma > 1$과 $\alpha < \beta$에 대하여, 식 (1)~(5)의 이산시간 특이시스템이 정규적이고 인과적이며 유한시간 안정성과 산일성을 만족하기 위해서는

$$\overline{\Pi_i} = \begin{bmatrix} \Psi_i & (A_i - E)X - X^T + Z\Phi^T + EP & -B_{wi} + X^T C^T \\ * & P - \langle X \rangle & X^T C_i^T \\ * & * & 2\eta I - \langle D_{wi} \rangle \end{bmatrix} < 0 \qquad (30)$$
$$\lambda_1 I < P, \quad \lambda_2 I > E^T PE, \quad -\beta\gamma^{-N}\lambda_1 + \alpha\lambda_2 < 0$$
$$\Psi_i = \langle (A_i - E)X \rangle + \langle B_i Y \rangle + (1-\gamma)E^T PE$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P, 행렬 Z, X, Y과 양의 실수 λ_1, λ_2, η가 존재하는 것이다. 여기서 Φ는 $E^T\Phi = 0$을 만족하는 행렬이다. 또한 이산시간 특이시스템 (1)에 대해서 유한시간 안정성과 산일성을 만족하는 식 (4)의 상태궤환 제어기 이득은 $K = YX^{-1}$으로부터 구해진다.

증명: 폴리토픽 불확실성을 가지는 식 (2)를 정리 2의 식 (30)의 조건에 대입하면

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \begin{bmatrix} \Psi_i & (A_i - E)X - X^T + Z\Phi^T + EP & -B_{wi} + X^T C^T \\ * & P - \langle X \rangle & X^T C_i^T \\ * & * & 2\eta I - \langle D_{wi} \rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \overline{\Pi}_i \qquad (31)$$

과 같이 되고, $\overline{\Pi_i} < 0$이면 정리 2에서 $\Pi < 0$이 되므로 식 (30)을 만족하면 이산시간 폐루프 특이시스템 (5)가 정규적이고 인과적이며 유한시간 안정하고 강인 산일성을 만족한다. ■

제안한 정리 3은 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 선형행렬부등식으로 표현이 가능하기 때문에 최적화가 가능하다. 예를 들어 가장 큰 산일성 η^*의 값을 구하기 위해서는 정리 2와 정리 3에서

$$\text{Maximize } \eta \text{ subject to LMI (25) (또는 (30))} \qquad (32)$$

의 최적화 문제로 변경 가능하다. 따라서 식 (32)와 같이 구하는 변수의 견지에서 최적화를 위한 문제로 수정할 수 있다.

제안한 알고리듬의 타당성을 보여주기 위하여 몇 가지 수치예제를 다루고자 한다. 이산시간 특이시스템

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} w(k) \qquad (33)$$
$$z(k) = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + 0.1 w(k)$$

을 다룬다. $x(0) = 1$이라고 하고 정리 2에서 $\gamma = 1.1$, $\alpha = 2$, $\beta = 10$, $N = 5$라고 두고 $E^T\Phi = 0$을 만족하도록 $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$으로 잡으면 정리 2의 식 (25)를 만족하는 변수들은 MATLAB의 '*feassp*' 명령어를 통하여

$$P = \begin{bmatrix} 0.3411 & -0.0177 \\ * & 0.1544 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1.5497 & -0.0042 \\ -0.0463 & 0.0504 \end{bmatrix}$$
$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0483 \\ 0 & -0.0996 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1.2846 & -1.4204 \end{bmatrix} \qquad (34)$$
$$\eta = 0.0136, \quad \lambda_1 = 0.1388, \quad \lambda_2 = 0.3928$$

와 같이 한번에 구해질 수 있다. 따라서 선형 이산시간 특이시스템 (33)의 정규성, 인과성, 유한시간 안정성 및 산일성의 조건을 만족하는 상태궤환제어기는 식 (26)에 의하여

$$K = YX^{-1} = \begin{bmatrix} -1.5031 & -10.1893 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

