

## 技術論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 43(1), 88-95(2015)

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2015.43.1.88>

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

## 액체 추진 로켓의 최적 연료 바이어스 산정 및 추진제 잔류량 분석

송은정\*, 조상범, 노웅래

## Optimal Selection of Fuel Bias and Propellant Residual Analysis of a Liquid Rocket

Eun-Jung Song\*, Sangbum Cho and Woong-Rae Roh

Launcher Systems Design Team, Korea Aerospace Research Institute

## ABSTRACT

This paper considers the effects of propellant mixture ratio and loading errors on the performance of a liquid rocket. Propellant residuals generated by error sources are analyzed for a launch vehicle model whose first stage consists of a cluster rocket of four 75-ton<sub>f</sub> class engines using a statistical Monte-Carlo approach and then the optimal fuel biases minimizing residuals are computed. The results are validated through comparison with analytic method using approximate formula, which have been applied for other space launch vehicles.

## 초 록

본 논문에서는 액체 엔진의 혼합비 오차와 추진제 탑재 오차가 성능에 미치는 영향에 대해서 분석하였다. 75톤급 엔진 4개를 클러스터링하는 발사체 모델에 대해 이런 오차에 의해 발생하는 추진제 잔류량을 확률적인 Monte-Carlo 방법을 사용하여 계산하고 잔류량을 최소화할 수 있는 최적 연료 바이어스를 도출하였다. 다른 발사체에 사용된 근사식을 사용한 해석적인 방법과 비교함으로써 얻어진 결과의 타당성을 검토하였다.

**Key Words** : Liquid Engine(액체 엔진), Residual Propellant(잔류 추진제), Mixture Ratio Error(혼합비 오차), Propellant Loading Error(추진제 탑재 오차), Fuel Bias(연료 바이어스)

## 1. 서 론

발사체에 사용되는 액체 추진 로켓은 이원 추진 로켓으로써 산화제와 연료가 각각 다른 탱크에 탑재되어 사용된다. 그런데 액체 엔진의 혼합비 오차가 발생하거나 산화제 및 연료의 충전 오

차가 있는 경우 엔진이 연소 종료된 후에도 사용 가능한 연료나 산화제가 매우 많이 남을 수 있으며, 이러한 추진제 잔류량은 구조 중량과 같은 특성을 가져 발사체의 성능 손실을 가져오게 된다. 즉, 발사체의 성능은 얻을 수 있는 최종 속도로 정량적으로 나타낼 수 있는데 하나의 추진제

† Received : May 20, 2014 Revised : December 21, 2014 Accepted : December 23, 2014

\* Corresponding author, E-mail : [ejsong@kari.re.kr](mailto:ejsong@kari.re.kr)

가 일찍 소진되어 다른 추진제가 남는 경우 이 추진제를 통해 속도는 더 얻지 못하면서도 발사체의 무게만 증가하여 성능이 저하되게 된다. 따라서 혼합비 오차나 추진제 탑재 오차에 의해 발생하는 잔류량을 최소화하는 것은 액체 엔진 발사체의 최대 성능을 얻기 위해 고려해야 하는 항목 중 하나이다.

이런 잔류량을 줄이기 위해 알려진 방법으로 첫 번째 방법은 계량 탑재 방식(calibrated system approach)으로 비행 전에 비행 중의 혼합비를 예측하여 탑재율을 조절하는 방법이다. 이 방법은 특별한 비행 하드웨어가 필요 없다는 점에서 간단하다는 장점이 있는 반면에, 연소되고 탑재되는 추진제 비율에 대해 충분히 정확히 예측해야 한다는 어려운 점이 있다. 두 번째 방법은 남은 연료와 산화제양을 주기적인 모니터링을 통해 두 추진제가 동시에 소진될 수 있도록 엔진 혼합비를 조절하는 방법이다. 이 방법은 비행중 산화제와 연료의 양을 계획하고, 엔진의 혼합비를 제어하는 역할을 하는 능동적인 추진제 혼합비 제어(propellant utilization, PU) 시스템을 발사체에 탑재해야 하며, 따라서 이 하드웨어로 인한 추가적인 비용과 복잡성이 발생한다는 단점이 있다. 그러나 계량 탑재 방식과는 달리 추진제 탑재량과 엔진 혼합비의 허용오차가 비교적 크더라도 적합한 성능을 얻을 수 있다는 장점이 있다[1].

두 번째 방법을 사용하는 경우에도 PU 시스템의 작동과 설계 요구 사항을 단순화 시키기 위해 계량 탑재 방식의 원리가 사용될 수 있기 때문에 계량 탑재 방식은 액체 로켓 설계 단계에서 분석되어야 한다.

