

집중 질량을 갖는 폭 변단면 외팔보의 굽힘 진동 해석

Bending Vibration Analysis of Width Tapered Beams with Concentrated Tip Mass

이 정 우* · 곽 종 훈** · 이 정 윤†

Jung Woo Lee, Jong Hoon Kwak and Jung Youn Lee

(Received October 14, 2015 ; Revised November 17, 2015 ; Accepted November 17, 2015)

Key Words : Bending Vibration(굽힘 진동), Transfer Matrix Method(전달행렬법), Free Vibration Characteristics(자유진동 특성), Bernoulli-Euler Beam(베르누이-오일러 보), Tip Mass(끝질량)

ABSTRACT

A transfer matrix method has been developed to determine the more accurate natural frequencies for the bending vibration of Bernoulli-Euler beam with linearly reduced width and a concentrated tip mass. The proposed method can be computed an infinite number of the natural frequencies using a single element. Using the differential equation, shear force, and bending moment in which can be deduced by the diverse variational principles, a transfer matrix is formulated. The roots of the differential equation are computed by the Frobenius method. The effect of the concentrated mass for the natural frequencies of width-tapered beams is examined through a parametric study, and to show the accuracy of the proposed method, the computed results compared with those obtained from commercial finite element analysis program(ANSYS).

1. 서 론

단면이 균일하지 않는 보(non-uniform beam)의 동특성 해석은 유한요소법과 전달행렬법 같은 다양한 방법에 의해 연구되었고, 공학설계에 폭 넓게 사용되고 있다⁽¹⁻¹⁰⁾. 단면이 균일하지 않는 보의 한 종류인 테이퍼진 보(tapered beam)는 많은 연구자들이 형상함수를 가정하여 동특성을 근사적으로 해석하였다. 테이퍼진 보는 단면의 높이가 감소된 것, 폭이 감소된 것, 폭과 높이가 동시에 감소된 것으로 구분할 수 있다. 다양한 테이퍼 비(taper ratio)에 의해 단면의 폭이 감소된 보에 대한 정확한 동특성 해석

은 Lee 등⁽⁸⁾에 의하여 연구가 수행되었고 외팔보 끝단에 질량이 부착된 보에 대한 연구는 많은 연구자들에 의해 연구 되었으나⁽⁹⁻¹²⁾ 테이퍼진 폭과 끝단에 집중질량을 갖는 보의 동특성을 정확히 예측하는 연구는 거의 없었으며 전달행렬법을 이용하여 테이퍼진 폭과 집중질량을 가지는 보의 정확한 동특성을 구하는 연구는 진행되지 않았다.

따라서 이 연구에서는 폭이 선형적으로 감소된 보의 면내 굽힘진동(in-plane bending vibration)에 대한 집중질량의 영향을 파라메트릭 연구(parametric study)를 통하여 검토한다. 이를 위해 폭이 감소된 보에 대한 집중질량의 영향을 한 개의 보 요소를 사용하여 해석할 수 있는 전달행렬법을 개발하고 미분

† Corresponding Author ; Member, Department of Mechanical System Engineering, Kyonggi University
E-mail : jylee@kgu.ac.kr

* Member, KEPKO KPS Technology Research & Development Institute

** Member, Dept. of Mechanical Engineering, Kyonggi University

‡ Recommended by Editor Heung Soo Kim

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

방정식의 근을 결정하며 멱급수의 하나인 Frobenius 방법을 사용한다^(1,2,5,7,8). 제안된 방법은 분포질량과 집중질량을 고려하여 테이퍼진 보를 모델링하였으며 한 개의 요소를 사용하여도 무한개의 고유 진동수를 정확히 구하는 방법으로 해석된 결과들은 ANSYS 를 사용한 결과와 비교하였다.

