

## 대규모 물체의 산란파 보간법 비교: Sinc 및 VSH(Vector Spherical Harmonics) 함수 보간법

### Comparison of Accuracy of Interpolation Methods for Scattered Field of Large Objects: Sinc and VSH(Vector Spherical Harmonics) Functions

정 기 환 · 최 승 호\* · 고 일 석

Ki Hwan Jung · Seung Ho Choi\* · Il Suck Koh

#### 요 약

대규모 물체의 RCS(Radar Cross Section)값을 임의의 각도에서 예측하기 위해, 미리 계산된 샘플링 지점 외 각도에서는 보간법을 사용한다. 대규모 물체의 경우, RCS 데이터베이스를 구성하기 위해 많은 입사각도에서 RCS값을 계산해야 한다. 이는 수치적으로 시간이 많이 걸려, 실질적으로 필요한 모든 입사각에서 RCS값을 미리 계산하기는 어렵다. 그러므로 가능한 적은 샘플을 이용하여 데이터베이스를 구축하고, 이를 보간하여 RCS값을 예측하는 방법이 필요하다. 본 논문에서는 계산된 RCS를 임의의 각도에서 예측하기 위한 보간법으로 Sinc 함수 및 VSH(Vector Spherical Harmonics) 함수를 이용한 방법을 고려하고, 그 정확성을 시뮬레이션을 통하여 검증한다.

#### Abstract

To estimate RCS(Radar Cross Section) at arbitrary incident angles for large objects, an interpolation method is required based on the pre-calculated RCS database at finite discrete sampling points. It is numerically difficult to compute the RCS by a large object at all required sampling points, since the computation time may be very long for one sampling point and many sampling points are required to satisfy the exact sampling condition. Therefore, it may be required to accurately estimate the RCS at any incident angles based on a database whose size is as small as possible. In this paper, the accuracy of two interpolation methods base on the sinc- and VSH(Vector Spherical Harmonics) functions are numerically compared.

Key words: RCS, Interpolation Method, Large Objects, Sinc-Function, VSH

#### I. 서 론

본 논문에서는 대규모 물체의 RCS를 임의의 각도에서 예측하기 위해 계산된 샘플링 지점 외 각도에서는 보간

법을 사용하여 RCS를 계산한다. RCS 계산 보간법으로 샘플링 이론의 Sinc-interpolation과 헬름홀츠(Helmholtz) 방정식의 해인 VSH(Vector Spherical Harmonics)<sup>[1]</sup>를 이용한 interpolation의 성능을 비교한다.

「이 연구는 광주과학기술원 전자전특화연구센터를 통한 방위사업청과 국방과학연구소의 연구비의 지원으로 연구되었음.」

인하대학교 전자공학과(Department of Electronic Engineering, Inha University)

\*국방과학연구소(Agency for Defense Development)

· Manuscript received September 25, 2014 ; Revised November 5, 2014 ; Accepted November 29, 2014. (ID No. 20140925-04S)

· Corresponding Author: Il Suck Koh (e-mail: ikoh@inha.ac.kr)

Sinc-interpolation의 경우는 샘플링 지점의 값을 이용하여 임의의 지점에서 값을 예측하는 방법이다. 이 보간법은 Nyquist 조건을 만족하지 않을 경우, 샘플링 지점 외 부분에서 오차가 발생한다<sup>[2]</sup>. VSH는 헬몰츠 방정식을 만족하므로, RCS값을 이론적으로 정확하게 계산할 수 있다. 미리 계산된 RCS값을 이용하여 각 모드(mode)의 크기를 예측하고, 이를 이용하면 미리 계산된 지점 외 다른 지점에서도 RCS값을 예측할 수 있다. 일반적으로 VSH 표현식(representation)은 무한한 모드가 필요하나, 현실적으로 무한한 지점에서 RCS값을 예측하는 것은 불가능하므로, 이로 인한 에러가 발생한다. 그러므로 본 논문에서는 두 방법의 정확도를 수치적으로 비교한다. II절에서는 두 방법에 대해 간략하게 소개하고, III절에는 금속 구 산란에 대해 두 방법의 정확도를 검증하고, IV절에서 두 대규모 물체 산란에 대해 두 방법의 정확도를 비교한다. 본 논문에서는  $e^{j\omega t}$ 를 가정하였다.