따라서 본 논문에서는 첫 번째 방법을 주어진 발사체 모델에 적용하여 혼합비 오차와 추진제 탑재 오차에 의한 추진제 잔류량을 계산하고 이를 줄일 수 있는 연료 바이어스와 결과적인 추진제 활용 오차를 계산하였다. 참고문헌 [2]에서 제시한 방법과 같이 혼합비 오차율을 확률 변수로 두어 가우스 오차 함수를 사용하여 간단히 추진제 잔류량이 남거나 소진될 확률을 계산했으며, 발사체 설계에 많이 사용되는 몬테 칼로 분석 방법을 적용할 경우 얻어진 결과를 비교하였다[3]. 여기에 클러스터링 엔진의 경우 각 엔진을 독립적으로 다루는 경우와 1개의 큰 추력을 갖는 엔진으로 다룰 경우의 차이점에 대해서도 분석하였다.

## II. 추진제 잔류량 계산

추진제 잔류량은 산화제가 남을 경우와 연료

가 남을 경우에 따라 다음과 같이 계산할 수 있다. 혼합비 오차와 추진제 탑재 오차에 의해 연료가 먼저 소진되어 산화제가 남을 경우

$$m_{RES_o} = m_o + \delta m_o - MR(1 + \epsilon_{MR})(m_F + \delta m_F + m_{F,bias}) \quad (1)$$

여기서  $MR$ 은 혼합비(Mixture Ratio),  $\epsilon_{MR}$ 은 혼합비 오차율,  $m_{F,bias}$ 은 연료 바이어스,  $\delta m_o$ (산화제)와  $\delta m_F$ (연료)는 추진제 탑재 오차를 나타낸다.

그리고 산화제가 먼저 소진되어 연료가 남을 경우 잔류량은 다음과 같이 주어지게 된다.

$$m_{RES_f} = m_F + \delta m_F + m_{F,bias} - \frac{(m_o + \delta m_o)}{MR(1 + \epsilon_{MR})} \quad (2)$$

본 논문에서는 추진제 탑재 오차 영향을 보기 위해서 추진제 탑재 오차 유무에 따라 식 (1)과 (2)를 적용하여 추진제 잔류량을 계산해 보고 이로부터 추진제 활용 오차와 주어진 확률  $P=0.99865$ 하에 추진제 활용 오차를 최소화하는 연료 바이어스를 계산하였다. 여기서 확률  $P=0.99865$ 는 정규 분포에서  $3\sigma$ 에 속하는 부분과  $3\sigma$ 를 넘는 한쪽 부분에 대한 확률을 더한 확률에 해당한다.

이를 위해 몬테 칼로 방법을 사용할 경우  $\epsilon_{MR}$ ,  $\delta m_o$ ,  $\delta m_F$ 는 각각 독립적인 가우스 분포를 갖는 확률 변수로 가정하여 주어진 확률 분포에 대한 샘플을 충분히 발생시켜 주어진 잔류량  $R$ 이 발생할 확률, 산화제/연료가 소진될 확률 등을 계산하게 된다. 참고문헌 [2]에서 제시한 방법의 경우는 가우스 오차 함수를 사용해서 추진제 소진 확률 및 주어진 잔류량이 발생할 확률을 해석적으로 계산하게 된다. 다음 식은 간단히 혼합비 오차만 있는 경우 가우스 오차함수를 사용하여 잔류량이 발생할 확률을 계산하는 식을 나타낸다.

$$P(m_{RES} \leq R) = P(\epsilon_{MR} > x_c, m_{RES_f} \leq R) + P(\epsilon_{MR} < x_c, m_{RES_o} \leq R) \quad (3)$$

여기서

$$P(\epsilon_{MR} > x_c, 0 < m_{RES_f} \leq R) + P(\epsilon_{MR} < x_c, 0 < m_{RES_o} \leq R) \quad (4)$$

$$= P(x_c < \epsilon_{MR} \leq \frac{m_o}{MR(-R + m_F + m_{F,bias})} - 1) + P(\frac{m_o - R}{MR(m_F + m_{F,bias})} - 1 \leq \epsilon_{MR} < x_c)$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(\frac{m_O - R}{MR(m_F + m_{F.bias})} - 1 \leq \epsilon_{MR}\right) \\
&\leq \frac{m_o}{MR(-R + m_F + m_{F.bias})} - 1) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf}\left\{\frac{\frac{m_o}{MR(-R + m_F + m_{F.bias})} - 1}{(\sqrt{2}\sigma_{\epsilon_{MR}})}\right\} \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{erf}\left\{\frac{\frac{m_O - R}{MR(m_F + m_{F.bias})} - 1}{(\sqrt{2}\sigma_{\epsilon_{MR}})}\right\} \right]
\end{aligned}$$

이고  $x_c$ 는 잔류량이 0이 될 때의 혼합비 오차를 나타낸다. 참고로 가우스 오차 함수와 정규분포의 확률 밀도 함수는 각각 다음과 같다.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (5)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (6)$$

본 논문에서는 두 방법을 비교해봄으로써 새로이 시도된 몬테 카를로 방법의 타당성을 검토할 수 있을 것으로 보인다.