2. 이 론

2.1 지배 미분방정식

Fig. 1에 폭이 테이퍼진 보 끝단에 집중 질량을 가지는 보를 나타내었으며 회전관성과 전단변형의 영향을 무시하기 위하여 보의 길이가 단면의 치수에 비해 충분히 길다고 가정하였다. 여기서 XYZ는 전체 좌표계이고 L은 보의 총 길이, c는 테이퍼 비, M_c 는 보요소의 끝단에 달린 집중질량이다. x는 미소요소까지의 거리이고 dx는 미소요소의 길이, h_0 는 단면의 높이이다. 또한 b_0 는 변경 전 단면의 폭 이고, b_i 는 끝단에서 테이퍼 비에 의해 변경된 단면의 폭이다.

미소요소 dx에 대한 테이퍼진 보의 미분방정식 및 다양한 힘을 유도하기 위하여 해밀턴의 원리(Hamilton's principle)가 사용되었다. 변형에너지(U)와 운동에너지(T)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x)(w'')^2 dx \tag{1}$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x)(\dot{w})^2 dx \tag{2}$$

여기서, $EI(x)$ 와 $m(x)$ 는 보 요소의 길이를 따라 단면이 테이퍼 비에 의하여 변화하는 굽힘 강성과 단위 길이당 질량이며 다음과 같이 표현된다^(1,8,13,14).

$$EI(x) = EI_0 \left(1 - c \frac{x}{L}\right)^m \tag{3}$$

$$m(x) = m_0 \left(1 - c \frac{x}{L}\right)^n \tag{4}$$

여기서, $c = (1 - b_i/b_0)/L$ 이고, EI_0 와 m_0 는 $c=0$ 일 때의 굽힘 강성과 단위 길이당 질량이다. 보의 높이가 일정하고 폭이 선형적으로 감소하는 경우는 $m=1, n=1$ 이며 동특성의 해⁽⁸⁾가 존재하고, 보의 높이가 선형적으로 감소하고 폭이 일정한 경우는 $m=3, n=1$ 이며 최근에 Lee 등⁽¹³⁾에 의해 동특성의 해가 구해졌다. 또한 보의 높이와 폭이 선형적으로 변하는 원뿔 요소(conical element)인 $m=4, n=2$ 의 경우에도 Boiangiu 등⁽¹⁴⁾의해 동특성의 해가 베셀 함수(Bessel function)로 구해졌다.

해밀턴의 원리는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \tag{5}$$

식 (5) 안에 식 (1)과 식 (2)를 대입하여 부분 적분 하면 지배 미분방정식과 전단력과 굽힘 모멘트는 다음과 같이 주어진다⁽²⁾.

$$(EI(x)w'')'' + m(x)\ddot{w} = 0 \tag{6}$$

$$V = -(EI(x)w'')' \tag{7}$$

$$M = EI(x)w'' \tag{8}$$

여기서 V는 전단력이고 M은 굽힘 모멘트이다. 식 (6)을 각 주파수(ω)를 갖는 조화진동이라고 가정하면

$$w(x,t) = W(x)\cos \omega t \tag{9}$$

식 (9)를 미분하여 식 (6)에 대입하고 시간과 거리

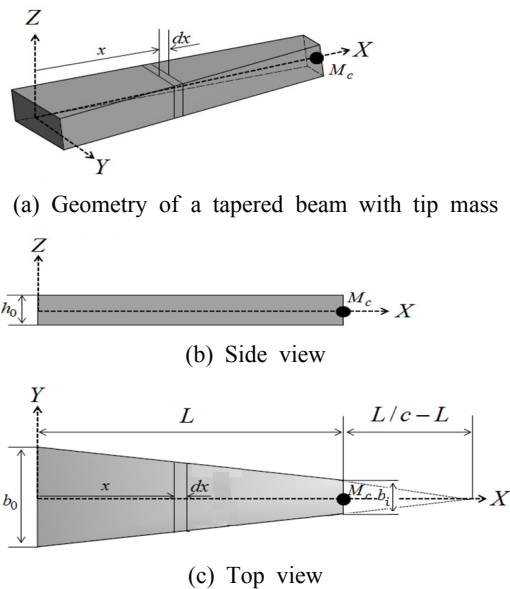


Fig. 1 Notation and coordinate system

에 대해 변수 분리하면 Lee⁽⁸⁾에 의해 정의된 미분 방정식을 무차원 형태(non-dimensional form)로 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$(1-\zeta)W'''' - 2W'''' + \bar{\omega}^2(1-\zeta)W = 0 \tag{10}$$

