

<학술논문>

DOI <http://dx.doi.org/10.3795/KSME-B.2015.39.1.079>

ISSN 1226-4881(Print)  
2288-5324(Online)

## 종횡비에 따른 공동형상 내부에서의 혼합특성에 관한 수치적 연구

신명섭\* · 양승덕\*\* · 윤준용\*\*\*

\* 동양미래대학교 기계공학부, \*\* 한양대학교 기계공학과

### Numerical Investigation of Mixing Characteristics in Cavity Flow at Various Aspect Ratios

Myung Seob Shin\*, Seung Deok Yang\*\* and Joon Yong Yoon\*\*\*

\* School of Mechanical Engineering, Dongyang Mirae Univ.,

\*\* Dept. of Mechanical Engineering, Hanyang Univ.

(Received July 24, 2014 ; Revised September 26, 2014 ; Accepted September 30, 2014)

**Key Words:** Hybrid Lattice Boltzmann Method(혼성 격자볼츠만 방법), Rectangular cavity flow(직사각 공동형상 유동), Mixing characteristics(혼합특성)

**초록:** 본 연구에서는 유한차분법(FDM)을 적용한 혼성 격자볼츠만 방법(HLBM)을 이용하여 직사각 형태를 갖는 공동형상 내 혼합특성에 대하여 수치적으로 연구하였다. 유동장은 다중 완화시간을 적용한 격자볼츠만 방법(LB-MRT)을 사용하였으며, 농도장은 두 물질의 질량은 같고 두 물질 사이의 상호작용이 없다고 가정한 Passive Scalar 방법을 사용하였다. 먼저, 정사각형과 종횡비가 2인 직사각형의 공동형상 내 유동해석 결과를 기존의 신뢰성 있는 연구결과와 비교하여 HLBM의 신뢰성을 검토하였다. 이를 토대로 다양한 종횡비를 갖는 공동형상에서 Pe수를 변화시키며 공동형상 내부에서의 혼합특성과 물질전달 형태에 대하여 파악하였다.

**Abstract:** This study numerically examined the mixing characteristics of rectangular cavity flows by using the hybrid lattice Boltzmann method (HLBM) applied to the finite difference method (FDM). Multi-relaxation time was used along with a passive scalar method which assumes that two substances have the same mass and that there is no interaction. First, we studied numerical results such as the stream function, position of vortices, and velocity profile for a square cavity and rectangular cavity with an aspect ratio of 2. The data were compared with previous numerical results that have been proven to be reliable. We also studied the mixing characteristics of a rectangular cavity flow such as the concentration profile and average Sherwood number at various Pe numbers and aspect ratios.

### 1. 서론

상판이 움직이는 2차원 공동형상에 대한 유동학적 연구는 지난 수십 년 동안 여러 공학 분야에서 수치적, 실험적으로 진행되어 왔다. 공동형상에 대한 수치해석적 연구는 Burggraf<sup>(1)</sup>와 Pan and Acrivos<sup>(2)</sup>의 연구를 시작으로 Ghia 등,<sup>(3)</sup> Shankar and Deshpande<sup>(4)</sup> 등 각종 수치해법의 해

석 정확도 및 정밀도를 평가하기 위한 척도로 사용되고 있으며, 현재도 각종 수치해석 방법의 검증 모델로 널리 사용되고 있다. 또한 종횡비와 Re수의 변화에 따른 공동형상 내부의 유동현상에 대한 연구도 Mehta and Lavan,<sup>(5)</sup> Shen and Floryan<sup>(6)</sup> 등 많은 연구자들을 통하여 진행되어 왔다. 공동형상은 기하학적으로 매우 단순한 형태를 가지고 있지만 공학의 관심이 되는 여러 분야에 적용되고 있기 때문에 쉽게 접할 수 있다. 공동형상에 대한 연구는 Re수의 변화에 따른 공동형상 내부

† Corresponding Author, joyoon@hanyang.ac.kr

© 2015 The Korean Society of Mechanical Engineers

의 주 와동의 위치와 2차, 3차로 발생하는 추가적인 와동의 위치 및 생성여부 등 공동형상의 내부유동에 관한 연구들이 주를 이루고 있으며, 최근에 물질전달 및 열전달 분야로 영역이 확대되고 있다.

서로 다른 유체간의 혼합 혹은 분산은 구조체의 형상변화로 인하여 유체의 흐름이 변화하면서 발생하는 수동적인 혼합과 교반기를 이용하여 강제적으로 유동의 변화를 발생시키는 능동적인 혼합으로 나눌 수 있다. 특히 공동형상과 같은 기하학적으로 단순한 형상을 이용하여 혼합을 발생시키는 방법은 제작뿐만 아니라 설치 및 유지관리가 편리하기 때문에 많은 연구가 진행되고 있으며, 산업분야에서도 널리 응용되고 있다. Alkire 등<sup>(7)</sup>과 Occhialini and Higdon<sup>(8)</sup>은 공동형상 내부에서의 물질분포에 대하여 수치적, 실험적으로 연구하였으며, Trevelyan 등<sup>(9)</sup>은 공동형상에서 발생하는 주 와동을 이용하여 회전에 의해 혼합과 반응을 향상하기 위한 특성에 대하여 연구하였다. 또한, Shin 등<sup>(10)</sup>은 정사각형 공동형상 내부에서의 혼합특성과 물질전달 형태에 대하여 연구하였으며, 상부면의 확산 경계층 두께가  $Pe^{-1/2}$ 을 나타내는 것을 보고하였다.

일반적으로 기존의 전산유체역학(Computational Fluid Dynamics, CFD)은 연속체 가정에 기반을 둔 지배방정식을 이용하여 유동형태를 모사하였다. 그러나 본 연구에서 사용되어진 격자볼츠만 방법(lattice Boltzmann method, LBM)은 운동학 이론(kinetic theory)을 기반으로 하는 볼츠만 방정식을 이용하여 유체입자의 확률분포 변화를 통해 유동을 모사하는 수치해석 방법이다. LBM을 이용한 수치해석은 미소유동(micro-flow),<sup>(11)</sup> 다공물질(porous medium) 내부와 다상유동(multi-phase flow), 난류에서의 오염물질 확산<sup>(12)</sup> 등과 같은 복합적인 유동(complex flow)<sup>(13)</sup> 분야까지 널리 적용되고 있다.