추진제 잔류량이 구체적으로 비행 성능에 미치는 영향을 파악하기 위해서 발사체의 대표적인 성능 지수 중 하나인  $\Delta V$ 에 대해 잔류량과의 관계를 다음과 같이 유도하였다. 속도 이득은 로켓 방정식을 사용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\Delta V = g_o I_{sp} \ln\left(\frac{m_s + m_F + \delta m_F + m_O + \delta m_O + m_{F.bias}}{m_s + m_{RES}}\right) \quad (7)$$

여기서  $m_s$ 는 건조중량을 나타낸다. 위 식으로 부터

$$\begin{aligned}
P(\Delta V \geq \Delta V_{\max}) \\
&= P(m_{RES} \leq (m_s + m_F + \delta m_F + m_O + \delta m_O + m_{F.bias}) \cdot \\
&\quad \exp(-\frac{\Delta V_{\max}}{g_o I_{sp}}) - m_s) \quad (8)
\end{aligned}$$

따라서,

$R = (m_s + m_F + m_O + m_{F.bias}) \exp(-\frac{\Delta V_{\max}}{g_o I_{sp}}) - m_s$ 로 둬므로써 잔류량에 대한 확률과 같이 계산할 수 있게 된다.

### III. 최적 연료바이어스 계산

연료 바이어스는 더 많이 남을 가능성이 높은 산화제 잔류량을 일정 수준으로 줄일 수 있도록 추가로 탑재하는 연료량이다. Fig. 1은 혼합비 오차만 있는 경우에 대해 연료 바이어스를 사용하

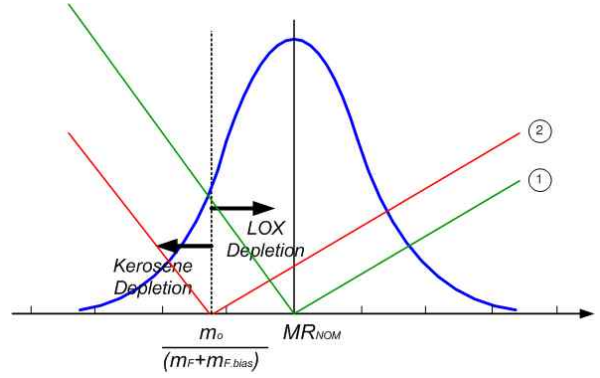


Fig. 1. Propellant depletion probability with mixture ratio error : ① without fuel bias, ② with fuel bias

여 더 무거운 추진제인 산화제 잔류량이 발생할 확률을 줄일 수 있음을 나타낸다. 최적의 연료 바이어스는 주어진 확률 수준에서 잔류추진제를 최소화할 수 있는 추가 탑재 연료량으로 본 논문에서 정의하였다. 참고문헌 [2, 4]에서는 잔류량이 주어진 값을 넘지 않을 확률을 최대화하거나 주어진 사거리를 넘을 확률을 최소화 하도록 연료 바이어스를 설정하기도 했다. 참고문헌 [1]에서는 평균 0의 정규 분포를 갖는 혼합비 오차만을 고려할 경우 이 값을 해석적으로 근사식을 사용하여 유도하기도 했다. 본 절에서는 이 과정을 요약하여 기술하고 탑재 오차가 있는 경우에 대해서도 다루었다.

### 3.1 혼합비 오차만 있는 경우

혼합비 오차만 있는 경우 잔류량은 식 (1)과 (2)를 사용하여 다음과 같은 근사식으로 나타낼 수 있다.

$$m_{RES_F} = m_F + m_{F.bias} - \frac{m_o}{MR(1 + \epsilon_{MR})} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
&\approx m_F + m_{F.bias} - \frac{m_o}{MR}(1 - \epsilon_{MR}) = m_F \epsilon_{MR} + m_{F.bias} \\
&= s_f x + m_{F.bias}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{RES_o} &= m_O - MR(1 + \epsilon_{MR})(m_F + m_{F.bias}) \quad (10) \\
&\approx -MR m_F \epsilon_{MR} - MR m_{F.bias} = -s_f x - MR m_{F.bias}
\end{aligned}$$

여기서  $x$ 는 표준정규분포를 갖는 확률 변수이고  $s_f$ 는  $m_F \epsilon_{MR} = s_f x$  관계가 성립하도록 도입된 상수이다. 식 (9)와 (10)을 사용하여 잔류량이  $R$ 이 될 확률은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{(R - m_{F.bias})}{(R + MR m_{F.bias}) - MR s_f} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = P \quad (11)$$

따라서 주어진 확률 수준  $P$ 에서 최적 연료 바이어스 위 식에서  $R$ 을 최소화하는  $m_{F.bias}$ 가 된다.

즉,

$$\frac{dR}{dm_{F.bias}} = 0 \quad (12)$$

Leibniz 적분 법칙을 사용하여 위 방정식을 풀면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{s_f} \left( \frac{dR}{dm_{F.bias}} - 1 \right) \right]_{x = \frac{(R-m_{F.bias})}{s_f}} \quad (13) \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{x^2}{2}} \left( -\frac{1}{MRs_f} \right) \left( \frac{dR}{dm_{F.bias}} + MR \right) \right]_{\frac{(R+MRm_{F.bias})}{-MRs_f}} \\ & - \int \frac{(R-m_{F.bias})}{(R+MRm_{F.bias})} \frac{d \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right)}{-MRs_f} dx = \frac{dK}{dm_{F.bias}} = 0 \\ & R = \frac{2MR}{MR-1} m_{F.bias} \quad (14) \end{aligned}$$