여기서 $\zeta = c\bar{x}$, $\bar{\omega}^2 = \frac{m_0\omega^2L^4}{EI_0c^4}$ 이고 $\bar{x} = x/L$ 이다.

2.2 미분방정식의 일반해

식 (10)의 근은 멱급수 중 Frobenius 방법을 사용하여 해석할 수 있으며 일반해의 형태는 다음과 같다.

$$W(\zeta, k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \zeta^{k+i} \tag{11}$$

여기서 a_{i+1} 은 Frobenius 계수이다.

식 (11)을 미분하여 식 (10)에 대입하고 단순화하면 지수 k 와 계수 a_{i+1} 값들을 결정할 수 있고 다음의 결정방정식(indicial equation)이 얻어진다.

$$k(k-1)(k-2)(k-3)a_1 = 0 \tag{12}$$

또한 순환관계(recurrence relationship)에 의해 일반화된 계수들은 다음 식에서 얻을 수 있다.

$$a_{i+5} = \frac{k+i+2}{(k+i+4)} a_{i+4} - \frac{\bar{\omega}^2}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+1} + \frac{\bar{\omega}^2}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_i \tag{13}$$

여기서 계수 a_1, a_2, a_3, a_4 , 그리고 a_5 의 값들은 다음과 같다.

$$a_1 = 1 \tag{14}$$

$$a_2 = \frac{(k-1)}{(k+1)} a_1 \tag{15}$$

$$a_3 = \frac{k}{(k+2)} a_2 \tag{16}$$

$$a_4 = \frac{(k+1)}{(k+3)} a_3 \tag{17}$$

$$a_5 = \frac{(k+2)}{(k+4)} a_4 - \frac{\bar{\omega}^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} a_1 \tag{18}$$

위 식에서 모든 미지수들이 결정되며 식 (12)에서 주어진 지수 k 의 4개에 값에 대해 식 (10)의 일반해는 다음과 같다.

$$W(\zeta) = A_1 f(\zeta, 0) + A_2 f(\zeta, 1) + A_3 f(\zeta, 2) + A_4 f(\zeta, 3) \tag{19}$$

여기서 함수 $f(\zeta, k)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(\zeta, k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \zeta^{k+i} \tag{20}$$

2.3 전달행렬

식 (19)를 미분하면 기울기(Φ)는 다음과 같다.

$$\Phi = \frac{c}{L} \{ A_1 f'(\zeta, 0) + A_2 f'(\zeta, 1) + A_3 f'(\zeta, 2) + A_4 f'(\zeta, 3) \} \tag{21}$$

식 (7)과 식 (8)에 식 (11)의 미분을 대입하면 전단력과 굽힘 모멘트는 다음과 같다.

$$V = N_1 \sum_{j=1}^4 \{ (1-\zeta) f''(\zeta, j-1) - f''(\zeta, j-1) \} A_j \tag{22}$$

$$M = N_2 \sum_{j=1}^4 (1-\zeta) f''(\zeta, j-1) A_j \tag{23}$$

여기서 $N_1 = -EI_0c^3/L^3$, $N_2 = EI_0c^2/L^2$ 이다. 보를 무차원 변수로 가정했을 때 보 요소의 길이는 1이며 고정단과 자유단에서 \bar{x} 는 0과 1이 된다. 따라서 $\bar{x}=0$ 을 식 (19), (21), (22), (23)에 대입하고 행렬형태로 표현하면