와 같이 구해진다. 동일한 예제와 식 (32)를 이용하여 가장 큰 산일성 η^*의 값을 구하기 위하여 MATLAB의 '*mincx*'의 명령어를 사용하면 정리 2를 만족하는 모든 변수와 상태궤환 제어기 이득은

$$P = \begin{bmatrix} 0.1411 & -0.0082 \\ * & 0.0465 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0.1057 & -0.0042 \\ -0.0463 & 0.0504 \end{bmatrix}$$
$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0050 \\ 0 & 0.0491 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -211.0353 & -211.1795 \end{bmatrix} \qquad (36)$$
$$\eta^* = 0.0768, \quad \lambda_1 = 0.0457, \quad \lambda_2 = 0.1415$$
$$K = 10^3 \times \begin{bmatrix} -3.9782 & -4.5229 \end{bmatrix}$$

과 같은 값을 얻는다. 따라서 가장 큰 산일성 η^*를 구할 수 있다. 폴리토픽 불확실성을 다루기 위하여

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 + \Delta_1 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} w(k) \qquad (37)$$
$$z(k) = \begin{bmatrix} 0.1 + \Delta_2 & 1 \end{bmatrix} x(k) + 0.1 w(k)$$

과 같은 이산시간 불확실 특이시스템을 다룬다. $|\Delta_1| \le 0.1$, $|\Delta_2| \le 1$로 정의하면 4개의 꼭지점을 가지는 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템이다. 여기서, $\alpha = 2$, $\beta = 20$, $\gamma = 1.1$, $N = 10$으로 설정하고 $E^T\Phi = 0$을 만족하도록 $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$로 설정한다. 정리 3을 만족하는 변수들은

$$P = \begin{bmatrix} 0.1693 & 0.0412 \\ * & 0.1210 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 0.4304 & -0.1186 \\ -0.0709 & 0.1153 \end{bmatrix}$$
$$Z = \begin{bmatrix} -421.0566 & 420.9566 \\ 231.6150 & -231.6375 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -1.4165 & -1.6287 \end{bmatrix} \qquad (38)$$
$$\eta = 0.0422, \quad \lambda_1 = 0.0934, \quad \lambda_2 = 0.3488$$

과 같이 한번에 구해진다. 따라서 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산시간 불확실성 시스템 (35)의 정규성, 인과성, 유한시간 안정성 및 산일성 뿐만 아니라 불확실성에 대해서 강인성을 가지는 상태궤환 제어기 이득은

$$K = \begin{bmatrix} -6.7647 & -21.0819 \end{bmatrix} \qquad (39)$$

로 구해진다. 따라서 제안한 상태궤환 제어기 설계방법은 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대해서도 유한시간 안정성과 산일성을 만족한다.

4. 결 론

본 논문에서는 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산시간 불확실 특이시스템에 대하여 유한시간 안정성과 강인 산일성을 만족하는 상태궤환 제어기 설계방법을 최적화가 가능한 선형행렬부등식 기법을 이용하여 제안하였다. 이산시간 특이시스템에 대한 유한시간 안정성에 대한 유계 실수 정리를 기반으로 상태궤환 제어기 설계방법을 최적화가 가능한 선형행렬부등식으로 제시하였다. 또한 폴리토픽 불활실성 이산시간 특이시스템에 대한 상태궤환 설계 방법으로 확장 가능함을 보였다. 제시한 강인 상태궤환 제어기는 다루고자 하는 이산시간 비특이시스템의 정규성, 인과성, 유한시간 안정성 및 산일성을 만족한다. 수치예제를 통하여 제안한 제어기 설계 알고리듬의 타당성을 보여주었다. 제안한 유한시간 안정성과 산일성을 만족하는 이론들은 다양한 제어 및 필터링 분야의 알고리듬에 직접 적용가능하다.

감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임. (No. 2010-0025670)

References

[1] G. Kamenkov, “On stability of motion over a finite interval of time,” Journal of Applied Math and Mechanics, PMM, vol. 17, pp. 529-540, 1953.

[2] P. Dorato, *An overview of finite-time stability, Current Trends in Nonlinear Systems and Control*, Birkhauser, Boston, pp. 185-194, 2006.

[3] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino, and G. D. Tommasi, *Finite-time stability and control, Lecture Notes in Control and Information Sciences 453*, Springer, London, 2014.

[4] C. Liu, Y. Zhang, and H. Sun, “Finite-time H_∞ filtering for singular stochastic systems,” *Journal of Applied Mathematics, Hindawi Publishing Corp.*, vol. 2012, ID 615790, 2012.

[5] J. LaSalle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's direct method*, Academic Press, New York, 1961.

[6] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems, “Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 36, no. 11, pp. 1228-1240, 1991.