식 (14)를 식 (11)에 대입하면

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{(MR+1)}{(MR-1)} \frac{m_{F.bias}}{s_f} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = P \quad (15)$$

$x$ 가 대칭의 확률 밀도 함수를 가지므로

$$\int_{-x}^x p(x) dx = 2 \int_{-\infty}^x p(x) dx - 1 \quad (16)$$

식 (15)에 식 (16)을 적용하면

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{(MR+1)}{(MR-1)} \frac{m_{F.bias}}{s_f} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{K+1}{2} \quad (17)$$

$x$ 는 표준 정규 분포를 가지므로

$$m_{F.bias}^* = \frac{(MR-1)s_f \sigma \frac{K+1}{2}}{(MR+1)} \quad (18)$$

여기서  $\sigma \frac{K+1}{2}$ 는 다음 표와 같이 확률 수준  $K$ 일 때

$\sigma$ 수준을 나타낸다.

따라서  $3\sigma$ 인 경우

$$m_{F.bias}^* = \frac{3(MR-1)s_f}{(MR+1)} \quad (19)$$

직관적으로 이 값은 확률을 최대화 시킬 수 있도록  $x = \pm 3$ 일 때 잔류추진제를 같게 됨으로써 계산

Table 1. Probability level [1]

| 확률 값 K | $\sigma \frac{K+1}{2}$ |
|--------|------------------------|
| 0.0    | 0                      |
| 0.6826 | 1                      |
| 0.9544 | 2                      |
| 0.9974 | 3                      |

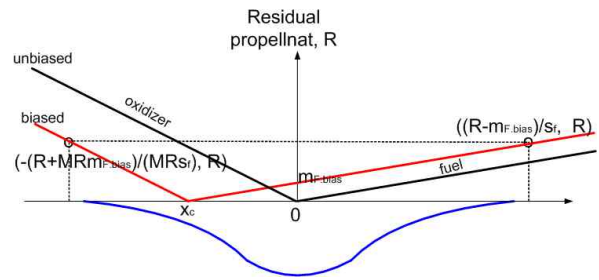


Fig. 2. Residual by mixture ratio error [1]

할 수 있음을 알 수 있다 (moment balance 방법). 위 식들을 그림으로 나타내면 Fig. 2와 같다.

최적 연료 바이어스는 공칭 혼합비 기준으로  $-x_c$  만큼 산화제와 연료 탑재비를 줄이는 것으로 예를 들어 혼합비 2.2의 경우  $x_c = -1.125$ 로써 혼합비의  $3\sigma$  오차가 2%인 경우 연료를 증가시켜 탑재하여 탑재비는 0.74(%) 줄어든 2.1836이 된다. 식 (9), (10)과 같이 근사식을 사용하지 않고 식 (1)과 (2)를 사용할 경우에는 다음과 같이 최적 연료바이어스가 얻어진다.

$$m_{F.bias}^* = \frac{(MR \cdot 3\sigma_{MR} - 1)m_F + \frac{m_O}{MR(1+3\sigma_{MR})}}{1 + MR(1-3\sigma_{MR})} \quad (20)$$

### 3.2 혼합비 오차와 추진제 탑재 오차가 모두 있는 경우

혼합비 오차 뿐만 아니라 산화제와 연료 탑재 오차가 있는 경우도 이와 비슷한 방법으로 최적 연료 바이어스를 다음과 같이 근사적으로 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(m_{RES} \leq R) &= P(0 \leq m_{RES_f} \leq R) \\ &+ P(0 \leq m_{RES_o} \leq R) \quad (21) \end{aligned}$$

여기서

$$P(0 \leq m_{RES} \leq R) = \quad (22)$$

$$P(0 \leq m_O + \delta m_O - MR(1 + \epsilon_{MR})(m_F + \delta m_F + m_{F.bias}) \leq R)$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(-m_{F,bias} - \frac{R}{MR} \leq \delta m_F - \frac{\delta m_O}{MR} + (m_F + m_{F,bias})\epsilon_{MR} \leq -m_{F,bias}\right) \\
&\approx P\left(-m_{F,bias} - \frac{R}{MR} \leq \delta m_F - \frac{\delta m_O}{MR} + m_F\epsilon_{MR} \leq -m_{F,bias}\right) \\
&P(0 \leq m_{RES_F} \leq R) \\
&\approx P\left(-m_{F,bias} \leq \delta m_F - \frac{\delta m_O}{MR} + m_F\epsilon_{MR} \leq R - m_{F,bias}\right)
\end{aligned} \quad (23)$$