## II. Sinc- 및 VSH-Interpolations

Sinc-interpolation은 디지털 신호처리에서 많이 사용하는 샘플링 이론을 기반으로 한 방법이다<sup>[3]</sup>. 입사각  $\theta, \phi$ 에 대하여 2D Sinc-interpolation은 다음과 같이 표현된다.

$$f(\theta, \phi) = \sum_{m=-m_{\max}}^{2m_{\max}} \sum_{n=-n_{\max}}^{2n_{\max}} f(\theta_m, \phi_n) \times \text{sinc}\left(\frac{\theta - n\Delta\theta}{\Delta\theta}\right) \text{sinc}\left(\frac{\phi - m\Delta\phi}{\Delta\phi}\right) \quad (1)$$

여기서,  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ 이고,  $\Delta\theta$ 와  $\Delta\phi$ 는 입사각 샘플링 간격이다.  $f(\theta_m, \phi_n)$ 는 계산된 RCS이다. 식 (1)에서  $m$ 과  $n$ 의 범위는 interpolation error를 줄이기 위해 계산된 RCS data를 확장시킨다. RCS는 circular Symmetric 특성을 가지므로, 계산된 RCS data 입사각 범위를 확장시킬 수 있다. 식 (1)의  $m$ 과  $n$ 은  $m_{\max} = (\theta \text{ sample 개수}) - 1$ ,  $n_{\max} = (\phi \text{ sample 개수}) - 1$ 이다. Nyquist 조건은 다음과 같다.

$$\Delta\theta(\text{or } \Delta\phi) \leq \lambda/2d = \pi/ka \quad (2)$$

여기서  $a$ 는 산란체의 최대 크기,  $k$ 는 파수(wavenumber),  $\lambda$ 는 파장(wavelength)이다. Sinc-interpolation은 Nyquist 조

건인 식 (2)를 만족시키지 않을 경우 aliasing 에러가 발생하여 정확도가 떨어진다.

VSH-interpolation은 VSH와 계산된 RCS를 이용하여 산란계수를 구하고, RCS를 보간하는 방법이다<sup>[4]</sup>. VSH는 헬몰츠 방정식의 해이므로 무한한 VSH를 사용하면 정확한 값을 구할 수 있다<sup>[5]</sup>. VSH는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \vec{X}_{1lm}(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{L} Y_l^m(\theta, \phi) \\ &= \frac{-e^{jm\phi}}{\sqrt{(2\pi l(l+1))}} \left[ m \frac{p_l^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{\theta} + j \frac{dp_l^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\phi} \right] \\ \vec{X}_{2lm}(\theta, \phi) &= \hat{r} \times \vec{X}_{1lm}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (3)$$

$Y_l^m(\theta, \phi)$ 는 Scalar Spherical Harmonics이고,  $p_l^m(\cdot)$ 는 associated Legendre 함수이다<sup>[6]</sup>.  $l$ 은 양수,  $m = -l \dots +l$ 이고,  $\vec{L} = -j\hat{r} \times \nabla$ 는 angular momentum operator이다.

VSH를 사용하면 solid angle 위에서 산란파는 다음과 같이 표현이 가능하다<sup>[4]</sup>.

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = \sum_{slm} [\alpha_{slm}^{(4)} \vec{F}_{slm}^{(1)}(r, \theta, \phi) + \alpha_{slm}^{(4)} \vec{F}_{slm}^{(4)}(r, \theta, \phi)] \quad (4)$$