$$\begin{Bmatrix} W \\ \Phi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 C_{1j} &= \sum_{j=1}^4 f(0, j-1) , \\
 C_{2j} &= \frac{c}{L} \sum_{j=1}^4 f'(0, j-1) , \\
 C_{3j} &= N_2 \sum_{j=1}^4 f''(0, j-1) , \\
 C_{4j} &= N_1 \sum_{j=1}^4 \{f'''(0, j-1) - f''(0, j-1)\}
 \end{aligned}$$

이다.

식 (24)는 다음과 같이 된다.

$$\{Z\}_i = [C_{ij}]\{A_j\} \tag{25}$$

식 (25)로부터 상수 A_j 는 식 (26)과 같다.

$$\{A_j\} = [C_{ij}]^{-1}\{Z\}_i \tag{26}$$

$\bar{x}=1$ 을 식 (19), (21), (22), (23)에 대입하면 다음의 행렬형태로 된다.

$$\begin{Bmatrix} W \\ \Phi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \tag{27}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 H_{1j} &= \sum_{j=1}^4 f(c, j-1) , \\
 H_{2j} &= \frac{c}{L} \sum_{j=1}^4 f'(c, j-1) , \\
 H_{3j} &= N_2 \sum_{j=1}^4 (1-c) f''(c, j-1) , \\
 H_{4j} &= N_1 \sum_{j=1}^4 \{(1-c) f'''(c, j-1) - f''(c, j-1)\}
 \end{aligned}$$

이다.

식 (27)을 단순화하면

$$\{Z\}_{i+1} = [H_{ij}]\{A_j\} \tag{28}$$

식 (26)을 식 (28)에 대입하면 폭이 선형적으로 감소된 보의 굽힘 진동에 대한 전체 전달행렬이 얻어진다.

$$\{Z\}_{i+1} = [T_{ij}]\{Z\}_i \tag{29}$$

여기서 $[T_{ij}] = [H_{ij}][C_{ij}]^{-1}$ 이다.

한편 보의 끝단에 달린 집중질량(M_c)에 대한 전달행렬은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} W \\ \Phi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -M_c \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \Phi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i \tag{30}$$

식 (30)은 다음과 같이 단순화할 수 있다.

$$\{Z\}_{i+1} = [M]_c \{Z\}_i \tag{31}$$

식 (29)와 식 (31)을 사용하여 집중질량이 고려된 전달행렬은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{Z\}_{i+1} = [M]_c [T_{ij}]\{Z\}_i \tag{32}$$

보 요소의 끝단에 집중질량이 고려된 전체 전달행렬에 다양한 경계조건을 적용함으로써 시스템의 고유진동수를 해석할 수 있으나 이 연구에서는 외팔보의 경계조건을 고려하여 고유진동수를 구하였다.

3. 적용 예

제안된 이론을 검증하기 위해 Table 1에서 주어진 보의 제원을 예제로 사용하였다. Table 1에서 b_0 와 h_0 는 $c=0$ 일 때 변경 전의 단면의 폭과 높이이다. 제안된 이론은 오일러보에 대한 연구이므로 결과를 비교하기 위하여 상업용 프로그램(ANSYS)에서 회전관성과 전단변형의 영향을 무시할 수 있는 충분한 길이를 사용하였다.

Table 1 Properties of beam

Notation	Description	Value
E	Elastic modulus	200 GPa
ρ	Density	7850 kg/m ³
L	Length	0.8 m
b_0	Width of cross-section	0.03 m
h_0	Height of cross-section	0.01 m

4. 결과 및 고찰

보의 끝단에 달린 집중질량의 영향을 검토하기 위하여 테이퍼 비는 0.1부터 0.9까지 증가하여 검토하였다. Table 2에는 집중질량이 없는 보에 테이퍼 비가 0과 0.5일 때 고유 진동수를 ANSYS로 계산한 고유 진동수와 비교하여 표시하였으며 잘 일치함을 알 수 있었다.