식 (22)와 (23)으로부터

$$\begin{aligned}
&P(m_{RES} \leq R) \\
&\approx P\left(-m_{F,bias} - \frac{R}{MR} \leq \delta m_F - \frac{\delta m_O}{MR} + m_F\epsilon_{MR} \leq R - m_{F,bias}\right) \\
&= P\left(\frac{-m_{F,bias} - \frac{R}{MR}}{\sigma_{all}} \leq \frac{\delta m_F - \frac{\delta m_O}{MR} + m_F\epsilon_{MR}}{\sigma_{all}} \leq \frac{R - m_{F,bias}}{\sigma_{all}}\right)
\end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{여기서 } \sigma_{all}^2 = \sigma_{PL_F}^2 + \frac{\sigma_{PL_O}^2}{MR^2} + m_F^2 \sigma_{MR}^2$$

$$\text{따라서 새로운 확률 변수 } Z = \frac{\delta m_F - \frac{\delta m_O}{MR} + m_F\epsilon_{MR}}{\sigma_{all}}$$

로 두면  $Z$ 는 표준정규분포를 가지게 되고 식 (24)는 식 (11)에서  $s_f$  대신  $\sigma_{all}$ 을 대입하면 같은 식이 됨을 알 수 있다. 즉 주어진 확률 수준  $P$ 에서 최적 연료 바이어스는 식 (14)와 같은 관계가 얻어지게 되고 확률 수준이 주어질 경우 다음과 같이 연료 바이어스를 계산하면 된다.

$$m_{F,bias}^* = \frac{(MR-1)\sigma_{all}\sigma_{K+1}}{(MR+1)} \quad (25)$$

#### IV. 클러스터링 엔진 혼합비 오차 분석

본 절에서는 주어진 단을 동일한 여러 개의 엔진으로 클러스터링할 경우 혼합비 오차율이 어떻게 변하는지 유도하였다. 여러 엔진들은 하나의 산화제 및 연료 탱크를 공통으로 사용하는 경우를 다루었다. 먼저 간단하게 엔진 2개를 클러스터링하는 경우를 살펴보면 다음과 같다. 여기서 아래 첨자의 숫자는 각 엔진을 나타낸다. 연료 바이어스와 추진제 탑재 오차가 없는 경우 두 엔진의 영향을 각각 고려하면

$$\begin{aligned}
m_{RES_o} &= m_{O_1} + m_{O_2} - MR(1 + \epsilon_{MR_1})m_{F_1} \\
&\quad - MR(1 + \epsilon_{MR_2})m_{F_2}
\end{aligned} \quad (26)$$

$$m_{RES_F} = m_{F_1} + m_{F_2} - \frac{m_{O_1}}{MR(1 + \epsilon_{MR_1})} - \frac{m_{O_2}}{MR(1 + \epsilon_{MR_2})} \quad (27)$$

$$m_O = m_{O_1} + m_{O_2} \quad (28)$$

$$m_F = m_{F_1} + m_{F_2} \quad (29)$$

$m_{RES_o} > 0$  인 경우

$$\frac{(m_o - m_{RES_o})}{m_F} = MR(1 + \epsilon_{MR_{stg}}) \quad (30)$$

$m_{RES_F} > 0$  인 경우

$$\frac{m_o}{(m_F - m_{RES_F})} = MR(1 + \epsilon_{MR_{stg}}) \quad (31)$$

산화제가 남는 경우 식 (26)을 식 (30)에 대입하여 정리하면

$$\epsilon_{MR_{stg}} = \frac{\epsilon_{MR_1}m_{F_1} + \epsilon_{MR_2}m_{F_2}}{m_{F_1} + m_{F_2}} \quad (32)$$

연료가 남는 경우 식 (27)을 식 (31)에 대입하여 정리하면

$$1 + \epsilon_{MR_{stg}} = \frac{m_o}{\frac{m_{O_1}}{1 + \epsilon_{MR_1}} + \frac{m_{O_2}}{1 + \epsilon_{MR_2}}} \quad (33)$$

$|\epsilon_{MR_{stg}}| \ll 1$ ,  $|\epsilon_{MR_1}| \ll 1$ ,  $|\epsilon_{MR_2}| \ll 1$  이므로

$$\epsilon_{MR_{stg}} \approx \frac{m_{O_1}\epsilon_{MR_1} + m_{O_2}\epsilon_{MR_2}}{m_o} \quad (34)$$

식 (32)와 (34)에서 각 엔진이 nominal 조건에서 동일하다고 두면

$$\epsilon_{MR_{stg}} \approx \frac{\epsilon_{MR_1} + \epsilon_{MR_2}}{2} \quad (35)$$

$N$ 개의 엔진에 대해서도 마찬가지로

$$\epsilon_{MR_{stg}} \approx \frac{\sum_{k=1}^N \epsilon_{MR_k}}{N} \quad (36)$$

따라서 주어진 단의 혼합비 오차율의 표준 편차는 하나의 엔진 혼합비 오차율과 다음과 같은 관계를 갖게 된다.

$$\sigma(\epsilon_{MR_{stg}}) \approx \frac{\sigma(\epsilon_{MR_k})}{\sqrt{N}} \quad (37)$$

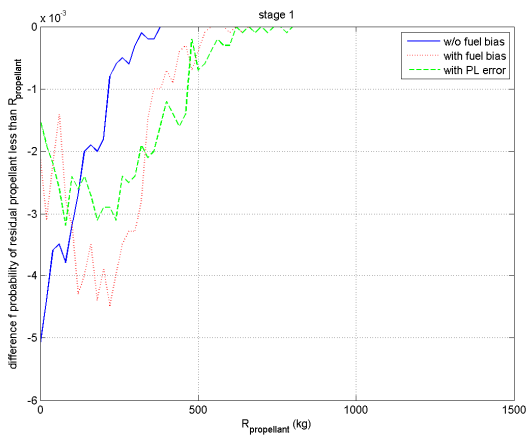


Fig. 3. Difference of probability of residual propellant less than  $R_{propellant}$

연료 바이어스나 추진제 탑재 오차가 있는 경우도 각 엔진에 동일하게 연료 바이어스와 추진제 탑재 오차가 있다고 두면 식 (35)와 같은 결과를 얻을 수 있다.