LBM을 이용하여 농도장을 해석하기 위한 모델로는 McNamara and Alder<sup>(14)</sup>에 의해 제안된 다중-속도(multi-speed) 모델, Shan<sup>(15)</sup>에 의해 제안된 수동 스칼라(passive scalar) 모델 등 많은 수치모델이 존재한다. 그러나 위의 모델들은 수치적으로 불안정하여 해석 범위가 작거나, 추가적인 입자 분포함수가 필요하기 때문에 필연적으로 컴퓨팅 파워가 증가하게 되는 단점이 존재한다. 이러한

단점을 보완하기 위하여 유동장 해석은 LB-SRT 모델을 이용하고 농도장 해석은 유한차분법(finite differential method, FDM)을 적용한 혼성 격자볼츠만 방법(Hybrid LBM, HLBM)이 Lallemand and Luo<sup>(16)</sup>에 의해 제안되었다.

본 연구에서는 1이상의 종횡비를 갖는 직사각형 형태의 공동형상에서 발생하는 혼합 및 물질전달 현상에 대하여 수치적으로 연구하였다. 먼저, 종횡비가 1인(정사각형) 형태와 2인 형태의 공동형상에서 기존의 신뢰성 있는 유동장 결과와의 비교를 통하여 본 연구의 신뢰성을 검증하였다. 그리고 종횡비가 1이상인 직사각 형태의 공동형상의 내부 유동을 수치 계산하여 나타내었으며, 혼성격자볼츠만 방법(HLBM)을 이용하여 직사각형 공동형상에서의 내부 농도장을 수치 해석하여 공동형상 내부의 혼합양상과 물질 전달 형태를 파악하였다.

## 2. 격자 볼츠만 방법(LBM)

### 2.1 다중 완화시간을 적용한 격자볼츠만 방법

일반적으로 2차원인 경우, LBM에서는 Bhatnagar 등<sup>(17)</sup>이 제안한 단일 완화시간(single relaxation time, SRT)을 적용한 LB-SRT D2Q9 모델이 널리 사용된다. 이러한 단일 완화시간으로 충돌항을 단순화한 기존의 LB-SRT 모델은 단순하고 적용이 용이하다는 장점을 가지고 있어 현재에도 대부분의 LBM 해석에 이용되고 있다. 그러나 높은 Re수의 유동해석과 급격하게 큰 구배를 보이는 영역인 정체점(stagnation point)과 날카로운 코너(sharp convex corner)와 같은 형상적으로 특이점인 영역의 유동해석에서는 수치해가 진동(spatial oscillations)하는 현상에 의하여 수치적인 안정성이 떨어지는 단점을 갖고 있다.<sup>(18)</sup>

이러한 LB-SRT 모델의 단점을 보완하기 위하여 각 유동 현상에 따라 각각의 다른 완화시간을 적용시켜주는 다중 완화시간(multi relaxation time, LB-MRT) 모델이 d'Humieres<sup>(19)</sup>에 의하여 제안되었다.

d'Humieres은 거시적인 물리량의 새로운 변수  $\bar{R}$ 과 입자 분포함수  $\bar{F}$ 를 2차원인 경우인 D2Q9 모델에 대하여 다음과 같이 정의하였다.

$$\bar{R} = (\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy})^T \quad (1)$$

$$\bar{F} = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8)^T \quad (2)$$

여기서 행렬  $\bar{R}$  에서의  $\rho$ 는 유체 밀도,  $e$ 는 에너지,  $\epsilon$ 는 에너지의 제곱,  $j_x$ 와  $j_y$ 는 x, y 방향의 질량 유속(또는 운동량 밀도),  $q_x$ 와  $q_y$ 는 x, y 방향의 에너지 유속(flux),  $p_{xx}$ 와  $p_{xy}$ 는 각 전단응력 텐서(viscous shear stress)의 대각(diagonal)과 비대각(off-diagonal) 요소들을 나타낸다.

$\bar{R}$ 과  $\bar{F}$ 는 행렬식  $\bar{M}$ 을 사용하여 다음과 같은 관계를 갖고 있다.

$$\bar{R} = \bar{M}\bar{F} \quad (3)$$

여기서  $\bar{M}$ 은 분포함수를 식 (1)과 같은 9개의 모멘트 성분으로 구성시켜주는  $9 \times 9$  행렬식이며, 다음과 같이 나타낸다.

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

LB-MRT 모델은 거시적인 물리량들을 식 (3) 처럼  $\bar{M}\bar{F}$ 의 단순한 행렬식 곱으로 나타내며, 입자 충돌 전·후의 질량과 운동량 보존은 각 lattice 에서 국부적으로 보존이 된다. LB-MRT 모델도 LB-SRT 모델과 같은 두 가지 과정(충돌과 이류)을 수행한다. LB-MRT 모델은 다음과 같은 충돌(collision) 과정을 수행한다.

$$\bar{R}^* = \bar{R} - \bar{S}(\bar{R} - \bar{R}^{eq}) \quad (5)$$

여기서 ‘\*’는 충돌 후의 상태임을 나타내며,  $\bar{S}$ 는 LB-MRT 모델의 완화계수들로서  $9 \times 9$  대각 행렬식이고, 충돌 전·후의 질량 보존과 운동량 보존을 위해서는  $\bar{S}$ 의 요소 중  $s_0 = s_3 = s_5 = 0$ 이어야 한다.

$$\bar{S} = \text{diag}(0, s_1, s_2, 0, s_4, 0, s_6, s_7, s_8) \quad (6)$$

여기서  $s_7 = s_8 = 1/\tau$  로서 LB-SRT 모델의 유체 동점성 계수( $\nu$ )와 같으며, 나머지  $s_1, s_2, s_4, s_6$ 는 각 물리적 현상에 따라 0과 2 사이의 값으

로 선택한다. 만약  $s_1 = s_2 = s_4 = s_6 = s_7 = s_8 = 1/\tau$  이면, 간단하게 LB-MRT 모델을 LB-SRT 모델로 변환할 수 있다.