여기서  $\vec{F}_{1lm}^{(c)}(r, \theta, \phi) = z_l^{(c)}(kr) \vec{X}_{1lm}(\theta, \phi)$ 이고,  $\vec{F}_{2lm}^{(c)}(r, \theta, \phi) = k^{-1} \nabla \times \vec{F}_{1lm}^{(c)}(r, \theta, \phi)$ 이다. 산란계수  $\alpha_{1lm}^{(4)}$  그리고  $\alpha_{2lm}^{(4)}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \alpha_{1lm}^{(4)} &= \frac{1}{h_l^{(2)}(kr)} \oint_{S_r} \vec{E}_s(\vec{r}) \cdot [\vec{X}_{1lm}(\theta, \phi)]^* ds \\ \alpha_{2lm}^{(4)} &= \frac{kr}{d} \frac{1}{[rh_l^{(2)}(kr)]} \oint_{S_r} \vec{E}_s(\vec{r}) \cdot [\vec{X}_{2lm}(\theta, \phi)]^* ds \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $h_l^{(2)}$ 는 second kind of spherical Hankel function,  $S_r$ 은 solid angle이다. 식 (5)를 수치적으로 계산하기 위해 본 논문에서는 사다리꼴 공식(trapezoidal rule)을 사용하였다. 원거리(Far-field)에서 식 (4)는 다음과 같이 간략화된다.

$$\vec{f}(\theta, \phi) = \sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^{l_{\max}} \sum_{m=-l}^l \frac{j^{l+s-2}}{k} \alpha_{slm}^{(4)} \vec{X}_{slm}(\theta, \phi) \quad (6)$$

식 (6)을 수치적으로 계산하기 위해  $l$ 과  $m$ 을 유한하게 결정해야 한다.  $l$ 의 최대값은 다음과 같이 결정된다<sup>[4]</sup>.

$$l_{max} = \lceil ka + 2(ka)^{1/3} \rceil \quad (7)$$

$l_{max}$ 는 산란체의 전기적 크기(electrical length)에 따라 결정된다.  $m$ 의 범위는  $l_{max}$ 에 따라 자동 결정된다. 이를 이용하면 다음과 같은 샘플링 조건을 얻을 수 있다.

$$\Delta\theta(\text{or } \Delta\phi) \leq \frac{2\pi}{2 \lceil \lceil ka \rceil + 3 \rceil + 1} \quad (8)$$

식 (2)와 (8)에서 보듯이, 산란체가 크기가 커질수록 많은 샘플링 데이터가 필요하다. 산란체의 크기가 크면 식 (8)은 식 (2)로 근사화된다.

식 (1)에서 보듯이, Sinc-interpolation은 RCS database와 2개의 summation만으로 보간을 할 수 있다. 하지만, VSH-interpolation의 경우, 산란 계수와 VSH, 3개의 summation으로 구성되어 있기 때문에 계산량이 Sinc-interpolation보다 많다. 식 (5)를 계산하는 복잡도가 식 (1)을 계산하는 복잡도와 비슷하므로, Sinc-interpolation이 VSH-interpolation보다 수치적으로 효율적이다.

### III. Numerical Verification

두 interpolation 방법들의 정확성을 검증하기 위해서, 반지름이 0.7 m인 작은 금속 구의 산란을 MoM(Method of Moments)을 이용하여 계산하였다. 주파수 1 GHz에서 Bistatic RCS database를 구성하였다. 이를 정확하게 interpolation하기 위해서는 VSH-interpolation의 경우,  $l_{max}$ 는 20 이상, sampling rate는 9.7도 이내이어야 하고, Sinc-interpolation의 경우, sampling rate는 12.27도 이내이어야 한다. 예러는 RMSE(Root Mean Square Error)를 이용하였다.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{interpolation,i})^2 / n} \quad (9)$$

먼저 정확한 샘플링 조건을 만족하는 경우를 고려했다. 이때 sampling rate는 3도 간격이다. 관측점의  $\theta$ 가 30도 및 90도에서  $\phi$ 방향으로 관측점을 움직였을 때 결과가 그림 1이다. 이때 RMSE는  $\theta$ 가 30도인 경우, Sinc- 및 VSH-interpolation은 각각  $7.5439 \times 10^{-4}$ [dB],  $0.0082$ [dB]이다. 그리고  $\theta$ 가 90도인 경우에는 각각  $3.5432 \times 10^{-4}$