위 근사식의 영향을 알아보기 위해 평균 혼합비를 사용하는 경우와 그렇지 않은 경우 다음과 같은 경우에 대해 수치적으로 잔류량이 발생할 확률을 비교하였다. Fig. 3은 본 논문에서 다루는 75톤급 4개의 엔진을 클러스터링 한 경우에 대해 이틀 식 (37)과 같이 4개 엔진을 하나의 큰 엔진으로 다루는 경우와 각각 독립적인 엔진으로 두는 경우 다음과 같은 3가지 경우에 대해 차이를 계산한 결과를 나타낸다.

- ① 연료 바이어스가 없는 경우
- ② 연료 바이어스가 있는 경우
- ③ 연료 바이어스와 추진제 탑재 오차가 있는 경우

간단히 하나의 엔진으로 근사한 경우 독립적으로 다루는 경우와 차이가 매우 적음을 알 수 있으며 평균 혼합비를 사용할 경우 더 보수적인 결과를 보여줌을 알 수 있다.

### V. 수치결과

본 절에서는 1단에 75톤급 엔진 4개를 클러스터링한 발사체 모델에 대해 혼합비 및 추진제 탑재 오차 영향을 분석한 결과를 다루었다. 75톤급 엔진의 3 $\sigma$  혼합비 오차율을 2(%)로 설정하면, 4개로 클러스터링하여 사용할 경우 단 혼합비 오차는 식 (37)에 의해 1(%)가 된다. 그리고 발사전 추진제 충전 오차는 산화제의 경우 0.63(%) , 연료의 경우

0.62(%)로 설정하였다.

Figure 4와 5는 연료 바이어스 값에 따른 잔류량 변화를 나타낸다. 연료 바이어스가 증가함에 따라 잔류량이 감소하다가 어느 수준에서는 다시 증가하는 특성을 가짐을 알 수 있으며 여기서 최소의 잔류량을 보이는 연료 바이어스가 최적 연료 바이어스가 된다. Table 2는 잔류량이 최소화되는 최적 연료 바이어스 조건에서의 잔류량, 추진제 활용도, 속도 증분 변화, 산화제 및 연료 소진 확률 특성을 나타낸다. 최적 연료 바이어스의 'Analytic'은 식 (18)을 사용한 경우를 'Approximation'은 식 (17)과 (23)을 각 경우에 대해서 각각 사용하여 계산할 경우 얻어진 값을 나타낸다. 몬테 칼로 방법의 경우는 앞에서 기술했듯이 연료 바이어스 변화에 대해 추진제 활용 오차를 계산하여 이 중 가장 적은 오차를 나타내는 경우를 선택하였다. 주어

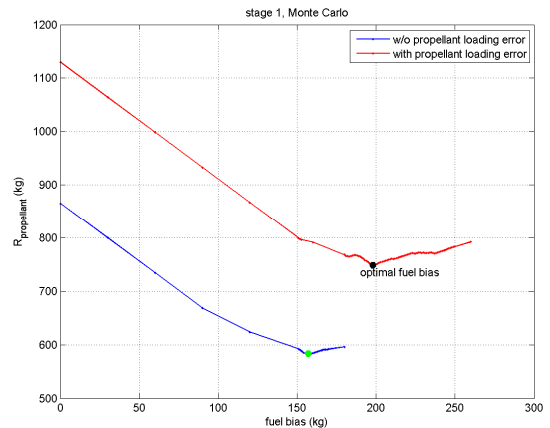


Fig. 4. Effect of fuel bias to residual with  $P=0.99865$  : Monte Carlo method

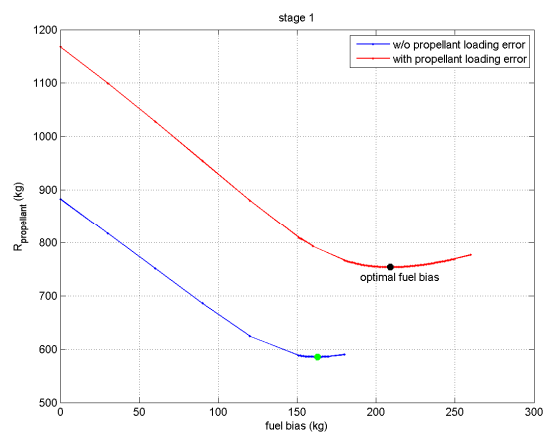


Fig. 5. Effect of fuel bias to residual with  $P=0.99865$  : Approximation using Gauss error function