식 (5)에서의 평형상태  $\bar{R}^{eq}$ 은 각각의 서로 다른 값을 가지게 되며 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{cases} e^{eq} = -2\rho + 3(u^2 + v^2) \\ \epsilon^{eq} = \rho - 3(u^2 + v^2) \\ q_x^{eq} = -u \\ q_y^{eq} = -v \\ p_{xx}^{eq} = u^2 - v^2 \\ p_{xy}^{eq} = uv \end{cases} \quad (7)$$

충돌 과정이 완료된 후, 이동 과정이 일어나기 전에  $\bar{R}^*$ 을  $\bar{F}^*$ 의 형태로 변환하여 나타내면 LB-SRT 모델과 같은 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{F}^* = \bar{M}^{-1}\bar{R}^* = \bar{F} - \bar{M}^{-1}\bar{S}(\bar{R} - \bar{R}^{eq}) \quad (8)$$

각 격자점에서의 유체 밀도와 운동량은 다음과 같이 분포함수의 합으로 나타낸다.

$$\rho(x, t) = \sum_i f_i(x, t) \quad (9)$$

$$\rho(x, t)\bar{u}(x, t) = \sum_i c_i f_i(x, t) \quad (10)$$

LBM에서의 압력은 식 (11)와 같은 상태방정식으로 표현되며, 동점성 계수( $\nu$ )는 식 (12)과 같이 완화시간( $\tau$ )의 함수로 정의된다.

$$p(x, t) = C_s^2 \rho, \quad C_s^2 = c^2/3 \text{ for } D2Q9 \quad (11)$$

$$\nu = C_s^2(\tau - \frac{1}{2})\Delta t \quad (12)$$

또한, LBM에서의 레이놀즈(Reynolds, Re) 수는 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$Re = \frac{6 U_l N_l}{2\tau - 1} \quad (13)$$

여기서  $U_l$ 은 유체속도,  $N_l$ 은 특성길이에 대한 LBM에서의 격자수,  $\tau$ 는 완화시간을 의미한다.

그리고 LB-MRT 모델에서의 한 계산시간(t)에 대한 계산단계는 충돌(collision) 단계와 이류(stream) 단계로 구분할 수 있다. 충돌은 식 (5)의 충돌 연산자를 계산하는 단계이며, 이류는 충돌

연산자에서 구해진 새로운 분포함수를 다음 격자점으로 분산시켜 주는 단계이다. 이 두 단계가 끝나고 계산영역의 경계에서 경계조건을 계산하는 것으로 LB-MRT 모델의 계산이 마무리 된다.

## 2.2 혼성(混成) 격자볼츠만 방정식(HLBE)

본 연구에서는 두 물질의 질량은 같고, 두 물질 사이의 상호작용이 없다고 가정한 Passive Scalar 방법을 사용하였다. 전체에 대한 유동장은 분포함수  $f_i$ 를 통해 표현되며, 농도 확산을 해석하기 위한 농도 분포는 유한차분법(FDM)을 이용하였다.

HLBE를 이용하여 농도 분포를 해석하기 위해서는 다음과 같은 무차원 대류-확산(Convection-Diffusion) 방정식을 수치적으로 해석하여야 한다.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u^* \frac{\partial \theta}{\partial x} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Re Sc} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (14)$$

여기서 ‘\*’는 무차원 변수이며, 모든 변수들은 lattice에서의 물리량을 말한다.  $\theta$ 는 무차원인 농도로 다음과 같이 정의한다.

$$\theta = \frac{C - C_{initial}}{C_{boundary} - C_{initial}} \quad (15)$$

식 (14)의 쌍곡선 편미분 방정식(hyperbolic partial differential equations)인 무차원 대류-확산 방정식을 수치적으로 해석하기 위해서는 여러 가지 유한차분법의 양해법(explicit)을 이용하여 해석할 수 있다. 본 연구에서는 식 (14)의 각 편미분항을 Euler's FTCS (forward-time central-space) 방법을 이용하여 이산화하였다.

대류에 의한 물질 이동량과 확산에 의한 물질 이동량의 상대적 크기를 나타내는 무차원 수인 Pe수는 특성길이(L), 속도(u), 확산계수(D)의 함수로써 다음과 같이 정의한다.

$$Pe = \frac{\text{advective transport rate}}{\text{diffusive transport rate}} = \frac{uL}{D} = Re Sc \quad (16)$$

따라서 Pe수가 1보다 큰 경우, 확산에 의한 물질 이동량보다 대류에 의한 물질 이동량이 큼을 나타내며, Pe수가 1보다 작은 경우, 대류에 의한 물질 이동량보다 확산에 의한 물질 이동량이 큼을 나타낸다.

LBM을 이용하여 해석한 유체 속도를 유한차분법에 적용하기 위해서는 수치적 안정성 문제 때문에 유한차분법의 시간  $\Delta t^{FD}$ 과 속도, 확산계수와의 관계는 다음과 같은 제한조건이 있다.<sup>(20)</sup>

1) CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) 조건;

$$\Delta t^{FD} < \Delta x/u \quad (17)$$

2) 확산계수 조건 ;

$$\Delta t^{FD} < \Delta x^2/(2D) \quad (18)$$

위의 식 (17)과 식 (18)을 이용하면 이산화시간  $\Delta t^{FD}$ 를 확산계수와 속도로 다음과 같은 제한조건이 정의된다.

$$\Delta t^{FD} < \frac{2D}{u^2} \quad (19)$$

## 3. 수치계산 방법 및 조건

본 연구에서는 직사각형 공동형상에 대하여 유동해석은 LB-MRT 모델을 사용하였으며, 농도장은 HLBM을 적용하여 수치 계산 하였다.