Table 3은 1 kg의 집중질량이 외팔보 끝단에 달렸을 때 고유 진동수들을 나타낸 것으로 해석된 결과와 ANSYS로 계산한 결과들이 잘 일치하였다.

ANSYS에서 186번 요소를 사용하여 유효자리 4 자리수의 고유 진동수의 수렴을 위해 사용된 요소의 수는 약 3700개이고 제안된 방법은 한 개의 요소를 사용하였으며 맥급수에서 사용된 항의 수는 $c = 0$ 일 때 50개, $c = 0.9$ 일 때 300개가 사용되었다.

Tables 4(a), 4(b), 4(c)는 보의 끝단에 집중질량이 1 kg일 때 테이퍼 비의 변경에 따른 고유 진동수의 변화를 나타낸 것으로 해석된 결과들은 ANSYS에

서 주어진 결과와 잘 일치하였고, 테이퍼 비가 0.1부터 0.9까지 3개의 고유 진동수의 변화에 대하여 검토되었다.

Table 2 The first three natural frequencies: $c = 0, c = 0.5$

Mode	Natural frequency(Hz)					
	$c = 0, M_c = 0$ kg			$c = 0.5, M_c = 0$ kg		
	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	12.740	12.763	0.178	15.636	15.660	0.154
2	79.842	79.925	0.104	85.222	85.300	0.091
3	223.56	223.55	-0.005	229.00	228.95	-0.023

Table 3 The first three natural frequencies: $c=0, M_c = 1$ kg

Mode number	Natural frequency(Hz)		
	$c = 0$		
	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	7.170	7.157	0.175
2	61.070	60.970	0.164
3	187.07	186.93	0.075

Table 4 Effects of the taper ratio on the first three natural frequencies of beam with the same tip mass:

(a) $c = 0.1, 0.2, 0.3$ and $M_c = 1$ kg

Mode number	Natural frequency(Hz)								
	$c = 0.1$			$c = 0.2$			$c = 0.3$		
	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	7.157	7.148	0.123	7.176	7.165	0.148	7.179	7.168	0.142
2	61.691	61.623	0.110	61.167	61.093	0.121	61.276	61.203	0.119
3	186.81	186.79	0.010	186.99	186.94	0.025	186.92	186.88	0.022

(b) $c = 0.4, 0.5, 0.6$ and $M_c = 1$ kg

Mode number	Natural frequency(Hz)								
	$c = 0.4$			$c = 0.5$			$c = 0.6$		
	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	7.171	7.161	0.130	7.157	7.148	0.123	7.135	7.126	0.121
2	61.539	61.468	0.116	61.691	61.623	0.110	61.862	61.792	0.113
3	186.83	186.80	0.017	186.81	186.79	0.010	186.83	186.81	0.009

(c) $c = 0.7, 0.8, 0.9$ and $M_c = 1$ kg

Mode number	Natural frequency(Hz)								
	$c = 0.7$			$c = 0.8$			$c = 0.9$		
	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	7.100	7.092	0.114	7.048	7.040	0.104	6.967	6.960	0.092
2	62.032	61.964	0.110	62.177	62.110	0.108	62.200	62.137	0.102
3	186.88	186.86	0.009	186.92	186.91	0.005	186.78	186.79	-0.008

Tables 5(a), 5(b), 5(c)는 테이퍼 비가 0.5일 때 보의 끝단에 부가된 질량의 변경에 따른 고유 진동수의 변화를 나타낸 것으로 질량은 0.1 kg부터 0.9 kg까지 증가시켰으며 ANSYS와 비교 결과 잘 일치하였다.