[7] N. Kottenstette and P. J. Antsaklis, “Relationship between positive real, passive dissipative, and positive systems,” *Proc. of American Control Conference, Baltimore, MD, USA*, pp. 409-416, 2010.

[8] C. Li and X. Liao, “Passivity analysis of neural networks with time delay,” *IEEE Trans. Circuits and Systems-II, Exp. Briefs,* vol. 52, no. 8, pp. 471-475, 2005.

[9] L. Xie, M. Fu, and H. Li, “Passivity analysis and passification for uncertain signal processing systems,” *IEEE Trans. Signal Process.,* vol. 46, no. 9, pp. 2394-2403, 1998.

[10] D. Q. Wei and X. S. Luo, “Passivity-based adaptive control of chaotic oscillations in power systems,” *Chaos Solitons Fractals*, vol. 31, no. 3, pp. 665-671, 2007.

[11] Q. Li, Q. Zhang, N. Yi, and Y. Yuan, “Robust passive control for uncertain time-delay singular systems,” *IEEE Trans. Circuits and Systems-I, Reg. Papers,* vol. 56, no. 3, pp. 653-663, 2009.

[12] A. Ling, Y. Hui, and D. X. Zhuang, “Passive control for uncertain discrete time-delay singular systems,” *Proc. 3rd International Conf. on Intelligent Networks and Intelligent Systems*, pp. 156-159, 2010.

[13] H. Li and S. Shi, “Robust passive control for singular systems with time-delay and uncertainties,” *Proc. International Conf. on Electronic and Mechanical Engineering and Information Technology,* pp. 4853-4855, 2011.

[14] Z. Feng, J. Lam, and H. Gao, “α-dissipativity analysis of singular time-delay systems,” A*utomatica*, vol. 47, pp. 2548-2552, 2011.

[15] X. M. Zhang and Q. L. Han, “Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems with time-varying delay based on a finite sum inequality,” *IEEE Trans. Circuits and Systems-II*, vol. 53, pp. 1466-1470, 2006.

[16] F. Amato, M. Ariola, and Cosentino, “Finite-time control of discrete-time linear systems: analysis and design conditions Finite-time output feedback control of discrete-time systems,” Automatica, vol. 46, pp. 919-924, 2010.

[17] S. Wo and X. Han, “Finite-time stability analysis of discrete-time linear singular systems,” *Journal of Applied Mathematics, Hindawi Publishing Corp.*, vol. 2014, ID 579863, 2014.

[18] S. B. Stojanovic, D. L. J. Debeljkovic, and D. S. Antic, “Finite-time stability and stabilization state-delay systems using improved estimation of a lower bound on a Lyapunov-like functional,” Bulletin of the polish academy of sciences technical sciences, vol. 63, no. 2, pp. 479-487, 2015.

[19] D. S. Antic, S. B. Stojanovic, and D. L. J. Debeljkovic, "Finite-time stability and stabilization of singular discrete time-delay systems," *XI International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements*, Serbia, pp. 160-163, 2012.

[20] Y. Ma, L. Fu, Y. Jing, and Q. Zhang, "Finite-time H_∞ control for a class of discrete-time switched singular time-delay systems subject to actuator saturation," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 261, pp. 264-283, 2015.

[20] L. Dai, *Singular control Systems*, Berlin, Springer-Verlag, 1989.

[21] E. M. N. Lopez, "Several dissipativity and passivity implications in the linear discrete-time setting," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 6, pp. 599-616, 2005.

[22] S. Xu and J. Lam, "Robust stability and stabilization of discrete singular systems: an equivalent characterization," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 49, vol. 4, pp. 568-574, 2004.

저 자 소 개

김 종 해 (Kim Jong Hae)

1993년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전자공학과 졸업(공박). 1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년~2001년 일본 오사카대학 객원연구원. 2010년~2011년 미국 조지아텍 방문연구원. 2002년 3월~현재 선문대학교 전자공학과 교수.

Tel : 041-530-2352

E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr

오 도 창 (Oh Do Chang)

1991년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1997년 동 대학원 전자공학과 졸업(공박). 1997년 2월~1997년 8월 창원대학교 공과대학 국책교수. 2007년~2008년 미국 Univ. of Florida 방문교수. 1997년 8월~현재 건양대학교 의공학부 교수.

Tel : 041-730-5120

E-mail : docoh@konyang.ac.kr