Fig. 1은 직사각형 공동형상 내부의 대표적 유동 형태와 경계조건을 나타낸 개략도이다. LBM에서의 경계조건은 기존 CFD 방법에서 사용하는

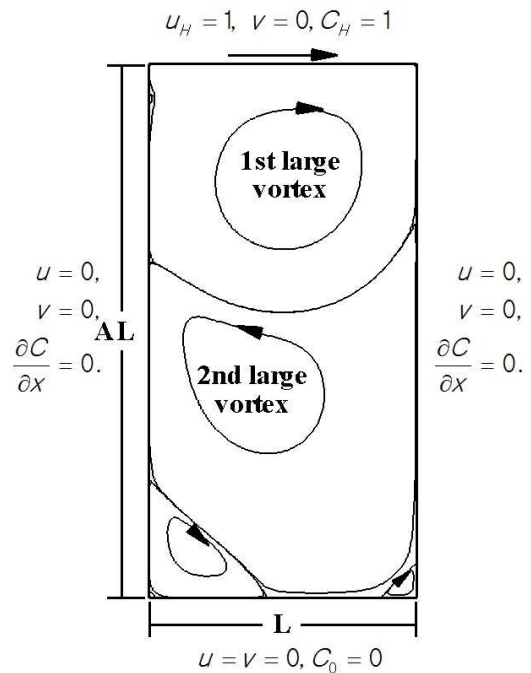


Fig. 1 Schematic view of the 2-D lid-driven flow in a deep cavity of aspect ratio A

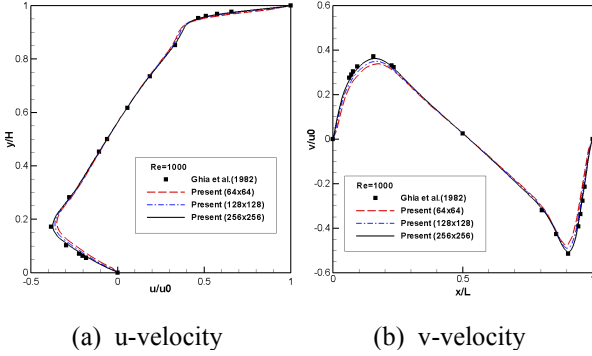


Fig. 2 The typical test of grid sensitivity for square cavity flow with Re=1000

방법을 그대로 적용할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 상부를 제외한 모든 벽면에 접촉(No-Slip) 하는 조건으로 2차 정확도를 가진 “mid-grid bounce-back scheme”을 사용하였으며, 상판에서의 조건은 상판 속도( $U_H=1$ )를 토대로 매 계산시간마다 평행분포 함수  $f_i^{eq}$ 로 유지시켜주었다. 또한, 농도 경계조건으로는 왼쪽과 오른쪽 벽면에서는 물질전달이 이루어지지 않는다고 가정하여 Neumann ( $\partial C/\partial x = 0$ ) 조건을 사용하였으며, 상, 하부 벽면은  $C_H = 1.0$ ,  $C_0 = 0.0$ 인 Dirichlet 조건을 사용하였다.

본 연구에서는 격자 의존도 검사를 수행하기 위하여, 정사각형인 경우에 대하여 한쪽 벽면을 64 ~ 256 lattice로 변화하여 수치해석을 수행하였다. Fig. 2에서 보는 것처럼, Re=1000일 때의 중심에서의 속도(u, v) 분포는 격자수가 256개 이상인 경우, 기존의 Ghia 등<sup>(3)</sup>의 수치계산 결과와 거의 차이가 발생하지 않았다. 따라서 계산영역의 격자수는 윗면과 밑면의 격자수 256 lattice를 기준으로 종횡비(Aspect ratio, A)에 따라 옆면의 격자수를 결정하여 계산을 수행하였으며, 모든 lattices에서의 각 변수(u, v, C)들의 잔류(residual)가  $10^{-8}$  이하인 경우를 정상상태로 가정하여 수치계산을 수행하였다.

#### 4. 결과 및 고찰

##### 4.1 정사각 공동형상에서의 유동 결과

이 절에서는 종횡비에 따른 직사각 형태의 공동형상 내 유동을 해석하기 전에 정사각 형태의 공동형상 내 유동을 해석하여 기존의 연구 결과와 비교를 통해 본 연구의 신뢰성을 검토하고자 한다.

Table 1 Strengths  $\psi$  and centers of the primary vortices of the lid-driven 1:1 (A=1) square cavity

Re	Reference	Primary Vortex		
		$\psi$	x/L	y/L
100	Present	-0.103	0.6172	0.7379
	Ghia [3]	-0.103	0.6172	0.7344
	Hou [21]	-0.103	0.6196	0.7373
400	Present	-0.113	0.5547	0.6055
	Ghia [3]	-0.114	0.5547	0.6055
	Hou [21]	-0.112	0.5608	0.6078
1000	Present	-0.118	0.5313	0.5662
	Ghia [3]	-0.118	0.5313	0.5625
	Hou [21]	-0.118	0.5333	0.5647

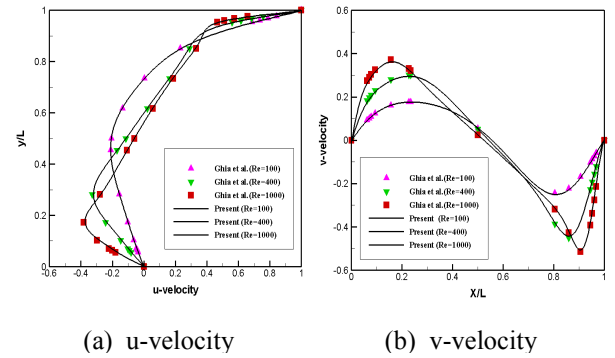


Fig. 3 Comparison of velocities at the mid-planes for square cavity flow with Re=100, 400, and 1000. (a) u-velocity along the vertical geometric center line and (b) v-velocity along the horizontal geometric center line

정사각 공동형상의 유동해석은 벽면의 격자수 256 lattice를 기준으로 Re수를 100, 400, 1000으로 수치계산을 수행하였다. Table 1은 정사각 공동형상에서 각 Re수에 따른 유선함수( $\psi$ ) 값과 주 와동의 중심 위치(x/L, y/L)를 본 연구결과와 기존 연구 결과들(Ghia 등<sup>(3)</sup>, Hou 등<sup>(21)</sup>)을 함께 정리하여 나타낸 것이다. 모든 경우에서 기존의 연구결과들과 약 1% 미만의 차이를 나타낸 것을 볼 수 있다. Fig. 3은 각 Re수에 따른 정사각 공동형상의 수치, 수평 중심선에서의 속도 분포를 기존 Ghia 등<sup>(3)</sup>의 연구결과와 비교하여 나타낸 것으로 거의 같은 속도 분포를 보이고 있다. 또한, Fig. 4는 각 Re수에 따른 정사각 공동형상 내 유선분포와 와도 형태를 나타내고 있다. 좌측에 나타낸 유선분포와 우측에 나타낸 와도 형태를 통하여