제안된 방법은 먹급수의 유한한 항을 정해 임의의 정밀도의(소수점 3째 혹은 5째 자리 등) 엄밀해(exact solution)를 결정할 수 있다. 그러나 먹급수에서 항의 수가 증가 할수록 계산에 소요되는 시간이 증가하기 때문에 적절한 개수의 항을 사용하는 것이 필요하다. Table 5에 있는 고유 진동수의 소수점 3자리까지 얻기 위해 사용된 먹급수의 항은 80개이다.

Fig. 2와 Fig. 3은 각각 Table 4와 Table 5에서 주어진 결과들을 기준으로 고유 진동수 비를 테이퍼 비와 질량의 함수로 나타낸 것이다.

Fig. 2에 테이퍼 비의 증가에 따른 고유 진동수의 비의 변화를 나타내었다. 고유 진동수의 비는 테이퍼 진 외팔보 끝단에 1kg의 질량이 부가된 경우의 고유 진동수를 질량이 부가되지 않는 경우의 고유

진동수로 나누어 계산하였다. 끝단의 테이퍼비가 클수록 집중질량이 3개의 고유 진동수 감소에 미치는 영향은 커지고, 특히 1차 고유 진동수가 가장 큰 영향을 받음을 알 수 있었다.

Fig. 3은 테이퍼 비가 0.5일 때 외팔보 끝단에 부가 질량 증가에 따른 고유 진동수의 비를 나타낸 그림으로 고유 진동수의 비는 Fig. 2에서 정한 것과 같다. 1차 고유 진동수가 끝단 질량의 증가에 가장 큰 영향을 받았고, 2차, 3차 순으로 끝단 질량의 영향을 받는다는 것을 알 수 있었다.

Fig. 4는 테이퍼 비가 0.5일 때 무차원 질량비의 증가에 따른 무차원 고유 진동수 비의 변화를 나타낸 그림이다. 질량비는 외팔보 끝단에 부착한 질량을 외팔보의 질량으로 나눈 값이고 무차원 고유 진동수 비는 앞에서 정의하였다. 3차 고유 진동수까지 구하였으며 무차원 고유 진동수 비율을 보면 3개의 무차원 고유 진동수가 끝단 집중질량에 의해 상당히 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 1차 무차원 고유 진동수는 보의 질량과 동일한 질량이 집중질량으로

Table 5 Effects of different tip masses on the first three natural frequencies of beam with the same taper ratio:

(a) $c = 0.5$ and $M_c = 0.1, 0.2, 0.3$ kg

Mode number	Natural frequency(Hz)								
	$M_c = 0.1$ kg			$M_c = 0.2$ kg			$M_c = 0.3$ kg		
	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	13.379	13.359	0.146	11.854	11.837	0.146	10.747	10.732	0.135
2	74.575	74.501	0.099	69.855	69.782	0.104	67.231	67.160	0.105
3	204.87	204.87	0.001	197.19	197.18	0.004	193.51	193.49	0.009

(b) $c = 0.5$ and $M_c = 0.4, 0.5, 0.6$ kg

Mode number	Natural frequency(Hz)								
	$M_c = 0.4$ kg			$M_c = 0.5$ kg			$M_c = 0.6$ kg		
	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	9.900	9.886	0.134	9.224	9.212	0.131	8.670	8.658	0.132
2	65.568	65.497	0.109	64.420	64.349	0.110	63.581	63.510	0.111
3	191.35	191.34	0.008	189.94	189.92	0.009	188.95	188.93	0.012

(c) $c = 0.5$ and $M_c = 0.7, 0.8, 0.9$ kg

Mode number	Natural frequency(Hz)								
	$M_c = 0.7$ kg			$M_c = 0.8$ kg			$M_c = 0.9$ kg		
	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	8.204	8.193	0.130	7.806	7.796	0.125	7.461	7.451	0.127
2	62.941	62.870	0.112	62.437	62.366	0.113	62.030	61.959	0.114
3	188.21	188.19	0.012	187.64	187.62	0.013	187.19	187.16	0.015