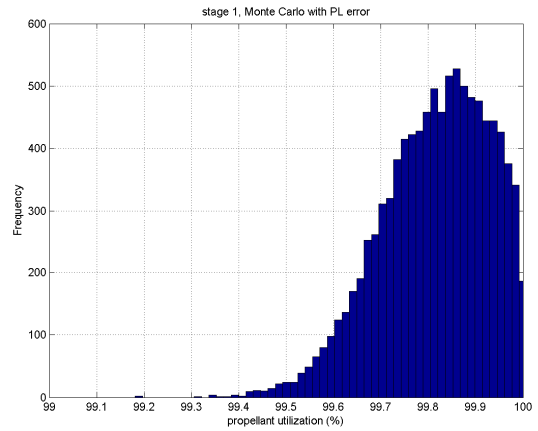
**Table 2. Analysis results of mixture ratio and propellant loading errors of Stage 1**

|  |                   |
|--|-------------------|
| ① with only mixture ratio error                  |                   |
| Optimal fuel bias (kg)                           |                   |
| Analytic (Approximation) Monte Carlo             |                   |
| 152.82 (150.51)                                  | 157.00            |
| Depletion probability (P=0.99865)                |                   |
| Fuel depletion (%)                               | LOX depletion (%) |
| 12.18( 12.02)                                    | 87.82( 87.98)     |
| Residual (kg)                                    |                   |
| P=0.99865  | 3sigma            |
| 583.50(586.28)                                   | 412.70(412.70)    |
| Propellant utilization (%)                       |                   |
| P=0.99865  | 3sigma            |
| 99.54(99.54)                                     | 0.32(0.32)        |
| Delta V variation (m/s)                          |                   |
| P=0.99865  | 3sigma            |
| -19.03(-18.79)                                   | 18.39(18.16)      |
| ② with mixture ratio & propellant loading errors |                   |
| Optimal fuel bias (kg)                           |                   |
| Monte Carlo (Approximation)                      |                   |
| 198.00 (200.88)                                  |                   |
| Depletion probability (P=0.99865)                |                   |
| Fuel depletion (%)                               | LOX depletion (%) |
| 13.39  | 86.61             |
| Residual (kg)                                    |                   |
| P=0.99865  | 3sigma            |
| 748.75   | 529.31            |
| Propellant utilization (%)                       |                   |
| P=0.99865  | 3sigma            |
| 99.42  | 0.41              |
| Delta V variation (m/s)                          |                   |
| P=0.99865  | 3sigma            |
| -28.07   | 26.00             |

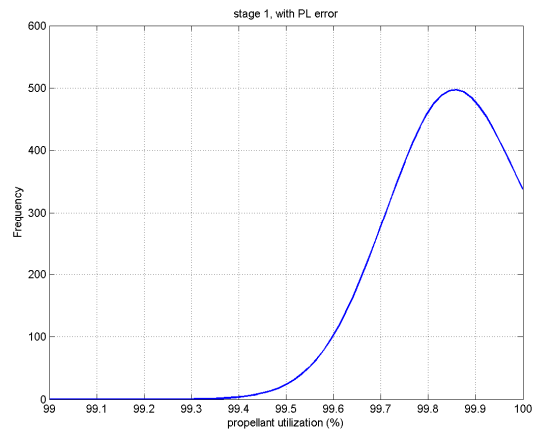
진 연료 바이어스마다 10000개의 샘플을 사용하여 계산했다. 연료 바이어스는 추진제 활용 오차를 적게 보이는 경우에 대해서 1 (kg) 단위로 촘촘히 연료 바이어스를 바꾸어 가며 추진제 활용 오차를 계산해 최적의 연료 바이어스를 찾았다. 추진제 활용 오차는 다음과 같이 정의했으며 잔류량 계산 결과를 사용하여 계산할 수 있게 된다.

$$\epsilon_{util} = - \frac{m_{RES}}{m_o + m_F + m_{Fbias}} \quad (38)$$

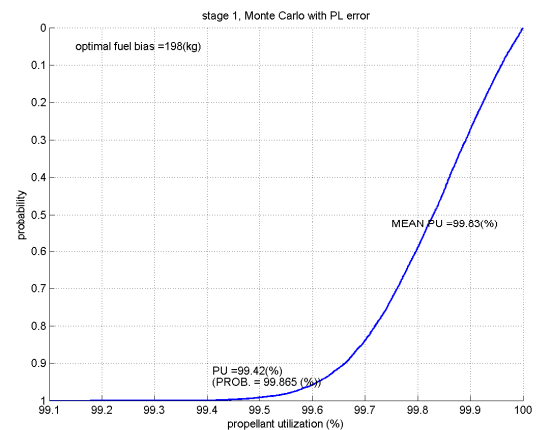
그리고 표의 추진제 활용 오차의 3σ 값은 P=0.99865 일 때의 추진제 활용 확률에서 P=0.5 일 때의 추진제 활용 확률을 뺀 값으로 정의하