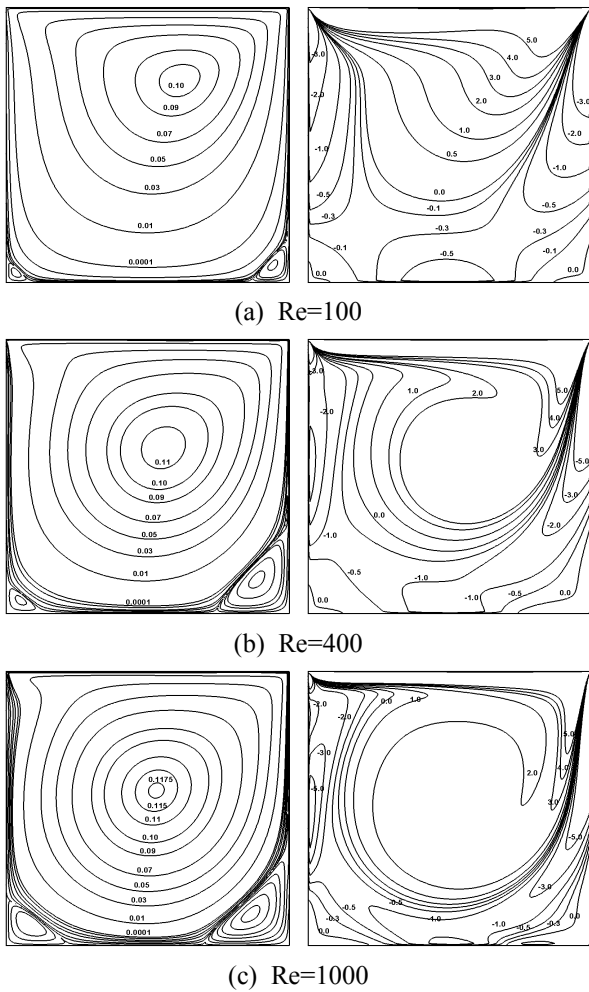
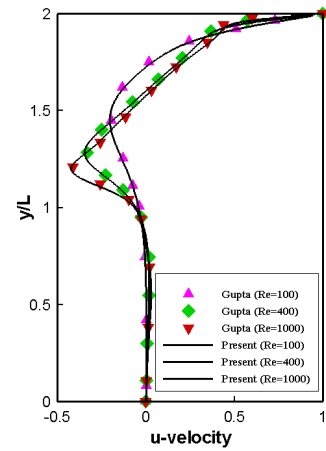


Fig. 4 Streamline(left side) and vorticity(right side) contours for square cavity flow at different Reynolds number  $Re=100, 400,$  and  $1000$

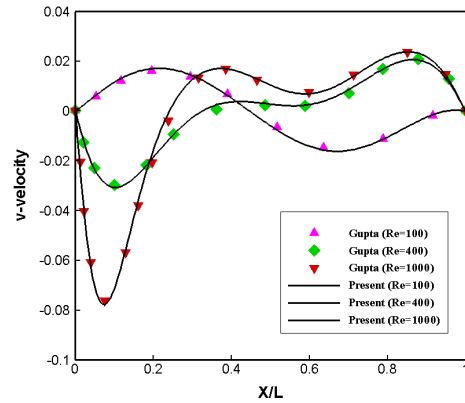
공동형상 중심에서 시계방향으로 회전하는 주 와동(primary vortex)과 하단 좌, 우측 부분에서 반시계 방향으로 회전하는 추가적인 와동(secondary vortex)이 발생함을 확인할 수 있으며, 이 추가적인 와동은  $Re$ 수가 증가함에 따라 그 크기 또한 함께 증가하는 것을 확인할 수 있다.  $Re$ 수의 증가에 따른 유선분포의 변화를 통하여  $Re$ 수가 더 증가한다면 좌측 상단에서도 반시계 방향으로 회전하는 또 다른 추가적인 와동이 발생할 수 있음을 예측할 수 있다.

4.2 직사각 공동형상 내부에서의 유동 결과

이 절에서는 종횡비가 2인 직사각 형태의 공동형상에 대하여  $Re$ 수가 100, 400, 1000인 세 가지 경우에 대한 공동형상 내 유동을 수치 계산하여 그 결과를 나타내었다.



(a) u-velocity



(b) v-velocity

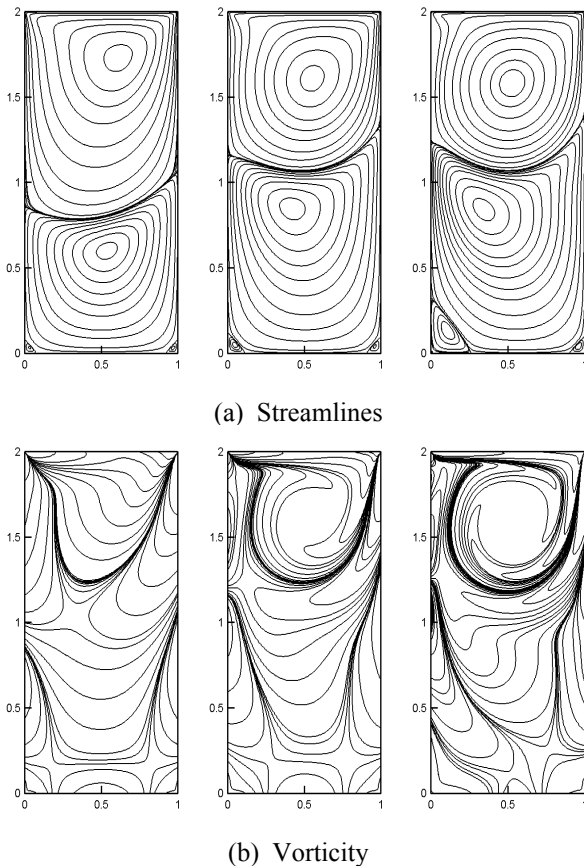
Fig. 5 (a) u-velocity along the vertical geometric center line and (b) v-velocity along the horizontal geometric center line for the deep cavity with aspect ratio(A) 1:2 at different Reynolds numbers  $Re=100, 400,$  and  $1000$ . The symbols represents the data from Gupta et al.[22]