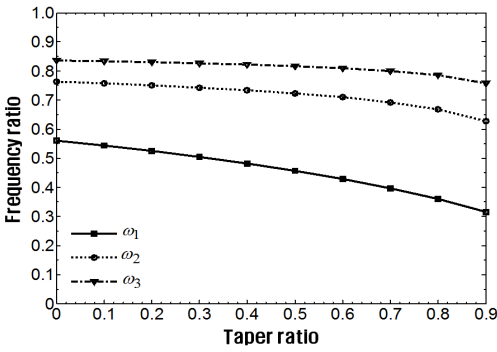


Fig. 2 Frequency ratio with respect to taper ratios when $M_c = 1$ kg

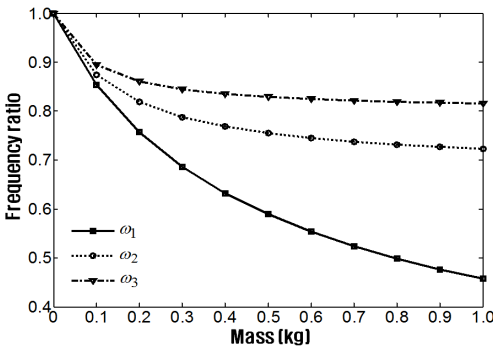


Fig. 3 Frequency ratio depending on the variation of concentrated masses when $c = 0.5$

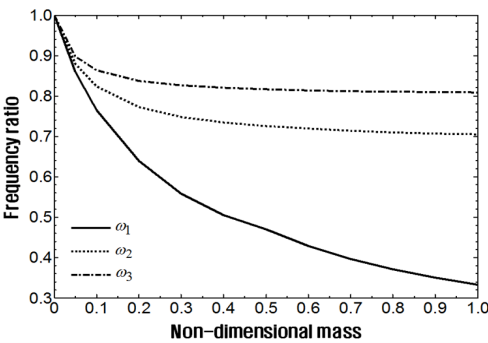


Fig. 4 Frequency ratio on the first three non-dimensional natural frequencies with respect to the variation of non-dimensional mass when $c = 0.5$

부가 되었을 때 약 67%의 진동수가 감소되었고, 2차는 29.5%, 3차는 19.2% 감소되었다. 특히, 2차와 3차 무차원 고유 진동수는 끝단에 보의 질량의

25%까지 급격한 변화를 보였으나 그 이상의 질량에 대해서는 완만한 변화를 보였다.

5. 결 론

제안된 방법으로 보의 폭이 길이를 따라 선형적으로 감소하고 끝단에 집중질량을 가진 보의 굽힘 진동해석 방법을 제안하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 끝단에 집중질량이 있고 폭이 테이퍼진 보에 대해 한 개의 요소를 사용하여 정확하고 무한개의 고유 진동수를 해석할 수 있는 전달행렬법을 제안하였다.

(2) 외팔보 끝단에 동일한 질량을 부가하였을 때 테이퍼 비가 증가함에 따라 고유 진동수 감소에 미치는 영향이 커졌다.

(3) 무차원 고유 진동수의 검토 결과 보의 질량과 동일한 질량이 끝단의 집중질량으로 부가 되었을 때 1차 진동수는 다른 진동수들에 비해 더 큰 영향을 받았다.

(4) 제안된 방법은 오일러보에 대해 제한되었기 때문에 향후에 회전관성과 전단변형의 영향이 고려한 연구가 필요하다고 생각된다.

후 기

이 연구는 2015학년도 경기대학교 대학원 연구원 장학생 장학금 지원에 의하여 수행되었음

References

(1) Banerjee, J. R., 2000, Free Vibration of Centrifugally Stiffened Uniform and Tapered Beams Using the Dynamic Stiffness Method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, No. 5, pp. 857~875.