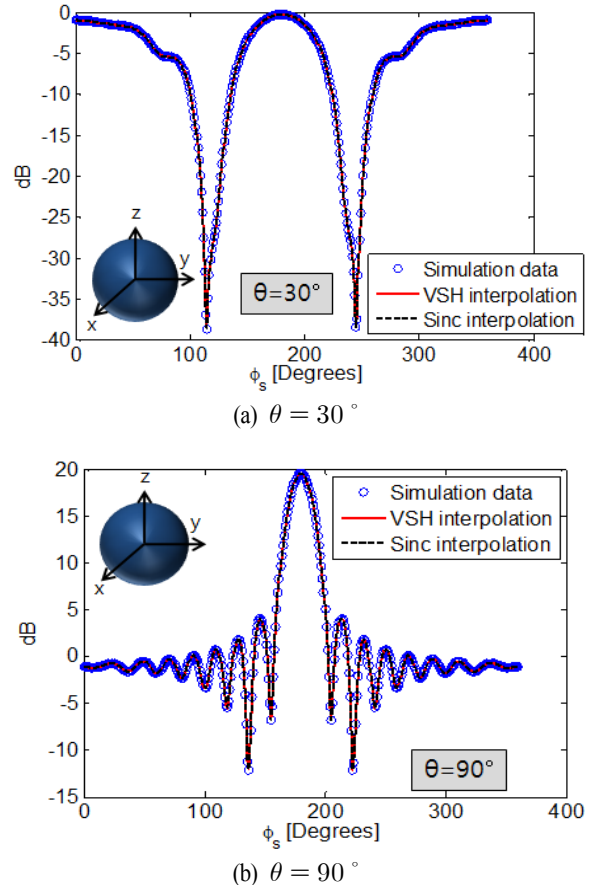
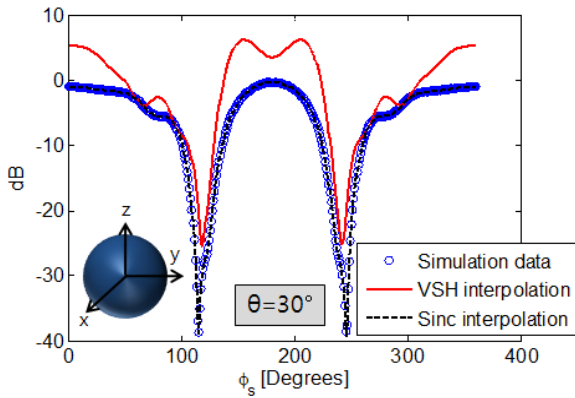


그림 1. 정확한 샘플링 조건인 경우의 Sinc 및 VSH-interpolation 결과  
 Fig. 1. Sinc and VSH-interpolation results for exact sampling conditions.

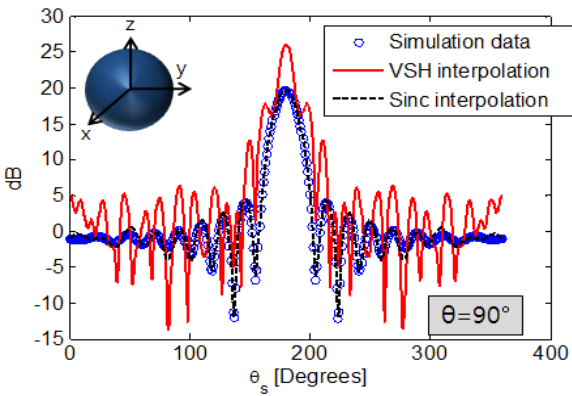
[dB],  $2.6533 \times 10^{-4}$ [dB]이다. 예측한 것과 같이, 두 interpolation의 정확도는 매우 높음을 알 수 있다.

다음은 sampling rate을 15도 간격으로 높인 경우이다. 이 경우, 두 보간법의 샘플링 조건을 모두 만족하지 못한다. 그림 2는 Sinc- 및 VSH-interpolation 결과를 정확한 결과와 비교한 그림이다. 그림에서 보듯, 에러가 발생함을 알 수 있고, 특히 VSH-interpolation이 큰 에러를 발생함을 알 수 있다. RMSE는  $\theta$ 가 30도인 경우, Sinc- 및 VSH-interpolation은 각각  $0.006$ [dB],  $72.1061$ [dB]이다. 그리고  $\theta$ 가 90도인 경우에는 각각  $0.6222$ [dB],  $62.2051$ [dB]이다.