Fig. 5는 직사각 공동형상에서 각  $Re$ 수에 따른 수직, 수평 중심선에서의 속도 분포를 기존의 연구결과<sup>(22)</sup>와 비교하여 나타내었다. 종횡비가 1인 정사각 공동형상의 경우와 비슷하게 기존의 연구결과와 유사한 것을 확인할 수 있다. 또한, Table 2에서는 직사각 공동형상에서 각  $Re$ 수에 따른 유동함수( $\psi$ ) 값과 주 와동의 중심 위치( $x/L, y/L$ )를 본 연구 결과와 기존 연구결과들(Gupta 등,<sup>(22)</sup> Bruneau 등<sup>(23)</sup>)을 함께 정리하여 나타내었다. 본 연구의 연구결과와 유사함을 확인할 수 있다.

Fig. 6은 종횡비가 2인 공동형상에서 각  $Re$ 수에 따른 유선 분포와 와도 형태를 나타내었다.

**Table 2** Strengths  $\psi$  and centers of the primary vortices of the lid-driven deep cavities ( $A=2.0$ )

Aspect Ratio (A)	Re	Reference	Primary top			Primary down		
			$\psi$	x/L	y/L	$\psi$	x/L	y/L
2.0	100	Present	-0.103	0.6150	1.7344	8.47E-4	0.5368	0.5999
		Gupta [22]	-0.103	0.6125	1.7375	5.23E-4	0.5625	0.6000
		Bruneau [23]	-0.103	0.6172	1.7344	7.83E-4	0.5391	0.5859
	400	Present	-0.112	0.5508	1.6100	9.46E-3	0.4207	0.8503
		Gupta [22]	-0.113	0.5500	1.6125	8.02E-3	0.4375	0.8625
		Bruneau [23]	-0.112	0.5547	1.5938	9.09E-3	0.4297	0.8125
	1000	Present	-0.113	0.5294	1.5824	1.40E-2	0.3399	0.8651
		Gupta [22]	-0.118	0.5250	1.5875	1.25E-2	0.3250	0.8750
		Bruneau [23]	-0.117	0.5273	1.5625	1.48E-2	0.3516	0.7891



**Fig. 6** Flow patterns of the lid-driven 1:2 deep cavity flow at  $Re=100, 400, 1000$  in order from the left to the right. (a) Streamlines and (b) Vorticity

상판이 왼쪽에서 오른쪽 방향으로 이동함에 따라 상단부분에 시계방향으로 회전하는 첫 번째 주 와동이 발생하며, 그 아래에 반시계방향으로 회

전하는 두 번째 와동 또한 크게 발생한다. 또한  $Re$ 수의 증가에 따른 유선 분포와 와도형태의 변화를 통하여,  $Re$ 수가 증가함에 따라 첫 번째 주 와동의 크기가 작아지며 하단의 두 번째 와동의 위치가 올라가면서 밑면 양모서리의 추가적인 와동의 크기가 증가함을 확인할 수 있다.

4.3 직사각 공동형상 내부에서의 혼합 특성

이 절에서는 앞 절의 유동장 결과를 바탕으로 혼성 격자볼츠만(HLBE) 방법을 이용하여 움직이는 상판을 통하여 다른 물질이 직사각 형태의 공동형상 내부로 전달되는 형태를 수치적으로 모사하였다.

먼저 종횡비 변화에 따른 공동형상 내부의 혼합분포를 기존 연구결과와 비교하기 위하여, 상·하부 벽면에서 공동형상 내부로 물질이 전달되는 양을 정량적으로 표현하는 평균  $Sh$ (Sherwood)수의 변화를 기존 Antonini 등<sup>(24)</sup>의 연구결과와 같이 Fig. 7에 나타내었다. 상·하부 벽면에서의 평균  $Sh$ 수는

$$Sh_a = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial C}{\partial y} dx \Big|_{y=0 \text{ or } H} \quad (20)$$

와 같이 정의되며, 물질이동계수를 유동의 특성 길이와 확산계수를 사용하여 나타낸 무차원수이다. 기존의 Antonini 등의 연구결과와 본 연구결과가 대체로 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다.

이 결과를 통해 본 연구에서 적용한 HLBM 모델이 종횡비 변화에 따른 공동형상 내부의 농도 분포를 잘 모사한다고 할 수 있다.



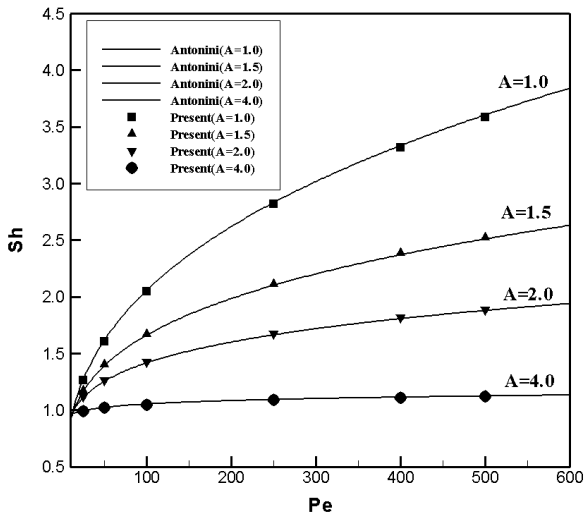


Fig. 7 Average Sherwood number for various Peclet numbers with various aspect ratio at Re=1000