**Fig. 6. Distribution of propellant utilization : Monte Carlo method**



**Fig. 7. Distribution of propellant utilization : Approximation using Gauss error function**



**Fig. 8. Propellant utilization probability using optimal fuel bias : Monte Carlo method**

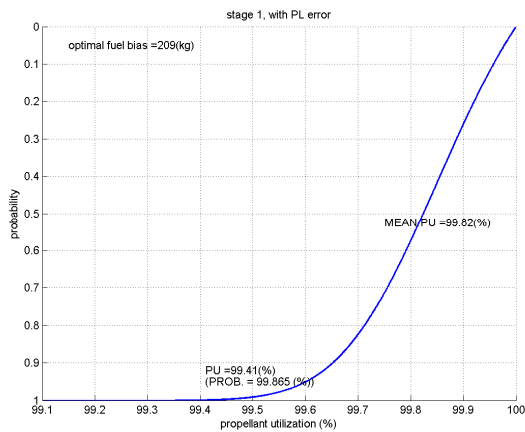


Fig. 9. Propellant utilization probability using optimal fuel bias : Approximation using Gauss error function

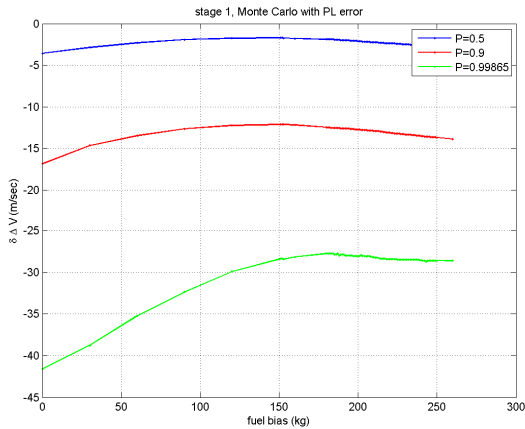


Fig. 10. Effect of fuel bias to the change of the velocity to be gained : Monte Carlo method

였다.

혼합비 오차만 있는 경우 해석적 방법과 몬테 칼로 방법을 비교하면 비슷한 결과를 보여줌을 알 수 있어 몬테 칼로 방법이 타당함을 확인할 수 있다. 최적 연료 바이어스를 사용할 경우 연료 소진 확률은 12.2%가 되고 산화제 소진 확률은 87.80%가 되어 대부분의 비행에서 산화제가 먼저 소진될 가능성이 매우 높게 나타남을 알 수 있다.

추진제 탑재 오차까지 고려한 경우도 Fig. 4~9를 통해서도 몬테 칼로 방법과 근사식을 사용한 해석적 방법이 비슷한 결과를 보여줌을 알 수 있다. 표 2를 보면 이 경우 혼합비 오차만 있는 경우에 비해 연료 바이어스는 약 3% 증가됨을 알 수 있고

잔류량도 증가하여 99.4% 이상의 추진제 활용도를 가짐을 알 수 있다. 또한 이러한 활용도에 의해 Nominal 조건에 비해 속도증분손실은 최대 28(m/s) 발생하게 된다. 이런 잔류량에 의한  $\Delta V$  변화로부터 비행성능이 어떻게 영향을 받는지 알 수 있으며 이 값은 Fig. 10으로부터 연료 바이어스가 없는 경우에 비해 약 13(m/s) 속도 손실이 적은 값으로 최적 연료 바이어스를 추가로 탑재함으로써 비행 성능이 개선됨을 알 수 있다.

## VI. 결 론

본 논문에서는 4개의 엔진을 클러스터링한 발사체 모델에 대해서 엔진의 혼합비 오차와 추진제 탑재 오차가 있을 때 해석적 방법과 몬테 칼로 방법을 사용하여 잔류량 특성을 분석하였다. 다양한 연료 바이어스에 대한 추진제 활용 확률을 계산하여 최적 연료 바이어스를 계산하였다. 얻어진 최적 연료 바이어스는 사용 연료량의 0.5(%) 수준, 평균 추진제 활용 확률은 99.8(%), 잔류량의 3 $\sigma$  최대 변동은 전체 사용 추진제량의 0.4(%) 수준으로 얻어졌다. 여기서 계산된 최적 연료 바이어스를 사용하면 추진제 활용 확률은 추진제 탑재 오차가 있는 경우도 99.42(%)로 요구 규격을 만족시킬 수 있음을 확인하였다.

## References

- 1) Africano, R. and Logdson, T., "Enhancing the Saturn V translunar payload capability," AIAA 69-451.
- 2) Abrams, I. J. and Scheuer, E. M., "Optimum selection of fuel bias for maximizing the range and for minimizing the residual propellant of the Thor, Atlas and Titan missiles, Planetary and Space Science," vol. 4, No. 1, 1961, pp.34~44.
- 3) Hanson, M. and Beard, B. B., "Applying Monte Carlo Simulation to Launch Vehicle Design and Requirements Analysis," NASA/TP-2010-216447.
- 4) LeGalley, D. P., "Guidance, Navigation, Tracking, and Space Physics," Vol. III of Ballistic Missile and Space Technology, Academic Press, 1960.