(2) Chaudhari, T. D. and Maiti, S. K., 1999, Modelling of Transverse Vibration of Beam of Linearly Variable Depth with Edge Crack, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 63, pp. 425~445.

(3) Spyrakos, C. C. and Chen, C. I., 1990, Power Series Expansions of Dynamic Stiffness Matrices for

Tapered Bars and Shafts, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, No. 2, pp. 259~270.

(4) Zhou, D. and Cheung, Y. K., 2001, Vibrations of Tapered Timoshenko Beams in Terms of Static Timoshenko Beam Functions, Transactions of the ASME, Vol. 68, No. 4, pp. 596~602.

(5) Wang, G. and Wereley, N. M., 2004, Free Vibration Analysis of Rotating Blades with Uniform Tapers, AIAA Journal, Vol. 42, No. 12, pp. 2429~2437.

(6) Gunda, J. B., Gupta, R. K. and Ganguli, R., 2009, Hybrid Stiff-string-polynomial Basis Functions for Vibration Analysis of High Speed Rotating Beams, Computers & Structures, Vol. 87, No. 3, pp. 254~265.

(7) Gunda, J. B. and Ganguli, R., 2008, New Rational Interpolation Functions for Finite Element Analysis of Rotating Beams, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 50, No. 3, pp. 578~588.

(8) Lee, J. W., Kim, J. H. and Lee, J. Y., 2015, Exact Solutions for Bending Vibration of Beam with Linearly Reduced Width Along Its Length, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 25, No. 6, pp. 420~425.

(9) Bhat, R. B., 1984, Transverse Vibrations of A Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method, Journal of Sound and Vibration, Vol. 105, No. 2, pp. 199~210.

(10) Wu, J. S. and Chen, C. T., 2005, An Exact Solution for the Natural Frequencies and Mode Shapes of an Immersed Elastically Restrained Wedge Beam Carrying an Eccentric Tip Mass with Moment of Inertia, Journal of Sound and Vibration, Vol. 286, No. 3, pp. 549~568.

(11) Firouz-Abadi, R. D., Rahmanian, M. and Amabili, M., 2013, Exact Solutions for Free Vibrations and Buckling of Double Tapered Columns with Elastic Foundation and Tip Mass, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 135, No. 5, 051017(10 pages).

(12) Stafford, R. O. and Giurgiutiu, V., 1975, Semi-analytic Methods for Rotating Timoshenko Beams, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 17, No. 11, pp. 719~727.

(13) Lee, J. W. and Lee, J. Y., 2015, Free Vibration Analysis Using the Transfer-matrix Method on a Tapered Beam, Computers and Structures, DOI: 10.1016/j.compstruc.2015.11.007 (Accepted article).

(14) Boiangiu, M., Ceausu, Y. and Untaroiu, C. D., 2014, A Transfer Matrix Method for Free Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beams with Variable Cross Section, Journal of Vibration and Control, DOI: 10.1177/1077546314550699.



Jung Woo Lee received B.E. and M.S. in mechanical engineering in 2002 and 2004, respectively, from Kyonggi University, Suwon, Korea. He has been working as a researcher in Technology Research and Development Institute at

KEPCO KPS. In March of 2012, he enrolled at Kyonggi University as a doctoral student under the supervision of Professor Jung Youn Lee at mechanical system engineering.



Jung Hoon Kwak received his B.S in the school of mechanical engineering in 2015 from Kyonggi University. He is pursuing M.S in the school of mechanical engineering from Kyonggi University. Currently his research

interests are vibration and applied mechanics.



Jung Youn Lee is Professor of Dept. of Mechanical System Engineering at Kyonggi University, where he has been since 1996. He received a B.S., an M.S. and his Ph.D. from Hanyang University in 1979, 1989 and 1992

respectively. His research interests are in System Identification, Structural Modification, Inverse Problem, Modal Analysis and Sensitivity Analysis of Vibration.