Fig. 8은 종횡비가 1, 1.5, 2, 4인 공동형상에서 상관을 통하여 물질이 전달되어 혼합되는 형태를 나타내었다. 유동 조건으로는 Re수가 1000인 동일한 조건이며, Pe수는 10, 100, 400, 1000이다. Pe수가 10인 경우 두 물질 사이의 혼합이 잘 이루어지지 않았음을 볼 수 있으며, Pe수가 1000인 경우 Pe수가 10인 경우보다 두 물질 사이의 혼합이 잘 이루어짐을 볼 수 있다. 따라서 두 물질 사이의 혼합은 대류에 의한 물질 이동량이 확산에 의한 물질 이동량보다 클수록, 즉 Pe수가 커질수록 혼합이 잘 이루어짐을 확인할 수 있다. 특히 앞 절의 Fig. 6(a)의 Re수가 1000인 공동형상 내 유선분포와 Fig. 8(c)의 농도분포를 비교하면 그 형태가 유사함을 볼 수 있는데, Pe수가 큰 경우 대류에 의한 물질 이동량이 크게 나타나기 때문에 공동형상 내 유동의 영향을 많이 받는다. 그로 인해 물질 혼합형태가 유선분포와 유사하게 나타는 것으로 사료된다. 또한 종횡비가 증가할수록 공동형상 하단부에 위치한 물질은 혼합이 잘 이루어지지 않는 것을 확인할 수 있는데, 이는 공동형상 하단부로 갈수록 움직이는 상부면에 의한 유동의 영향이 작기 때문에 대류에 의한 물질 이동량도 작아지므로 물질혼합이 잘 이루어지지 않은 것으로 판단된다.

Fig. 9는 각 종횡비에 따라 Re수가 1000인 유동조건에서 Pe수를 10에서 1000까지 변화시키면서 공동형상 내 수직 중심선에서의 농도분포를

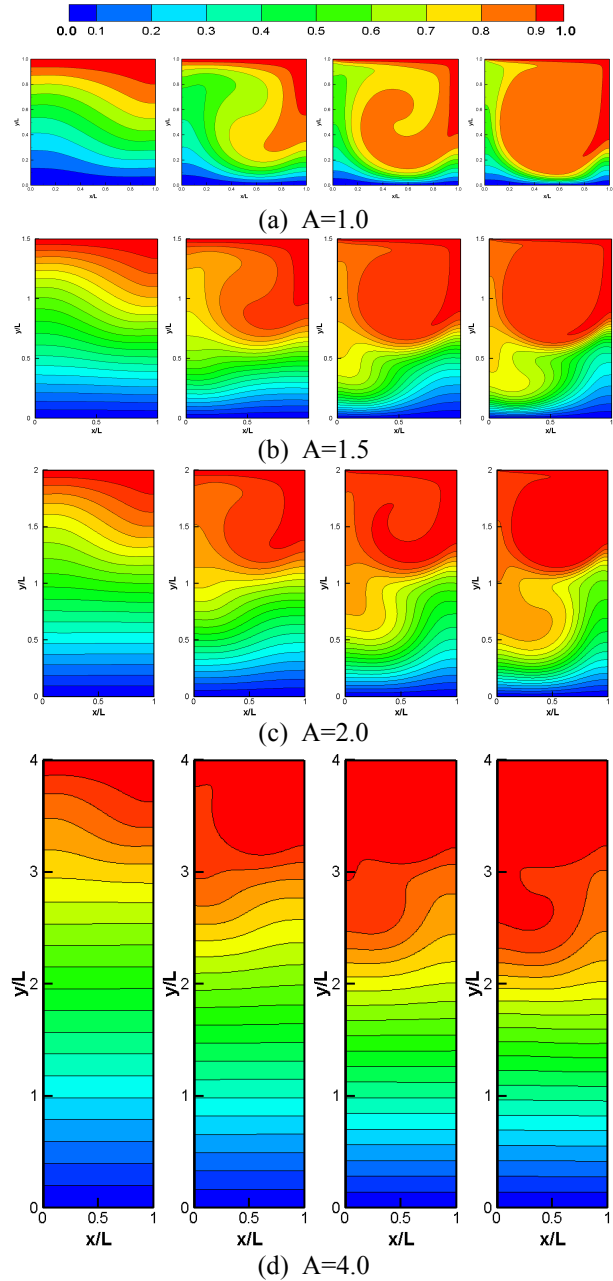
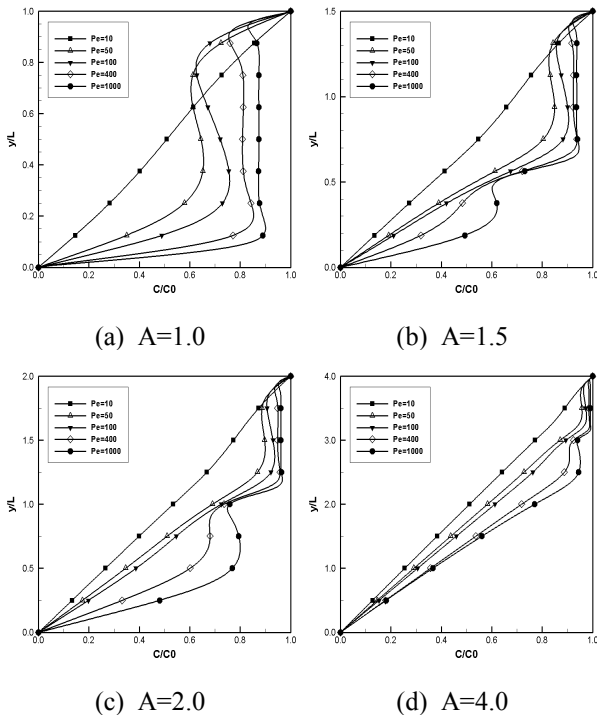


Fig. 8 Concentration contours of the lid-driven deep cavity flow at Pe=10, 100, 400, and 1000 in order from the left to the right at Re=1000; (a) A=1.0; (b) A=1.5; (c) A=2.0; (d) A=4.0

나타내었다. Fig. 8에서도 확인하였듯이 종횡비가 커질수록 하단부에서의 농도는 상단부에 비하여 많이 낮은 것을 확인할 수 있다. 또한 공동형상 윗면에서 일정한 속도의 유동이 발생하기 때문에 상단부에서는 유동으로 인한 대류 활동 때문에 물질이동이 잘 이루어지고 농도 경계층의 두께가 얇아지지만, 하단부로 갈수록 유동의 영향이 미





**Fig. 9** Concentration profiles along the vertical geometric centerline at various Peclet numbers for the deep cavities with  $Re=1000$  at different aspect ratio (a)  $A=1$ , (b)  $A=1.5$ , (c)  $A=2.0$ , and (d)  $A=4.0$

비하기 때문에 물질이동이 잘 일어나지 않으며, 경계층의 두께 또한 큼을 확인할 수 있다.