VSH-interpolation의 에러 원인을 분석하기 위해, 산란 계수를 계산하기 위한 수치적분의 정확도를 샘플링 수에



(a)  $\theta = 30^\circ$



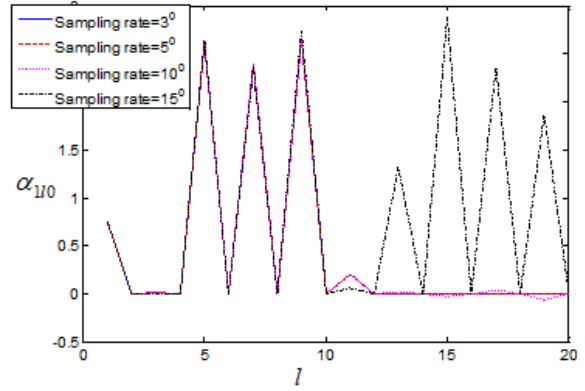
(b)  $\theta = 90^\circ$

그림 2. 부정확한 샘플링 조건인 경우의 Sinc 및 VSH-interpolation 결과  
 Fig. 2. Sinc and VSH-interpolation results for inexact sampling conditions.

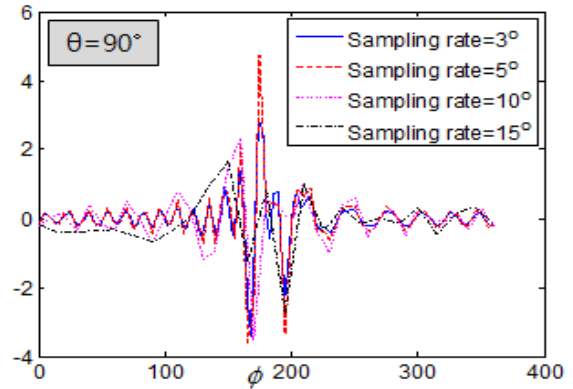
따라 비교했다. 그림 3은 산란계수의 수렴도(convergence)를 보여준다. 그림 3(a)에서 보듯이, 정확한 샘플링 조건, 식 (8)이 만족하지 않은 경우 산란계수의 정확도가 떨어짐을 알 수 있다. 그림 3(b)에서 보듯이, 적분항의 진동이 크므로 이를 정확하게 적분하기 위해서는 매우 많은 샘플링이 필요하다. 그러므로 산란계수의 정확도가 VSH-interpolation의 가장 큰 에러 원인이 되며, 이를 줄이기 위해서는 샘플링 조건을 만족해야 한다.

#### IV. Simulation Result

두 대규모 물체의 산란을 고려한다. 먼저 비행체인 경우, 2 GHz에서 PO(Physical Optics)를 이용하여 데이터베



(a) 산란 계수( $\alpha_{110}$ 의 실수부)  
 (a) Scattering coefficients(real part of  $\alpha_{110}$ )



(b) 산란 계수의 적분항  
 (b) Integration of scattering coefficients

그림 3. 산란계수 비교  
 Fig. 3. Comparison of scattering coefficient.

이스를 구성했고, 미사일은 경우 3 GHz에서 IPO를 이용하였다<sup>7)</sup>. 두 경우 monostatic RCS를 계산했다. 최대 길이가 18 m인 비행체의 정확한 sampling rate은 VSH-interpolation은 0.426도 이내, Sinc-interpolation은 0.423도 이내이다. 그리고  $l_{max}$ 는 434 이상이어야 한다. 이러한 조건을 만족하는 데이터베이스를 구성하기에는 현실적으로 불가능하므로, 본 논문에서는 sampling rate는 2도로 늘리고,  $l_{max}$ 는 93으로 줄였다.