### 5. 결론

본 연구에서는 혼성 격자볼츠만 방법을 이용하여 종횡비 변화에 따른 공동형상 내 유동과 물질 전달형태를 모사하였다. 먼저 격자볼츠만 방법을 이용한 공동형상 내 유동 결과와 기존의 신뢰성 있는 공동형상 내 유동 결과의 비교를 통하여 해석결과의 신뢰성을 검증하였으며, 이를 토대로 공동형상 내 농도분포를 분석하였고 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 상판이 움직이는 공동형상 내 물질혼합은 유동의 영향을 직접적으로 받는 상단부에서 잘 이루어졌으며, 하단부로 내려감에 따라 물질혼합이 잘 이루어지지 않았음을 확인하였다.

(2) 대류에 의한 물질 이동량이 확산에 의한 물질 이동량보다 큰 유동조건 하에서 두 물질사이 혼합이 잘 이루어짐을 확인하였다.

(3) 두 물질사이의 혼합은 확산보다 대류의 영향을 많이 받으므로, 대류의 영향을 증대시키는

유동형태로 형상설계가 이루어진다면, 물질혼합이 더욱 효과적으로 이루어질 것으로 사료된다.

### 참고문헌 (References)

- (1) Burggraf, O. R., 1966, "Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 24, pp. 113~151.
- (2) Pan, F. and Acrivos, A., 1967, "Steady Flows in Rectangular Cavities," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 28, pp. 643~655.
- (3) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (4) Shankar, P. N. and Deshpande, M. D., 2000, "Fluid Mechanics in the Driven Cavity," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 32, pp. 93~136.
- (5) Mehta, U. B. and Lavan Z., 1969, "Flow in a Two-Dimensional Channel With a Rectangular Cavity," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, pp. 897~901.
- (6) Shen, C. and Floryan, J. M., 1985, "Low Reynolds Number Flow Over Cavities," *Physics of Fluids*, Vol. 28, pp. 3191~3202.
- (7) Alkire, R. C., Deligianni, H. and Ju, J. B., 1990, "Effect of Fluid Flow on Convective Transport in Small Cavities," *Journal of the Electrochemical Society*, Vol. 139, pp. 2845~2855.
- (8) Occhialini, J. M. and Higdon, J. J. L., 1992, "Convective Mass Transport from Rectangular Cavities in Viscous Flow," *Journal of the Electrochemical Society*, Vol. 139, pp. 2845~2855.
- (9) Trevelyan, P. M. J., Kalliadasis, S., Merkin, J. H. and Scott, S. K., 2001, "Circulation and Reaction Enhancement of Mass Transport in a Cavity," *Chemical Engineering Science*, Vol. 56, pp. 5177~5188.
- (10) Shin, M. S., Jeon, S. Y. and Yoon, J. Y., 2013, "Numerical Investigation of Mixing Characteristics in a Cavity Flow by Using Hybrid Lattice Boltzmann Method," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. B*, Vol. 37, No. 7, pp. 683~693.

- (11) Shin, M. S., Byun, S. J. and Yoon, J. Y., 2010, "Numerical Investigation of Effect of Surface Roughness in a Microchannel," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. B*, Vol. 34, No. 5, pp. 539~546.
- (12) Shin, M. S., Byun, S. J., Kim, J. H. and Yoon, J. Y., 2011, "Numerical Investigation of Pollutant Dispersion in a Turbulent Boundary Layer by Using Lattice Boltzmann-Subgrid Model," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. B*, Vol. 35, No. 2, pp. 169~178.
- (13) Chen, S. and Doolen, G. D., 1998, "Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 30, pp. 329~364.
- (14) Shan, X., 1997, "Simulation of Rayleigh-Benard Convection Using a Lattice Boltzmann Method," *Physical Review E*, Vol. 55, pp. 2780~2788.
- (15) Lallemand, P. and Luo, L. S., 2003, "Hybrid Finite-Difference Thermal Lattice Boltzmann Equation," *International Journal of Modern Physics*, Vol. 17, pp. 41~47.
- (16) McNamara, G. and Alder, B., 1993, "Analysis of the Lattice Boltzmann Treatment of Hydrodynamics," *Physica A*, Vol. 194, pp. 218~228.
- (17) Bhatnagar, P. L., Gross, E. P. and Krook, M., 1954, "A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems," *Physical Review*, Vol. 94, No. 5, pp. 511~525.
- (18) Lallemand, P. and Luo, L. S., 2000, "Theory of the Lattice Boltzmann method: Dispersion, Dissipation, Isotropy, Galilean Invariance, and Stability," *Physical Review E*, Vol. 61, pp. 6546~6562.
- (19) d'Humières, D., 1992, "Generalized Lattice Boltzmann Equation," in *Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations*, ed. by Shizgal, D, and Weaver, D.P, Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 159, AIAA, Washington DC, pp. 450~458.
- (20) Treek, C. V., Rank, E., Krafczyk, M., Tolke, J. and Nachtwey, B., 2006, "Extension of a Hybrid Thermal LBE Scheme for Large-eddy Simulations of Turbulent Convective Flow," *Computers & Fluids*, Vol. 35, pp. 863~871.
- (21) Hou, S., Zou, Q., Chen, S., Doolen, G. and Cogley, A. C., 1995, "Simulation of Cavity Flow by Lattice Boltzmann Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 118, pp. 329~347.
- (22) Gupta, M. M. and Kalita, J. C., 2005, "A New Paradigm for Solving Navier-Stokes Equations: Streamfunction-velocity Formulation," *Journal of Computational physics*, Vol. 207, pp. 52~68.
- (23) Bruneau, C. H. and Jouron, C., 1990, "An Efficient Scheme for Solving Steady Incompressible Navier-Stokes Equations," *Journal of Computational physics*, Vol. 89, pp. 389~413.
- (24) Antonini, G., Gelus, M., Guiffant, G. and Zoulalian, A., 1981, "Simultaneous Momentum and Mass Transfer Characteristics in Surface-Driven Recirculating Flows," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 1313~1323.