그림 4는 비행체의 결과를 보여주고 있다. "simulation data"는 1도 간격으로 계산된 RCS 값이고, 이를 2도 간격으로 구성된 데이터베이스와 두 보간방법의 결과와 비교하였다. 그림 4에서 보듯, 샘플링 조건을 만족하지 못하

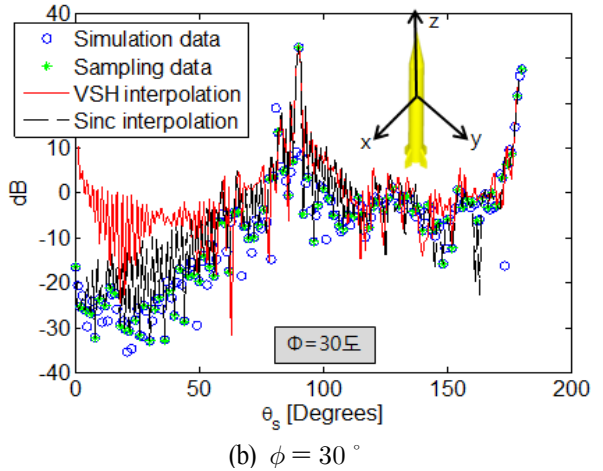
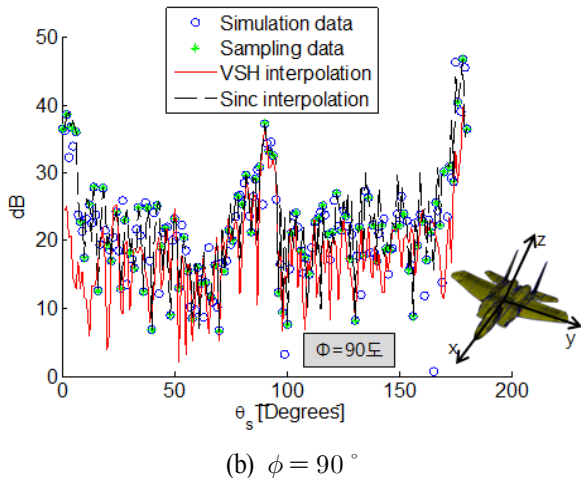
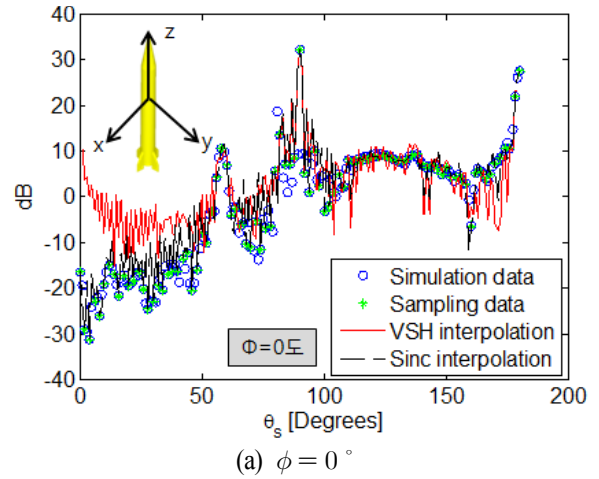
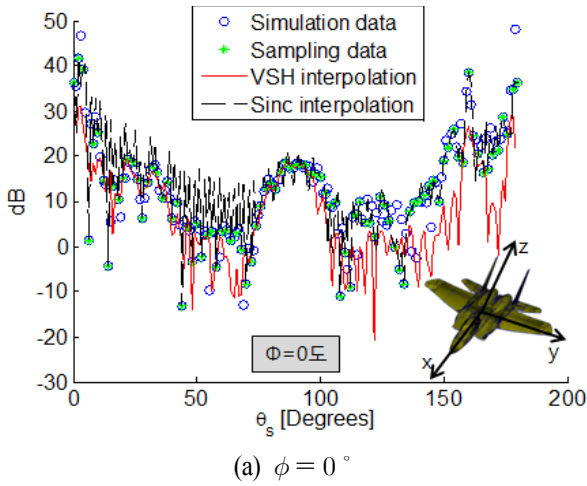


그림 4. 비행체 monostatic RCS  
Fig. 4. Monostatic RCS of aircraft.

그림 5. 미사일 monostatic RCS  
Fig. 5. Monostatic RCS of missile.

므로 두 방법은 모두 부정확한 결과를 보여주나, 전반적으로 Sinc-interpolation의 정확도가 높음을 알 수 있다.

미사일의 경우, 정확한 샘플링 조건은 sampling rate가 Sinc-interpolation은 0.478도 이내, VSH-interpolation은 0.473도 이내이다. 또  $l_{max}$ 는 392이어야 한다. 앞의 그림 4와 같은 이유로, 본 논문에서는 sampling rate를 2도로 늘리고,  $l_{max}$ 는 91로 줄였다. 그림 5는 그림 4와 같은 비교를 보여준다. 그림 5에 보듯이, 전반적으로 Sinc-interpolation의 정확도가 높음을 알 수 있다. Nyquist 조건을 만족하지 않아 aliasing 에러가 생김을 그림 5에서 알 수 있으나 Sinc-interpolation의 정확도가 VSH-interpolation보다 높다.

## V. 결 론

본 논문은 대규모 물체의 RCS를 임의의 각도에서 예측하기 위해, Sinc-interpolation과 VSH-interpolation를 사용하는 보간법을 제안하였다. 두 보간법 모두 정확한 샘플링 수는 산란체의 크기에 비례해서 커진다. 그러므로 대규모 산란체인 경우, 정확한 샘플링 조건을 만족하는 것은 현실적으로 어렵다. 우선 금속 구 산란을 이용하여 정확한 샘플링 조건을 만족하는 경우, 두 보간법이 정확한 결과를 생성함을 보였다. 부정확한 샘플링인 경우, VSH-interpolation 방법이 Sinc-interpolation보다 정확도가 떨어

짐을 수치적으로 보였다. 이는 산란계수를 계산하는 수치적분의 정확도가 샘플링 수에 크게 의존하여 생기는 결과임을 수치적으로 보였다. 그러므로 일반적으로 Sinc-interpolation이 VSH-interpolation보다 수치적으로 정확하고, 효율적이다. 두 대규모 물체인 비행체와 미사일 monostatic RCS 결과에 두 방법을 적용했고, 이 결과를 통해 두 방법의 정확도를 검증하였다. 일반적으로 Sinc-interpolation이 RCS 데이터를 보간하는 방법으로부터 효율적이다.

### 감사의 글

본 연구는 광주과학기술원 전자전특화연구센터를 통한 방위사업청과 국방과학연구소 연구비 지원으로 수행되었습니다.

### References

[1] Billy C. Brock, "Using vector spherical harmonics to compute antenna mutual impedance from measured or computed fields", *Sandia Report*, 2001.

[2] R. J. Marks II, *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Springer-Verlag, 1991.  
 [3] A. Oppenheim, R. Schaffer, and J. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, 1999.  
 [4] Giuseppe Borzi, "Trigonometric approximations for the computation of radar cross sections", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 52, no. 6, pp. 1596-1602, Jun. 2004.  
 [5] J. David Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1999.  
 [6] T. M. MacRobert, I. N. Sneddon, *Spherical Harmonics: An Elementary Treatise on Harmonic Functions, with Applications*, Oxford: Pergamon Press, 1967.  
 [7] F. Obelleiro, J. L. Rodriguez, and R. J. Burkholder, "An iterative physical optics approach for analyzing the electromagnetic scattering by large open-ended cavities", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 42, no. 4, pp. 356-361, Apr. 1995.

### 정 기 환



2013년 2월: 인하대학교 전자공학과 (공학사)  
 2013년 3월~현재: 인하대학교 전자공학과 석사과정  
 [주 관심분야] 마이크로파 수치해석, 전자파 산란 계산

### 고 일 석



1992년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학사)  
 1994년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학석사)  
 1996년 4월: LG전자 연구원  
 2004년 3월~2010년 3월: 인하대학교 정보통신대학원 교수

2010년 4월~현재: 인하대학교 전자공학과 교수  
 [주 관심분야] Theoretical Electromagnetics, Numerical Analysis, Wave Propagation through Complex Media

### 최 승 호



1996년 2월: 영남대학교 전자공학과 (공학사)  
 1998년 2월: 포항공과대학교 전자공학과 (공학석사)  
 1998년 2월~현재: 국방과학연구소  
 2008년 2월: 한국과학기술원 전자공학과 (공학박사)

[주 관심분야] Electronic Warfare, Electronic Attack, Wave Propagation, Numerical Analysis